Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, 1 (1971)
Review of Research of Science — University of Novi Sad 1 (1971)

Mr Olga Hadžić

TEOREME O NEPREKIDNOJ ZAVISNOSTI NEPOKRETNE TAČKE OD PARAMETRA I PRIMENA NA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

Uvod

Ovaj rad je podeljen na dva dela. U prvom delu dokazane su teoreme o neprekidnoj zavisnosti nepokretne tačke x_λ preslikavanja ϕ_λ, definisanih nad sekvencijalno kompletnim lokalno konvesnim prostorom E, od parametra λ koji pripada topološkom prostoru Λ. U drugom delu je data primena dobijenih rezultata na diferencijalne jednačine u lokalno konveksnim prostorima.

Lokalno konveksan prostor je vektorsko topološki prostor u kome postoj baza — okolina nule sastavljena od konveksnih skupova. Veći deo prostora savremene matematičke analize uključen je u klasu lokalno konveksnih prostora. Tu spadaju, između ostalog, Banachovi prostori kao i veoma važni prostori distribucijâ.

U novije vreme pojavio se problem rešavanja diferencijalnih jednačina u konkretnim lokalno konveksnim prostorima. Kao veoma pogodno sredstvo za to rešavanje pokazala se teorija nepokretne tačke. U radu [5] dokazane su neke teoreme o nepokretnoj tački sa primenom u teoriji diferencijalnih jednačina u polju operatora Mikusinskog. Nastavljajući istraživanja u tom pravcu, B. Stanković je u [4] dobio teoreme egzistencije rešenja diferencijalne jednačine $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$, gde je $f(x, t)$ neprekidno preslikavanje podskupa proizvoda $E \times I$ (I je interval realnih brojeva) u E. Ovaj rad predstavlja nastavak pomenutih radova.

U čitavom daljem izlaganju lokalno konveksan prostor E biće Hauzdorfov, što ima za posledicu da je familija seminormi $|\ \ |_\alpha, \alpha \in I$ (I — proizvoljan skup), koja definiše topologiju prostora E, dovoljna. To znači da za svako $x \neq 0$ iz prostora E postoji $\alpha \varepsilon J$ tako da je $|x|_\alpha \alpha \neq 0$.

1. Uopštavajući teoremu o nepokretnoj tački iz [6] u radu [5], dokazali smo sledeću teoremu.

T e o r e m a A. Neka je: E lokalno konveksan vektorsko topološki prostor, $|\ \ |_\alpha, \alpha \varepsilon J$ familija seminormi koja generiše topologiju prostora E, φ preslikavanje skupa I u samog sebe, M podskup prostora E koji je sekvencijalno kompletan i T preslikavanje skupa M u samog sebe.

Pod pretpostavkama:

1) *Za svako* $\alpha \varepsilon J$ *postoji* $q_\alpha > 0$ *tako da je* $|Tx - Ty|_\alpha \leq q_\alpha |x - y|_{\varphi(\alpha)}$ *za svako* $x, y \varepsilon M$.

2) *Za svako* $\alpha \varepsilon J$ *postoji prirodan broj* n_α *tako da je:* $q\varphi n_{(\alpha)} \leq q(\alpha) < 1$ *za* $n \geqslant n_{\alpha)}$ *pri čemu je po definiciji* $\varphi^n(\alpha) = \varphi(\varphi^{n-1}{}_{(\alpha)})$, $\varphi^o(\alpha) = \alpha\, \alpha \varepsilon I$

3) Postoji $x_0 \varepsilon M$ *tako da je:* $|x_0 - Tx_0|_{\varphi^n(\alpha)} \leq p(\alpha) < \infty$ *za svako* $\alpha \varepsilon J$, $n \geqslant 0$.

Tada postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine $Tx = x$ *koje zadovoljava uslov*

4) $|x - x_o|_{e^n(\alpha)} \leq p(\alpha, x) < \infty \quad n \geqslant 0.$

U dokazu ove teoreme dobijena je nejednačina

$$|x - x_o|_\alpha \leq p(\alpha) \left[\sum_{\nu=0}^{n\alpha-1} \left(\prod_{\mu=0}^{\nu-1} q_{\varphi\mu(\alpha)}\right) + \frac{\prod_{\nu=0}^{n\alpha-1} q\, e^\nu(\alpha)}{1 - q(\alpha)} \right]$$

gde je $x = \lim_{n \to \infty} T^n x_0$ i x_0 je onaj elemenat iz M čiju egzistenciju garantuje uslov 3.

Koristeći se prethodnom teoremom, dokazaćemo teoremu o neprekidnoj zavisnosti nepokretne tačke x_λ preslikavanja $\Phi_\lambda(x)$, definisanih nad prostorom E od parametra λ koji pripada topološkom prostoru $\wedge$.

T e o r e m a 1. *Neka je:* E *sekvencijalno kompletan lokalno konveksan vektorsko topološki prostor,* $\wedge$ *topološki prostor i* Φ *preslikavanje topološkog proizvoda* $E \times \wedge$ *u* E. *Pretpostavimo da je za svako fiksno* $x \varepsilon E$ *preslikavanje topološkog prostora* $\wedge$ *u* E: $\lambda \to \Phi(\lambda, x)$. *Neprekidno i za svako* $\lambda \varepsilon \wedge$ *preslikavanje* $\Phi_\lambda : x \to \Phi(\lambda, x)$ *zadovoljava sledeće uslove:*

1) *Za svako* $\alpha \varepsilon J$ *postoji* $q_\lambda(\alpha) > 0$ *tako da je:* $|\Phi_\lambda x - \Phi_\lambda y|_\alpha \leqslant q_{(\alpha)} |x - y|_{\varphi_\lambda(\alpha)}$ *za sve* $x, y \varepsilon E$ *gde je* $\varphi_\lambda(\alpha)$ *preslikavanje skupa* J *u samog sebe.*

