Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, 1 (1971)
Review of Research of Science —University of Novi Sad, 1 (1971)

Pavle Pejović

PRIBLIŽNO REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU JEDNAČINA RAZMAKA*

Formiraju se jednačine razmaka sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina. Njihova rešenja aproksimiraju rešenja datog sistema jednačina u određenom intervalu. Iz jednačina razmaka formira se sistem graničnih jednačina čija rešenja uokviruju kako rešenja datog sistema jednačina tako i rešenja jednačina razmaka u odgovarajućem intervalu.

Jednačine razmaka se formiraju tako da se mogu rešavati lako i analitički i pomoću elektronskog računara.

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y),\\
\frac{dy}{dt} &= g(t, x, y),
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

sa početnim uslovima $x(t_0)=x_0$ i $y(t_0)=y_0$, gde su $f(t, x, y)$ i $g(t, x, y)$ neprekidne funkcije kao i njihovi parcijalni izvodi po x i y ili zadovoljavaju Lipšicov uslov radi egzistencije i jedinstvenosti rešenja u oblasti

$$
|x-x_0| \le c, \qquad |y-y_0| \le c, \qquad t \in [t_0, T], \tag{2}
$$

gde je

$$
a \le f(t, x, y) \le A, \qquad b \le g(t, x, y) \le B.
$$

---

* Rad saopšten na V Kongresu matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije na Ohridu 14—19. septembra 1970. g. na sekciji za diferencijalne jednačine.

Pri tome je a najmanja a A najveća vrednost funkcije $f(t, x, y)$, b najmanja a B najveća vrednost funkcije $g(t, x, y)$ u oblasti (2). Brojni razmaci funkcija $f(t, x, y)$ i $g(t, x, y)$, prema M. Petroviću [11] glase:

$$f(t, x, y) = a + \Theta_1(A - a), \qquad g(t, x, y) = b + \Theta_2(B - b),$$

gde su $\Theta_i \in [0,1]$ $(i = 1, 2)$.

Sistem jednačina razmaka sistema (1) u oblasti (2) biće

$$\frac{dX}{dt} = a + \Theta_1(A - a), \qquad \frac{dY}{dt} = b + \Theta_2(B - b),$$

za $\Theta_i \in [0,1]$ $(i = 1, 2)$. Sistemi karakterističnih jednačina glase

$$\frac{dX_1}{dt} = a, \qquad \frac{dY_1}{dt} = b, \qquad \Theta_i = 0, (i = 1, 2),$$

i

$$\frac{dX_2}{dt} = A, \qquad \frac{dY_2}{dt} = B, \qquad \Theta_i = 1, (i = 1, 2).$$

Tada je prema Čapliginovoj [1 — 6] i Babkinovoj [7, 8] teoremi, uz pretpostavku da su uvek ispunjeni uslovi za primenu obe teoreme, za $t \in [t_0, T]$,

$$X_1(t) \leq x(t) \leq X_2(t), \qquad Y_1(t) \leq y(t) \leq Y_2(t).$$

Pošto funkcije $f(t, x, y)$ i $g(t, x, y)$ mogu imati vrlo velike varijacije, to bi razmaci a, A i b, B bili veliki, pa bi i razmaci rešenja mogli biti veoma grubi i bez interesa. Stoga je pogodnije formirati sisteme jednačina razmaka za svaku klasu sistema diferencijalnih jednačina. Mi ćemo ovde pokazati kako se formiraju sistemi jednačina razmaka za razne klase nelinearnih diferencijalnih jednačina.

Sistem diferencijalnih jednačina (1) može se napisati u obliku

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = f_{11}(t, x, y)x + f_{12}(t, x, y)y + g_1(t, x, y), \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = f_{21}(t, x, y)x + f_{22}(t, x, y)y + g_2(t, x, y). \end{cases}$$

Neka je u oblasti (2)

$$a_{11} \leq f_{11}(t, x, y) \leq A_{11}, \qquad a_{21} \leq f_{21}(t, x, y) \leq A_{21},$$

$$a_{12} \leq f_{12}(t, x, y) \leq A_{12}, \qquad a_{22} \leq f_{22}(t, x, y) \leq A_{22},$$

$$b_1 \leq g_1(t, x, y) \leq B_1, \qquad b_2 \leq g_2(t, x, y) \leq B_2.$$

Tada se dobija sistem jednačina razmaka

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = [a_{11} + \Theta_{11}(A_{11} - a_{11})]X + [a_{12} + \Theta_{12}(A_{12} - a_{12})]Y + b_1 + \Theta_1(B_1 - b_1), \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = [a_{21} + \Theta_{21}(A_{21} - a_{21})]X + [a_{22} + \Theta_{22}(A_{22} - a_{22})]Y + b_2 + \Theta_2(B_2 - b_2). \end{cases}$$