2) *Za svako* $\alpha \varepsilon J$ *postoji, nezavisno od* $\lambda \varepsilon \wedge$, *prirodan broj* n_α *i pozitivne konstante* $A(\alpha)$ *i* $Q(\alpha)$, *tako da je*

a) $q_\lambda[\varphi^n_\lambda(\alpha)] \leqslant A(\alpha) \quad n = 0, 1, \cdots n_\alpha - 1$

b) $q_\lambda[\varphi^n_\lambda(\alpha)] \leqslant Q(\alpha) < 1 \quad n \geqslant n_\alpha$ *gde je* $\varphi^n_\lambda(\alpha) \overset{def}{=} \varphi_\lambda[\varphi^{n-1}_\lambda(\alpha)]$ *i* $\varphi^0(\alpha) = \alpha$ *za svako* $\alpha \in I$.

3. *Za svako* $\alpha \in I$ *postoji* $\beta(\alpha) \in I$ *i* $m_\alpha > 0$, *nezavisno od* $\lambda \in \wedge$, *tako da je za svako* $x \in E$ *i* $n \geqslant 0$

$$|x|_{\varphi^n_\lambda(\alpha)} \leqslant m_\alpha |x|_{\beta(\alpha)}.$$

Tada je preslikavanje: $\lambda \to x_\lambda$, *gde je* $x_\lambda = \Phi_\lambda(x_\lambda)$, *neprekidno preslikavanje topološkog prostora* $\wedge$ *u* E.

Dokaz. — Uslov 3. ove teoreme obezbeđuje uslov 3. teoreme A, gde je sada $M = E$. Takođe je $x_\lambda = \lim_{n \to \infty} \Phi_\lambda^n (x)$ jedina nepokretna tačka preslikavanja Φ_λ, pri čemu je x proizvoljan elemenat iz E. Ovo stoga što je i uslov 4. teoreme A. ispunjen za svako $x, x_0 \in E$. Preslikavanje $\lambda \to x_\lambda$ će biti neprekidno u tački $\lambda = \lambda_0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i $\alpha \in I$ postoji okolina $V(\lambda_0) \subset \Lambda$, tako da je: $| x_\lambda - x_{\lambda 0} |_\alpha \leqslant \varepsilon$ za svako $\lambda \in V(\lambda_0)$. Neka je dato $\varepsilon > 0$ i $\alpha \in I$. Ako sada razliku $x_\lambda - x_{\lambda 0}$ shvatimo kao razliku između fiksne tačke preslikavanja Φ_λ i početnog elementa $x = x_0$, imamo na osnovu (1)

$$| x_\lambda - x_{\lambda 0} |_\alpha \leqslant p(\alpha) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_\alpha - 1} \left(\prod_{\mu=0}^{\nu-1} q_\lambda [\varphi_\lambda^n (\alpha)] \right) + \frac{\prod_{\nu=0}^{n_\alpha - 1} q_\lambda [\varphi_\lambda^\nu (\alpha)]}{1 - Q(\alpha)} \right\}$$

$$\leq p(\alpha) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_\alpha - 1} [A(\alpha)]^\nu + \frac{[A(\alpha)]^{n_\alpha}}{1 - Q(\alpha)} \right\}$$

i $\lambda \in \Lambda$, gde je $p(\alpha)$ uvedeno uslovom 3. teoreme. A. Kako je na osnovu uslova 3. ove teoreme $| x_{\lambda 0} - x \Phi_\lambda (x_{\lambda 0}) |_{\varphi_\lambda^n (\alpha)} \leqslant m_\alpha | x_{\lambda 0} - \Phi_\lambda (x_{\lambda 0}) |_{\beta(\alpha)}$ to za $p(\alpha)$ možemo uzeti $m_\alpha | x_{\lambda 0} - \Phi_\lambda (x_{\lambda 0}) |_{\beta(\alpha)} = m_\alpha | \Phi_{\lambda 0} (x_{\lambda 0}) - \Phi_\lambda (x_{\lambda 0}) |_{\beta(\alpha)}$. Po pretpostavci preslikavanje) $\lambda \to \Phi (\lambda, x)$ je neprekidno za svako fiksno $x \in E$, pa postoji okolina $V(\lambda_0) \subset \Lambda$. Tada je:

$$| \Phi_{\lambda 0} (x_{\lambda 0}) - \Phi_\lambda (x_{\lambda 0}) |_{\beta(\alpha)} \leqslant \frac{\varepsilon}{m \alpha} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_\alpha - 1} [A(\alpha)]^\nu + \frac{[A(\alpha)]}{1 - Q(\alpha)} \right\}^{-1}$$

za svako $\lambda \in V(\lambda_0)$ odnosno: $| x_\lambda - x_{\lambda 0} | \leqslant \varepsilon$, za svako $\lambda \in V(\lambda_0)$, što je i trebalo pokazati.

Koristeći se ovom teoremom, možemo dati nešto drugačiji dokaz uopštene teoreme Krasnoseljskog [5]. Prilikom dokaza primenjuje se poznata teorema Tihonova koja garantuje egzistenciju bar jedne nepokretne tačke neprekidnog preslikavanja kompaktnog konveksnog podskupa lokalno konveksnog prostora u samog sebe.

T e o r e m a B. *Neka je F zatvoren i konveksan podskup kompletnog lokalno konveksnog karaktera E,* a *S i T dva preslikavanja F u E pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *Za svako $x, y \in F$* je $Tx + S\,y + S\,y \in F$
2. T zadovoljava uslov 1. i 2. teoreme A za $M = F$.
3. *S je neprekidno preslikavanje i skup SF je relativno kompaktan.*
4. *Za svako $\alpha \in I$ postoji $\beta(\alpha) \in I$ i $m_\alpha > 0$, tako da je $| x |_{\varphi n (\alpha)} \leqslant m_\alpha | x |_{\beta(\alpha)}$ za svako $x \in E, n \geqslant 0$. Tada postoji bar jedn tačka $x_0 \in F$ tako da je $Tx_0 + S\,x_0 = x_0$.*

Dokaz. — Ideja dokaza, kao i u [5], sastoji se u sledećem: za svako fiksno $x \in F$ posmatra se preslikavanje Φx dato sa:

$$\Phi x : y \to Ty + Sx, \; y \in F.$$

U [5] se pokazuje da Φx ima jedinstvenu nepokretnu tačku koju smo označili sa Rx j za svako $x \in F$ preslikavanje, pri čemu važi $Rx = RTx + Sx$. Očigledno da je na taj način definisano preslikavanje $R : x \to Rx$ skupa F u samog sebe i da je nepokretna tačka preslikavanja R takođe i nepokretna tačka preslikavanja $T + S$. Za dokaz egzistencije nepokretne tačke preslikavanja R bila nam je potrebna neprekidnost ovog preslikavanja. U [5] je ona dokazana korišćenjem nejednačine (1). Dokaz neprekidnosti preslikavanja R sada možemo izvesti primenom teoreme 1. na sledeći način. Za prostor Λ uzećemo podskup F, skup E iz teoreme 1. je takođe F, a preslikavanje Φ_λ je Φ_x. Jasno je da je F topološki prostor sa topologijom koju prostor E iz ove teoreme indukuje na F. Dalje, kako je E kompletan lokalno koveksan prostor a F zatvoren podskup od E, to je i F kompletan pa tim pre i sekvencijalno kompletan. Takođe je $\Phi_x\, y - \Phi_x\, y' = Ty - Ty'$. Kako T zadovoljava uslove 1. i 2. teoreme A to preslikavanje $\Phi_\lambda = \Phi x$ zadovoljava sve pretpostavke teoreme 1. jer sada $q_\lambda(\alpha) = q_\alpha$ i $\varphi_\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha)$ ne zavise od λ. Konstante $A(\alpha)$ i $Q(\alpha)$ date su sa $A(\alpha) = \max\limits_{i=0,1,\ldots,n\alpha-1} q_{\varphi^i(\alpha)}$ i $Q(\alpha) = q(\alpha) = \sup\limits_{i \geq n\alpha} b_{\varphi^i(\alpha)} < 1$. Ostatak dokaza je isti kao i u [5].

Naime, pokazuje se da je RF jedan prekompaktan skup, tj. da je $\widetilde{RF}$ koji ga kompletira kompaktan, pa kako je E kompletan, to je $\widetilde{RF} = \overline{RF}$, odnosno RF je relativno kompaktan. Primenjujući teoremu Tihonova na $\overline{co}\,(RF)$ ($\overline{co}$ — zatvorena konveksna obvojnica) i restrikciju od R na $\overline{co}\,(RF)$, zaključujemo da postoji elemenat $x_0 \in F$ tako da je $x_0 = Rx_0$ što je i trebalo pokazati.

Koristeći teoremu 2. iz [5], dokazaćemo teoremu koja je opštija od teoreme 1. i sadrži je kao specijalan slučaj pri čemu zadržavamo strukturu dokaza.

Teorema 2. *Neka E, Λ i Φ_λ imaju isto značenje kao i u teoremi* 1, *a za svako fiksno $x \in E$ preslikavanje $\lambda \to \Phi(\lambda, x)$ topološkog prostora Λ u E je neprekidno. Neka za svako $\lambda \in \Lambda$ preslikavanje $\Phi_\lambda : x \to \Phi(\lambda, x)$ zadovoljava sledeće uslove*:

1. *Za svako $\alpha \in I$ i svako $k \in N \cup \{0\}$ postoji $q_\alpha(k) > 0$ i preslikavanje $\psi(\alpha)$ skupa I u samog sebe, nezavisno od $\lambda \in \Lambda$, tako da je*:

$$|\Phi_\lambda^k x - \Phi_\lambda^k y|_\alpha \leq q_\alpha(k)\, |x - y|_{\psi(\alpha)} \text{ za svako } x, y \in E.$$

2. *Red $\sum\limits_{k \geq 0} q_\alpha(k)$ konvergira za svako $\alpha \in I$. Tada je preslikavanje $\lambda \to x_\lambda$, gde je: $x_\lambda = \Phi_\lambda(x_\lambda)$, neprekidno preslikavanje topološkog prostora Λ u E.*

Dokaz. — Na osnovu teoreme 2. iz [5] nepokretna tačka x_λ preslikavanja Φ_λ je jedinstvena i $x_\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \Phi_\lambda^n x$, pri čemu je x proizvoljan elemenat iz E. Dokažimo da važi:

$$(2) \qquad | x_\lambda - x |_\alpha \leqslant | \Phi_\lambda x - x |_{\psi(\alpha)} \sum_{k \geq 0} q_\alpha(k).$$

Imamo da je za $x_n = \Phi_\lambda^n x$:

$$| x_n - x |_\alpha \leq | x_n - x_{n-1} |_\alpha + | x_{n-1} - x_{n-2} |_\alpha + \cdots + | \Phi_\lambda x - x |_\alpha \leq$$

$$\leq q_\alpha(n-1) | \Phi_\lambda x - x |_{\psi(\alpha)} + q_\alpha(n-2) | \Phi_\lambda x - x |_{\psi(\alpha)} + \cdots + | \Phi_\lambda x - x |_{\psi(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant | \Phi_\lambda x - x |_{\psi(\alpha)} \sum_{k \geq 0} q_\alpha(k)$$

odakle, puštajući da $n \to \infty$, dobijamo nejednačinu (2). Zamenjivanjem nejednačine (1) nejednačinom (2) dobija se isti dokaz kao i u teoremi 1.