Ovaj sistem jednačina, kao i sistemi karakterističnih jednačina koji se iz njega dobijaju, linearni su. Isto tako su linearni i sistemi graničnih jednačina. Stoga se ceo postupak oko analize gornjeg sistema svodi na analizu sistema linearnih diferencijalnih jednačina [19]. U sistemu (3) funkcije $f_{ik}(t, x, y)$ i $g_i(t, x, y)$ $(i, k = 1, 2)$ mogu zavisiti samo od jedne ili dve promenljive, a mogu biti i konstante ili nedostajati.

Kako se sistem jednačina (1) može napisati u obliku (3), to je nalaženje rešenja ovakvog sistema svedeno na rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina bilo analitičkim putem bilo pomoću analognog računara. Tako se mogu brzo i lako dobiti i rešenja graničnih jednačina, na osnovu čega se odmah mogu videti razmaci rešenja i oceniti greške.

Treba istaći da je za formiranje jednačina razmaka najbolji oblik (3), jer on daje najveći broj kombinacija za formiranje sistema karakterističnih jednačina u vezi znaka rešenja. Pored toga jednačine razmaka su linearne i daju najefikasnije rezultate u pogledu tačnosti i brzine rada na računaru.

Neka je, na primer, sistem jednačina (1) oblika

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t) \cdot x^n + g_1(t, x, y), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = f_2(t) \cdot y^m + g_2(t, x, y), \end{cases}$$

sa početnim uslovima $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$, gde su n i m prirodni brojevi, čija je asimptotska rešenja proučavao M. Bertolino [12 — 15]. Neka su funkcije $f_i(t)$ i $g_i(t, x, y)$ realne i neprekidne u oblasti (2) kao i parcijalni izvodi funkcija $g_i(t, x, y)$ po x i y, ili neka zadovoljavaju Lipšicov uslov. Tada sistem (5) ima jedinstvena rešenja u oblasti (2) za napred navedene početne uslove.

Neka su

(6) $$a_i \leq f_i(t) \leq A_i, \qquad b_i < g_i(t, x, y) \leq B_i, \qquad (i = 1, 2),$$

gde su a_i i A_i respektivno najmanje i najveće vrednosti funkcija $f_i(t)$, a b_i i B_i respektivno najmanje i najveće vrednosti funkcija $g_i(t, x, y)$ u oblasti (2). Sistem jednačina razmaka sistema (5) glasi:

(7) $$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = [a_1 + \Theta_{11}(A_1 - a_1)]X^n + b_1 + \Theta_1(B_1 - b_1), \\ \\ \dfrac{dY}{dt} = [a_2 + \Theta_{22}(A_2 - a_2)]Y^m + b_2 + \Theta_2(B_2 - b_2), \end{cases}$$

gde su $\Theta_{ik} \in [0,1]$, $\Theta_i \in [0,1]$, sa početnim uslovima $X(t_0) = x(t_0) = x_0$, $Y(t_0) = = y(t_0) = y_0$.

Nalaženje sistema karakterističnih jednačina sistema (7), kao i sistema graničnih jednačina sistema (5), vrši se na isti način kao i kod sistema linearnih jednačina [19]. To znači da će izbor sistema graničnih jednačina sistema (5) zavisiti od znakova rešenja sistema (5), odnosno od znakova rešenja sistema karakterističnih jednačina (7).

Dokazaćemo sledeće slučajeve:

1^0. Za n i m *parno* a $x(t)$ i $y(t)$ ma kakvog znaka u oblasti (2) relacije (6) daju

(8) $$\begin{cases} a_1 x^n + b_1 \leq f_1(t) x^n + g_1(t, x, y) \leq A_1 x^n + B_1, \\ a_2 y^m + b_2 \leq f_2(t) y^m + g_2(t, x, y) \leq A_2 y^m + B_2. \end{cases}$$