Pokažimo da je teorema 1. posledica teoreme 2. Lako je videti da je:

$$| \Phi_\lambda^n x - \Phi_\lambda^n y |_\alpha \leq q_\lambda(\alpha) \, q_\lambda[\varphi_\lambda(\alpha)] \cdot \cdots \cdot q_\lambda[\varphi_\lambda^{n-1}(\alpha)] \, | x - y |_{\varphi_\lambda^n(x)}.$$

Tada je za $n < n_\alpha$:

$$| \Phi_\lambda^n x - \Phi_\lambda^n y |_\alpha \leqslant [A(\alpha)]^n m_\alpha | x - y |_{\beta(\alpha)},$$

a za $n \geqslant n_\alpha$:

$$| \Phi_\lambda^n x - \Phi_\lambda^n y |_\alpha \leqslant [A(\alpha)]^{n_\alpha} [Q(\alpha)]^{n-n_\alpha} m_\alpha | x - y |_{\beta(\alpha)}.$$

Prema tome imamo da je:

$$q_\alpha(n) = \begin{cases} m_\alpha [A(\alpha)]^n & n < n_\alpha \\ m_\alpha [A(\alpha)]^{n_\alpha} [Q(\alpha)]^{n-n_\alpha}. & n \geqslant n_\alpha \end{cases}$$

Kako je $Q(\alpha) < 1$, to je očigledno da red $\sum_{k \geq 0} q_\lambda(k)$ konvergira. Preslikavanje $\psi(\alpha)$ je u ovom slučaj[u] $\beta(\alpha)$.

Teoremu 1. smo posebno formulisali i dokazali jer ćemo u drugom delu upravo ovu teoremu primeniti.

Birajući specijalno topološki prostor Λ dobijamo sledeću posledicu koju ćemo formulisati u obliku teoreme.

Teorema 3. *Neka je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan prostor i* $\{\Phi_\lambda\}$ *niz preslikavanja E u E tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *Za svako* $\alpha \in I$ *i svako* $k \in N \cup \{0\}$ *postoji* $q_\alpha(k) \leqslant 0$ i *preslikavanje* $\psi(\alpha)$ *skupa I u samog sebe, nezavisno od n, — tako da je:*

$$|\Phi_n^k x - \Phi_n^k y|_\alpha \leq q_\alpha(k)\,|x-y|_{\psi\alpha} \text{ za svako } x,\ y \in E.$$

2. *Red* $\sum_{k\geq 0} q_\alpha(k)$ *konvergira za svako* $\alpha \in I$.

3. *Niz preslikavanja* $\{\Phi_n\}$ *konvergira ka preslikavanju* Φ *uniformno po* $x \in E$. *Tada niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* x *gde je* $x_n = \Phi_n(x_n)$ *i* $x = \Phi_{(x)}$.

Dokaz. – Uzmimo za $\Lambda = \{1, 2, \cdots, \infty\}$ sa uobičajenom topologijom i $\Phi_\infty x = \Phi x$. Pokažimo da je:

$$|\Phi^k x - \Phi^k y|_\alpha \leqslant q_\alpha(k)\,|x-y|_{\psi(\alpha)}.$$

Za $k=1$ ovo sledi iz: $|\Phi_n x - \Phi_n y|_\alpha \leqslant q_\alpha(1)\,|x-y|_{\psi(\alpha)}$ i kad $n\to\infty$ dobijamo $|\Phi x - \Phi y|_\alpha \leqslant q_\alpha(1)\,|x-y|_{\psi(\alpha)}$. Pokažimo da $\{\Phi_n^k x\}$ konvergira ka $\Phi^k x$ kada $n\to\infty$ i k je prirodan broj. Dokaz ćemo izvesti totalnom indukcijom. Za $k=1$ to sledi iz uslova 3. ove teoreme. Pretpostavimo da za $k=p-1$ važi tvrđenje i dokažimo da ono tada važi i za $k=p$. Imamo da je:

$$|\Phi_n^p x - \Phi_n^p y|_\alpha \leqslant |\Phi_n^{p-1}(\Phi_n x) - \Phi^{p-1}(\Phi_n x)|_\alpha + |\Phi^{p-1}(\Phi_n x) - \Phi^{p-1}(\Phi x)|_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant |\Phi_n(\Phi_n^{p-1} x) - \Phi(\Phi_n^{p-1} x)|_\alpha + q_\alpha(1)\,|\Phi_n^{p-1} x - \Phi^{p-1} x|_{\psi(\alpha)}$$

Kada $n\to\infty$, tada prvi sabirak sa desne strane teži nuli zbog uniformne konvergencije niza $\{\Phi_n x\}$ a drugi na osnovu induktivne pretpostavke. Tvrđenje ove teoreme sledi sada neposredno iz teoreme 2. jer je konvergencija niza $\{\Phi_n x\}$ ka Φ_x očigledno ekvivalentna sa neprekidnošću preslikavanja $\lambda \to \Phi(x, \lambda)$ kada je skup $\Lambda = \{1, 2, \cdots ; \infty\}$ snabdeven uobičajenom topologijom. Primedba. Analognu posledicu možemo dati i za teoremu 1. Ono što je interesantno u ovom slučaju to je da ako $q_n(\alpha)$ i $\varphi_n(\alpha)$ ne zavise od n, tada je dovoljno zahtevati konvergenciju niza preslikavanja $\{\Phi_n\}$ u svakoj tački $x \in E$, a ne i uniformnu konvergenciju.

Sledeća teorema je uopštenje teoreme o $\varepsilon-$ preslikavanju iz [7].

Teorema 4. *Neka preslikavanja* T_1 *i* T_2 *zadovoljavaju pretpostavke teoreme* A, *a* q_α, n_α *i* φ, *koji odgovaraju preslikavanju* T_1, *takvi da važi uslov* 4. *teorema* B. *Ako je*:

$$|T_1 x - T_2 x|_{\beta(\alpha)} < \frac{\epsilon}{B(\alpha)_{n_\alpha - 1}} \qquad x \in M,$$

gde je
$$B(\alpha) = m_\alpha\left[\sum_{\nu=0}^{n_\alpha-1}\left(\prod_{\mu=0}^{\nu-1} q_\varphi\,\mu_{(\alpha)}\right) + \frac{\prod_{\nu=0}^{n_\alpha-1} q_\varphi{}^{\nu}(\alpha)}{1-q_{(\alpha)}}\right],$$

tada je $|x_1 - x_2|_\alpha < \epsilon$ *gde je* $x_1 = T_1 x_1$ *i* $x_2 = T_2 x_2$.

Dokaz. — Ako x_2 odaberemo za početni član u nizu $\{T_1^n x_2\}$ koji konvergira ka jedinstvenoj nepokretnoj tački preslikavanja T_1, tada koristeći nejednačinu (1) dobijamo:

$$|x_1 - x_2|_\alpha \leqslant p(\alpha) \frac{B(\alpha)}{m_\alpha} \leq m_\alpha |T_2 x_2 - T_1 x_2|_{\beta(\alpha)} \cdot \frac{(B\alpha)}{m_\alpha} \leqslant \in .$$

2. U ovom delu koristićemo rezultate i oznake rada [4]. E je kompletan lokalno konveksan prostor i $|\ |_\alpha$ $\alpha \in I$ familija seminormi koja generiše topologiju prostora E. Ako je S podskup skupa realnih brojeva, sa $\tilde{E}_S$ ćemo označavati skup svih neprekidnih preslikavanja skupa S u prostor E, koji je snabdeden topologijom indukovanom familijom seminormi:

$$|\tilde{x}|_{\alpha, B} = \sup_{t \in B} |x(t)|_\alpha$$

pri čemu $\alpha \in I$ a B prolazi svim kompaktnim podskupovima od S. Sa ovom topologijom $\tilde{E}_S$ je takođe kompletan lokalno konveksan prostor. Koristićemo se integralom iz [7].

Neka je U okolina elementa $x_0 \in E$ definisana sa $U = \{x \in E\colon |x - x_0|_{\alpha_i} \leqslant b$ $i = 1, 2, \cdots, n\}$ i $I = [t_0 - a,\ t_0 + a]$. U radu [4] B. Stanković je dokazao sledeću teoremu.

Teorema C. Pretpostavimo da $f(x, t)$ ima sledeće osobine:

1. *Neprekidna je nad $U \times I$ i preslikava $U \times I$ u E.*

2. $\sup\limits_{(x,t) \in U \times I} |f(x, t)|_{\alpha_i} \leq p < \infty$ i $= 1, 2, \cdots, n$

3. *Za svako $\alpha \in I$ postoji $k_\alpha(t) \geqslant 0$ koja je integrabilna nad I i $h' > 0$, tako da je:*

$$|f(x, t) - f(y, t)|_\alpha \geqslant k_\alpha(t) |x - y|_{\varphi(\alpha)} \quad x, y \in U, t \in I$$

$$\max\left(\int_{to-h'}^{to} k_{\varphi^n_{(\alpha)}}(t)\,dt, \int_{to}^{t_0+h'} k_{\varphi^n_{(\alpha)}}(t)\,dt\right) \leqslant q(\alpha) < 1 \quad n \geqslant n_\alpha,$$

pri čemu je φ preslikavanje skupa I u samog sebe.

4. *Za svako* $\alpha \in I$ $\sup\limits_{t \in I, n \geqslant 0} |f(x_0, t)|_{\varphi n(\alpha)} \leqslant p(\alpha)$

Pod ovim pretpostavkama postoji rešenje diferencijalne jednačine:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0$$

definisano nad $I' = [t_0 - h,\ t_0 + h]$ *gde je* $h = \min\left(a, \frac{b}{p}, h'\right)$.

5. *Ako je još i za svako* $\alpha \in I$, $\sup_{t \in I} |f[x(t), t]| \varphi n_{(\alpha)} \leqslant p(\alpha, \tilde{x}) < \infty$ *to je i jedino rešenjekoje zadovoljava i uslov*:

$$\sup_{t \in I,\, n \geq 0} |x(t) - x_0| \varphi n_{(\alpha)} \leqslant h \cdot p(\alpha, \tilde{x}).$$

Kada je U zamenjeno sa E, uslov 2. je nepotreban.