Sistemi graničnih jednačina biće:

$$\frac{dX_{11}}{dt} = a_1 X_{11}^n + b_1, \qquad \frac{dY_{11}}{dt} = a_2 Y_{11}^m + b_2, \qquad \begin{cases} \Theta_{ik} = 0, \\ \Theta_i = 0, \\ i, k = 1, 2, \end{cases}$$

i

$$\frac{dX_{22}}{dt} = A_1 X_{22}^n + B_1, \qquad \frac{dY_{22}}{dt} = A_2 Y_{22}^m + B_2, \qquad \begin{cases} \Theta_{ik} = 1, \\ \Theta_i = 1, \\ i, k = 1, 2, \end{cases}$$

pa je, prema Čapliginovoj [1 — 6] i Babkinovoj [7, 8] teoremi, za $t_0 \leq t \leq t_1 \leq T$,

$$\begin{cases} X_{11}(t) \leq x(t) \leq X_{22}(t), \\ Y_{11}(t) \leq y(t) \leq Y_{22}(t). \end{cases} \tag{9}$$

Teorema A. — Ako je $X_{11}(t) \geqslant 0$, onda je

$$0 \leq X_{11}(t) \leq x(t) \leq X_{22}(t),$$

a ako je $X_{22}(t) \leq 0$, *onda je*

$$X_{11}(t) \leq x(t) \leq X_{22}(t) \leq 0.$$

Isto tako, ako je $Y_{11}(t) \geqslant 0$, *onda je*

$$0 \leq Y_{11}(t) \leq y(t) \leq Y_{22}(t),$$

a ako je $Y_{22}(t) \leq 0$, *onda je*

$$Y_{11}(t) \leq y(t) \leq Y_{22}(t) \leq 0.$$

2^0. Za n i m *neparno* a $x(t) \geqslant 0$ i $y(t) \geqslant 0$ u oblasti (2), prema relacijama (6), važiće opet nejednakosti (8) i (9).

3^0. Za n i m *neparno* a $x(t) \leq 0$ i $y(t) \leq 0$ u oblasti (2) relacije (6) daju

$$\begin{cases} A_1 x^n + b_1 \leq f_1(t) x^n + g_1(t, x, y) \leq a_1 x^n + B_1, \\ A_2 y^m + b_2 \leq f_2(t) y^m + g_2(t, x, y) \leq a_2 y^m + B_2. \end{cases} \tag{10}$$

Sistemi graničnih jednačina biće sada

$$\frac{dX_{21}}{dt} = A_1 X_{21}^n + b_1, \qquad \frac{dY_{21}}{dt} = A_2 Y_{21}^m + b_2, \qquad \begin{cases} \Theta_{ik} = 1, \\ \Theta_i = 0, \\ i, k = 1, 2, \end{cases}$$

i

$$\frac{dX_{12}}{dt} = a_1 X_{12}^n + B_2, \qquad \frac{dY_{12}}{dt} = a_2 Y_{12}^m + B_2, \qquad \begin{cases} \Theta_{ik} = 0, \\ \Theta_i = 1, \\ i, k = 1, 2, \end{cases}$$

pa je, prema Čapliginovoj i Babkinovoj teoremi, za $t_0 \leq t \leq t_2 \leq T$,

$$(11) \qquad \begin{cases} X_{21}(t) \leq x(t) \leq X_{12}(t), \\ Y_{21}(t) \leq y(t) \leq Y_{12}(t). \end{cases}$$

Lema A. — Ako su $X_{12}(t) \leqslant 0$ *i* $Y_{12}(t) \leqslant 0$, *onda je*

$$X_{21}(t) \leqslant x(t) \leqslant X_{12}(t) \leqslant 0,$$
$$Y_{21}(t) \leqslant y(t) \leqslant Y_{12}(t) \leqslant 0.$$

Sličnim razmatranjem kao i kod sistema linearnih jednačina [19] dobiće se razni sistemi graničnih jednačina sistema (5), za razne slučajeve parnosti odnosno neparnosti prirodnih brojeva n i m, kao i prema znacima rešenja sistema (5) odnosno prema znacima rešenja karakterističnih jednačina sistema jednačina (7).

Formiranje sistema jednačina razmaka datog sistema jednačina treba vršiti tako da se sistem može lako rešiti i to bilo analitički bilo pomoću analognog računara.

Treba napomenuti da se sistem (5) može napisati i u obliku (3), tj.

$$\frac{dx}{dt} = [f_1(t)\, x^{n-1}]x + g_{11}(t, x, y)y + g_{12}(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = g_{21}(t, x, y)x + [f_2(t) y^{m-1}]y + g_{22}(t, x, y).$$

Ako se radi o sistemu jednačina višeg reda, on se može uvek svesti na sistem jednačina prvog reda, pa se sva dosadašnja razmatranja mogu primeniti na tako dobijeni sistem.