Dokazaćemo sada sledeću teoremu:

Teorema 5. *Neka je* $\wedge$ *topološki prostor*, $f(x, t, \lambda)$ *neprekidno preslikavanje topološkog proizvoda* $E \times [t_0 - a, t_0 + a]$ *u* E, *i* $\lambda \to x_0(\lambda)$ *neprekidno preslikavanje* $\wedge$ *u* E. *Neka za svako* $\lambda \in \wedge$ *preslikavanje* $f(x, t, \lambda)$ *zadovoljava sledeće uslove*:

1. *Za svako* $\alpha \in I$ *postoji* $k_\alpha(t, \lambda) \geqslant 0$, *koja je integrabilna nad* $[t_0 - a,\ t_0 + a]$, *tako da je*:

$$|f(x, t, \lambda) - f(y, t, \lambda)|_\alpha \leqslant k_\alpha(t, \lambda) |x - y)| \varphi_{\lambda(\alpha)} \quad x, y \in E, t \in I.$$

2. *Postoji* $h' > 0$, *prirodan broj* n_α *i pozitivne konstantne* $A(\alpha)$ i $Q(\alpha)$, *nezavisno od* λ, *tako da je*:

$$\text{a)} \qquad \max\left(\int_{to-h'}^{to} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)} t, \lambda)\, dt,\ \int_{to}^{to+h'} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\, dt \right) \leqslant A_{(\alpha)} \quad n < n_\alpha$$

$$\text{b)} \qquad \max\left(\int_{to-h}^{to} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\, dt,\ \int_{to}^{to+h'} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\, dt \right) \leqslant Q(\alpha) < 1, \quad n \geqslant n_\alpha.$$

3. *Za svako* $\alpha \in I$ *postoji* $\beta_{(\alpha)} \in I$ *i* $m_\alpha > 0$ *nezavisno od* λ, *tako da je*

$$|x| \varphi^n_{\lambda(\alpha)} \leqslant m_\alpha |x|_{\beta(\alpha)} \quad x \in E.$$

Tada je: $(t, \lambda) \to x(t, \lambda)$ *neprekidno preslikavanje* $[t_0 - h, t_0 + h] \times \wedge$ *u* E, *gde je* $x(t, \lambda)$ *rešenje diferencijalne jednačine*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \lambda) \quad x(t_0) = x_0(\lambda) \tag{3}$$

definisano nad $I' = [t_0 - h,\ t_0 + h]$, *gde je* $h = \min(a, h')$.

Dokaz. — Primenićemo teoremu 1. Za prostor E iz ove teoreme uzećemo $\tilde{E}_{[t_0-h,\, t+h_0]}$ a operator Φ_λ je dat sa:

$$\Phi_\lambda(\tilde{x}) = x_0(\lambda) + \int_{t_0}^{t} f[x(u), u, \lambda]\, du.$$

Jasno je da Φ_λ preslikava prostor $E_{(t_0-h,\, t_0+h)}$ u samog sebe. Kao i u teoremi C lako je pokazati da Φ_λ zadovoljava uslove 1. i 2. teoreme 1. Egzistencija rešenja $x(t, \lambda)$ diferencijalne jednačine (3) sledi iz teoreme C pri čemu interval $[t_0 - h, t_0 + h]$ ne zavisi od λ. Jasno je da je to jedino rešenje jer je, na osnovu uslova 3. ove teoreme, zadovoljen uslov 5. teoreme C. Pokažimo da je za svako $\tilde{x} \in \tilde{E}_{[t_0-h,\, t_0+h]}$ preslikavanje $\lambda \to \Phi_\lambda(\tilde{x})$ neprekidno preslikavanje prostora $\wedge$ u $\tilde{E}_{[t_0-h,\, t_0+h]}$. Imamo da je:

$$|\Phi_\lambda(\tilde{x}) - \Phi_{\lambda_0}\tilde{x})|_\alpha \leqslant |x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)|_\alpha + \sup_{|t_0-t|\leq h} \left| \int_{t_0}^{t} \left\{ f[x(u), u, \lambda] - f[x(u), u, \lambda_0] \right\} du \right. <$$

$$\leqslant |x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)|_\alpha + h \cdot \sup_{|t-t_0|\leq h} |f[x(t), t, r] - f[x(t), t, \lambda_0]|_\alpha.$$

Kako je preslikavanje $\lambda \to x_0(\lambda)$ neprekidno, prvi sabirak sa desne strane teži nuli kad $\lambda \to \lambda_0$. Dalje je preslikavanje $\{x(t)\}$ neprekidno nad $[t_0 - h, t_0 + h]$, pa je proizvod $\{x(t): |t - t_0| \leqslant h\} \times \{t: |t - t_0| \leqslant h\}$ kompaktan skup. Prema tome, kada $\lambda \to \lambda_0$, tada $|f[x(t), t, \lambda] - f[x(t), t, \lambda_0]|_\alpha \to 0$, uniformno po $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Teorema 1. tvrdi da je preslikavanje $\lambda \to \tilde{x}_\lambda = \{x(t, \lambda)\}$ neprekidno preslikavanje $\wedge$ u $\tilde{E}_{[t_0-h,\, t_0+h]}$. Na osnovu tvrđenja iz [1] (proposition 9, p. 21), gde je sada lokalno kompaktan prostor E interval $[t_0 - h, t_0 + h]$, topološki prostor E' je $\wedge$ a Hauzdorfov topološki prostor F je naš lokalno konveksan prostor E (jer je ovo pretpostavljeno još na početku ovog rada), sledi da je preslikavanje $(t, \lambda) \to x(t, \lambda)$ neprekidno preslikavanje proizvoda $[t_0 - h, t_0 + t] \times \wedge$ u E.

Primedba, Ako je preslikavanje $\lambda \to x_0(\lambda) = x_0$ konstantno preslikavanje, umesto čitavog prostora E možemo se ograničiti na okolinu $U = \{x: |x - x_0|_{\alpha_i} \leqslant b$ $i = 1, 2, \ldots, n$ a uslov 2. teoreme C zameniti uslovom: $\sup\limits_{(x, t, \lambda) \in U \times I \times \wedge} |f(x, t, \lambda)|_{\alpha i} \leqslant p < \infty$

Tada bi h bilo dato kao i u teoremi C sa $h = \min\left(a, \dfrac{b}{p}, h'\right)$.

Birajući za $\wedge = \{1, 2, \ldots; \infty\}$ možemo, u slučaju kada $k_\alpha(t, n)$ i $\varphi_n(\alpha)$ ne zavise od n, dobiti posledicu teoreme 5. Prethodno ćemo dati jednu definiciju [2].

Definicija. Neka je $\{f_n(x)\}$ niz funkcija definisanih nad topološkim prostorom F. Kažemo da niz $\{f_n(x)\}$ lokalno uniformno nad F konvergira ka $f(x)$ ako za svako $a \in F$ postoji okolina $V(a) \subset F$ tako da niz $\{f_n(x)\}$ konvergira ka $f(x)$ uniformno nad V(a).

Razumljivo, ako je topološki prostor F kompaktan, lokalno uniformna konvergencija povlači uniformnu konvergenciju. Takođe je lokalno uniformna granica niza neprekidnih funkcija neprekidna funkcija.

Teorema 6. *Neka je* $\{f_n(x, t)\}$ *niz preslikavanja definisanih i neprekidnih nad* $E \times [t_0 - a, t_0 + a]$ *sa vrednostima u* E *i za svako* $n \in N$, $f_n(x, t)$ *zadovoljava uslove* 1, 2. a i 3., *pri čemu* $k_\alpha(t, n)$ *i* $\varphi_n(\alpha)$ *ne zavise od* n. *Ako niz* $\{f_n(x, t)\}$ *konvergira ka* $f(x, t)$ *lokalno uniformno nad* $E \times [t_0 - a, t_0 + a]$, *i niz* $\{x_n\}$ $(x_n \in E)$ *konvergira ka* x, *tada i niz* $\{x_n(t)\}$ *konvergira ka* $x(t)$ *uniformno nad* $[t_0 - h, t_0 + h)$ (h *kao i u teoremi* 5), *pri čemu je* $x_n(t)$ *rešenje diferencijalne jednačine*: $\frac{dx}{dt} = f_n(x, t)\ x_n(t_0) = x_n$,

a $x(t)$ *rešenje diferencijalne jednačine*: $\frac{dx}{dt} = f(x, t)\ \ x(t) = x$.

Dokaz. — Primenićemo teoremu 5. uzimajući za $\wedge$ skup $\{1, 2, \ldots; \infty\}$: Očigledno je da je konvergencija niza $\{x_n\}$ ka x ekvivalentna sa neprekidnošću preslikavanja $\lambda \to x_0(\lambda)$. Ostaje da se proveri neprekidnost preslikavanja $(x, t, \lambda) \to f(x, t, \lambda)$ gde je $f(x, t, n) = f_n(x, t)$ i $f(x, t, \infty) = f(x, t)$. Neka uopšteni niz $(x_\beta, t\delta, \lambda_n) \to (x, t, \infty)$ (λ_n je podskup skupa prirodnih brojeva, tj. $(\lambda_n) = (n_k)_{k=1,2,}$). Tada treba pokazati da je i uopšteni niz $f_{n_k}(x_\beta, t\delta) \to t(x, t)$. Neka je dato $\varepsilon > 0$ i $\alpha \in I$. Pokažimo da postoji $n_0 \in N$, β_0 i δ_0, tako da je za $n_k \geqslant n_0$, $\beta \geqslant \beta_0$ i $\delta \geqslant \delta_0$: $|f_{n_k}(x_\beta, t_\sigma) - f(x, t)|\,\alpha \leqslant \in$. Kako niz $\{f_{n_k}(x, t)\}_{k=1,2}$. konvergira lokalno uniformno ka $f(x, t)$, to postoji okolina $V(x, t) = V'(x) \times V''(t)$, tako da niz $\{f_{n_k}(x, t)\}_{k=1,2,}$ konvergira uniformno nad $V(x, t)$ ka $f(x, t)$, tj. postoji $n_0 \in N$ tako da je $|f_{n_k}(x', t') - f(h', t')|_\alpha \leqslant \frac{\in}{2}$ za $n_k \geqslant n_0$ i sve $(x', t') \in V(x, t)$. Dalje postoji β_1 i δ_1 tako da je za $\beta \geqslant \beta_1$ i $\delta \geqslant \delta_1$, $x_\beta \in V'(x)$ i $t_\sigma \in V''(t)$. Tada je:

$$|f_{n_k}(x_\beta, t\delta) - f(x_\beta, t\delta)|\,\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je preslikavanje $f(x, t)$ neprekidno, to postoje β_2 i δ_2 tako da je za $\beta \geqslant \beta_2$ i $\delta_2 \geqslant \delta_2$: $|f(x_\beta, t_\sigma) - f(x, t)|_\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Tada je za $\beta > \beta_0 = \sup\ (\beta_1, \beta_2)$ i $\delta > \delta_0 = \sup\ (\delta_1, \delta_2)$, $n_k > n_0 |f_{n_k}(x_\beta, t\delta) - f(x, t)|_\alpha \leqslant |f_{n_k}(x_\beta, t\delta) - f(x_\beta t\delta)|_\alpha + |f_\beta, t\delta) - f(x, t)|_\alpha \leqslant \varepsilon$ što je i trebalo pokazati.