P r i m e r — Neka je dat sistem jednačina

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ty - \cos x, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x - \sin(ty). \end{cases}$$

sa početnim uslovima $x(0) = 0$ i $y(0) = 0$, koji ima jedinstveno rešenje u oblasti

$$(13) \qquad |x| \leq 1, \qquad |y| \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq 0{,}5.$$

Ovde je, prema (13),

$$(14) \qquad \begin{cases} 0 \leq t \leq 0{,}5, & -1 \leq -\cos x \leq -0{,}5, \\ 1 = 1 = 1, & -0{,}5 \leq -\sin(tx) \leq 0{,}5, \end{cases}$$

pa će sistem jednačina razmaka biti

$$
(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 0{,}5\,\Theta_{12} Y + 0{,}5\,\Theta_1 - 1, \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = X + \Theta_2 - 0{,}5. \end{cases}
$$

Pošto je sistem (15) linearan, to je ovde

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} = A_{11} = 0, & & a_{21} = A_{21} = 1, & \\
a_{12} = 0, & A_{12} = 0{,}5, & a_{22} = A_{22} = 0, & \\
b_1 = -1, & B_1 = -0{,}5, & b_2 = -0{,}5, & B_2 = 0{,}5.
\end{array}
$$

Sistemi karakterističnih jednačina sistema (15) biće

$$
(16) \qquad \begin{cases}
\dfrac{dX_{11}}{dt} = -1, & \Theta_{12} = 0, \\[2ex]
\dfrac{dY_{11}}{dt} = X_{11} - 0{,}5, & \Theta_1 = \Theta_2 = 0; \\[2ex]
\dfrac{dX_{12}}{dt} = -0{,}5, & \Theta_{12} = 0, \\[2ex]
\dfrac{dY_{12}}{dt} = X_{12} + 0{,}5, & \Theta_1 = \Theta_2 = 1, \\[2ex]
\dfrac{dX_{21}}{dt} = 0{,}5\,Y_{21} - 1, & \Theta_{12} = 1, \\[2ex]
\dfrac{dY_{21}}{dt} = X_{21} - 0{,}5, & \Theta_1 = \Theta_2 = 0; \\[2ex]
\dfrac{dX_{22}}{dt} = 0{,}5\,Y_{22} - 0{,}5, & \Theta_{12} = 1, \\[2ex]
\dfrac{dY_{22}}{dt} = X_{22} + 0{,}5. & \Theta_1 = \Theta_2 = 1;
\end{cases}
$$

Ako bi se formirali i ostali sistemi karakterističnih jednačina sistema (15), dobili bi se sistemi iz kojih bi se videlo da je [19]

$$
(17)\qquad \begin{cases} X_1^{(1)}(t) = X_{21}(t), & Y_1^{(1)}(t) = Y_{21}(t), \\ X_1^{(2)}(t) = X_{22}(t), & Y_1^{(2)}(t) = Y_{22}(t), \\ X_2^{(1)}(t) = X_{11}(t), & Y_2^{(1)}(t) = Y_{11}(t), \\ X_2^{(2)}(t) = X_{12}(t), & Y_2^{(2)}(t) = Y_{12}(t). \end{cases}
$$

Prema tome, iz sistema karakterističnih jednačina (16) treba odrediti sistem graničnih jednačina sistema (12) i (15). Pošto je ovde $X_{12}(t) \leqslant 0$ i $Y_{12}(t) \geqslant 0$, to je

$$
X_{12}(t) \leq X_1^{(2)}(t), \quad Y_{12}(t) \leq Y_1^{(2)}(t),
$$

pa je

$$
X_{21}(t) \leq x(t) \leq X_1^{(2)}(t),
$$

$$
Y_{21}(t) \leq y(t) \leq Y_1^{(2)}(t).
$$

Kako je, prema (17), $X_1^{(2)}(t) = X_{22}(t)$ i $Y_1^{(2)}(t) = Y_{22}(t)$, to poslednje nejednakosti postaju