Teorema 7. *Neka su* $f_1(x, t)$ i $f_2(x, t)$ *neprekidna preslikavanja* $E \times [t_0 - a, t_0 + a]$ *u* E *koja zadovoljavaju pretpostavke teoreme C, preslikavanje* φ *koje odgovara preslikavanju* $f_1(x, t)$ *takvo da važi uslov* 4. *teoreme B. i* h_1, h_2 *određeni kao u teoremi C. za* $f_1(x, t)$ *i* $f_2(x, t)$ *respektivno. Ako je* $h_0 = \min\ (h_1, h_2)$ *i* $|f_1(x, t) - f_2(x, t)|_{\beta(\alpha_i)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2h_0 B(\alpha_i)}$, $|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}|_{\beta(\alpha_i)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2B(\alpha_i)}$ *gde je* $B(\alpha_i) = m_{\alpha_i}\left[\sum_{\nu=0}^{n\alpha_i - 0} (\prod_{\mu=0}^{\nu-1} q\varphi\mu(\alpha_i)) + \right.$

$$+\frac{\prod_{\nu=0}^{n\alpha_i-1} q\varphi^{\nu}(\alpha_i)}{1-q(\alpha_i)}\Bigg]\quad i=1,2,\cdots,n \ \textit{tada je:}\ \sup_{\substack{|t-t_0|\leq h_0\\ i=1,2,\ldots,n}} |x_1(t)-x_2(t)|_{\alpha_i}, \ \textit{pri čemu je za}\ i=1,2$$

$$\frac{dx_i(t)}{d(t)}=f_i(x_i(t),t) \qquad x_i(t)=x_0^{(i)}.$$

Dokaz. — Kao i u teoremi C može se pokazati da operatori:

$$T_1\tilde{x}=x_0^{(1)}+\int_{t_0}^{t} f_1[x(u),u]\,du$$

$$T_2\tilde{x}=x_0^{(2)}+\int_{t_0}^{t} f_2[x(u),u]\,du$$

zadovoljavaju uslove teoreme A. u prostoru $\tilde{E}_{|t_0-h,\,t_0+h|}$. Kako je:

$$|T_1\tilde{x}-T_2\tilde{x}|_{\beta(\alpha_i)}\leqslant \sup_{|t-t_0|\leq h_0}\left(|x_0^{(1)}-x_0^{(2)}|_{\beta(\alpha_i)}+h_0\,|f_1[x(t),t]-f_2[x(t),t]|\leqslant \frac{\varepsilon}{\beta(\alpha_i)\,B(\alpha)}\right.$$

to tvrđenje teoreme sledi neposredno iz teoreme 4.

LITERATURA

[1] N. Bourbaki, *Topologie generale*, chap. X, Paris, Herman, 1949.

[2] Laurent Schwartz, *Cours d'analyse*, Paris, Herman, 1969.

[3] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann, B. 111, 1935, 767—776.

[4] B. Stanković, *Dve teoreme o diferencijalnim jednačinama u lokalno konveksnim prostorima*, Glas Srpske akademije nauka i umetnosti, Odeljenje prirodno matematičkih nauka, u štampi.

[5] O. Hadžić, B. Stanković, *Some theorems on the fixed point in locally convex spaces*, Publications Inst. Math., Beograd, u štampi.

[6] А. Деляну, Г. Маринеску, *Теорема о неподвижной точке и неявных функциях в локаально выпуклых пространствах*, Revue de math. pures et appl. T VIII, № 1, 1963, 91-99.

[7] В. М. Миллионщиков, *К теории дифференциальных уравнений* $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$ *в локально выпуклых пространствах*, ДАН СССР, 131, № 3, 1960, 510-514.

Olga Hadžić

THEOREMS ON CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE FIXED POINT ON PARAMETER AND APPLICATIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS IN LOCALLY CONVEX SPACES

Summary

In this paper some theorems on continuous dependence of the fixed point on a parameter are proved. As applications, the following result was obtained.

THEOREM 5. Let Λ be a topological space, $f(x, t, \lambda)$ be a continuous mapping $E \times [t_0 - a, t_0 + a] \times \Lambda$ in E, and $\lambda \to x_0(\lambda)$ continuous mapping Λ in E. Let for every $\lambda \in \Lambda$ the mapping $f(x, t, \lambda)$ satisfy the following conditions:

1. *For every $\alpha \in I$ there exists $k_\alpha(t, \lambda)$, integrable over $[t_0 - a, t_0 + a]$, so that:*

$$|f(x, t, \lambda) - f(y, t, \lambda)|_\alpha \leq k_\alpha(t, \lambda)\,|x - y|_{\varphi_\lambda(\alpha)} \quad x, y \in E, t \in I.$$

2. *There exists $h' > 0$, natural number n_α, and positive constants $A(\alpha)$ and $Q(\alpha)$ independens of λ, so that:*

$$\text{a) } \max\left(\int_{t_0-h'}^{t_0} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\,dt, \int_{t_0}^{t_0+h'} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\,dt\right) \leq A(\alpha), \quad n < n_\alpha$$

$$\text{b) } \max\left(\int_{t_0-h'}^{t_0} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\,dt, \int_{t_0}^{t_0+h'} k\varphi^n_{\lambda(\alpha)}(t, \lambda)\,dt\right) \leq Q(\alpha) < 1, \quad n \geq n_\alpha$$

3. *For every $\alpha \in I$, there exists $\beta(\alpha) \in I$ and $m_\alpha > 0$ independent of λ, so that:*

$$|x|_{\varphi^n_\lambda(\alpha)} \leq m_\alpha\,|x|_{\beta(\alpha)} \quad x \in E$$

Then: $(t, \lambda) \to x(t, \lambda)$ is a continuous mapping $[t_0 - h, t_0 + h] \times \Lambda$ in E, where $x(t, \lambda)$ is the solution of the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \lambda) \qquad x(to) = x_0(\lambda)$$

defined in $I' = [t_0 - h, t_0 + h]$, $\qquad h = \min(a, h')$.