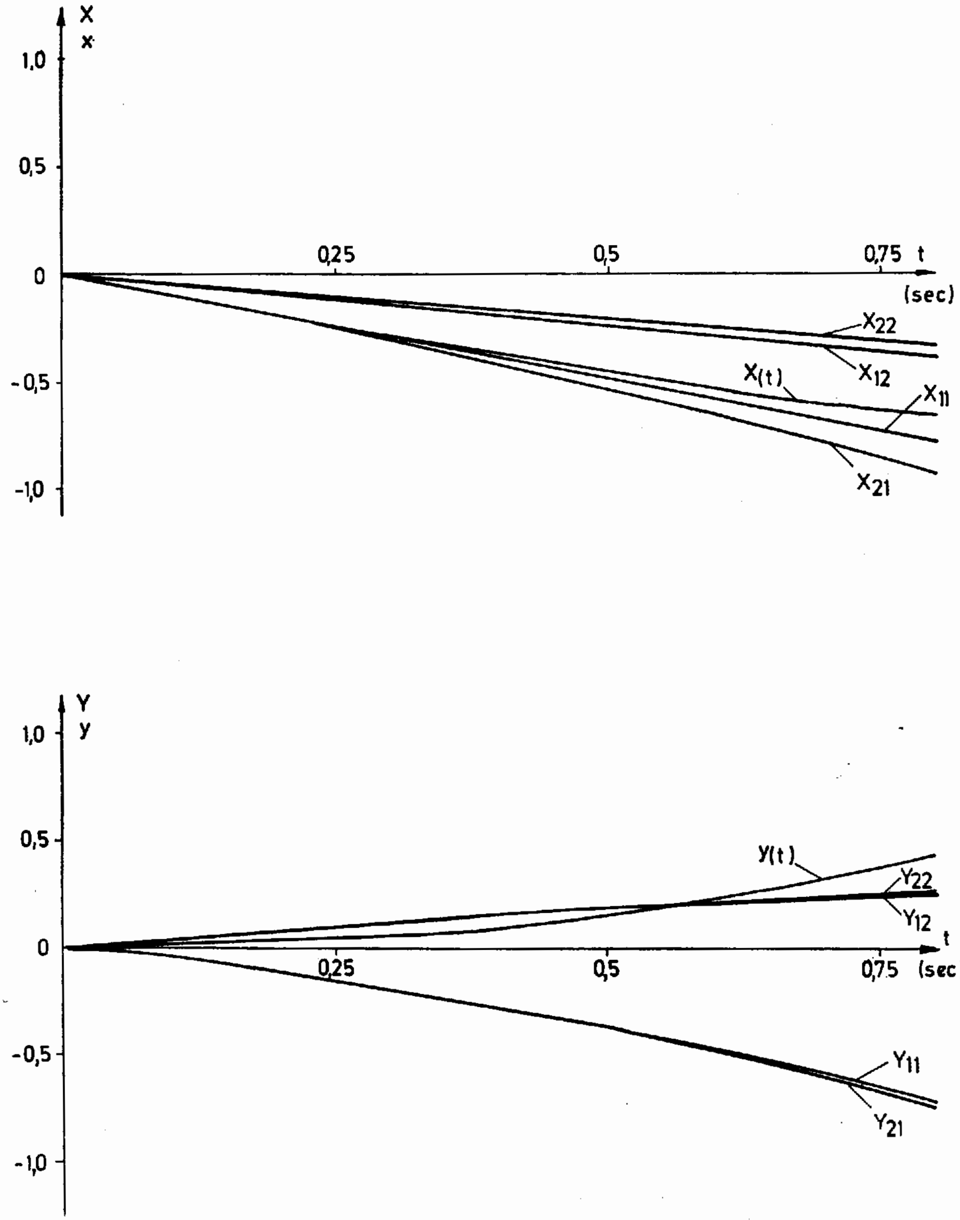
$$
(18)\qquad \begin{cases} X_{21}(t) \leq x(t) \leqq X_{22}(t), \\ Y_{21}(t) \leq y(t) \leq Y_{22}(t), \end{cases}
$$

tj. rešenja sistema (12) kao i rešenja sistema (15), za razne vrednosti brojnih parametara Θ_{12} i Θ_i $(i = 1, 2)$ iz intervala 0,1, zadovoljavaju nejednakosti (18). Kako je, prema (16), $X_{22}(t) \leq 0$, $Y_{21}(t) \leq 0$ i $Y_{22}(t) \geqslant 0$, to nejednakosti (18) postaju

$$
X_{21}(t) \leq x(t) \leq X_{22}(t) \leq 0,
$$

$$
0 \geqslant Y_{21}(t) \leq y(t) \leqslant Y_{22}(t) \geqslant 0.
$$

Ako se sistem jednačina (12) i sistemi karakterističnih jednačina (16) postave na analogni računar i snime njihova rešenja (sl. 1), vidi se da u potpunosti važe poslednje nejednakosti.


X
x
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
0,25
0,5
0,75
t
(sec)
X_{22}
X_{12}
X(t)
X_{11}
X_{21}
Y
y
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
0,25
0,5
0,75
t
(sec)
y(t)
Y_{22}
Y_{12}
Y_{11}
Y_{21}

Slika 1.

Pavle Pejović

APPROXIMATIVE SOLUTION OF THE SYSTEM OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF THE SYSTEM OF INTERVAL DIFERENTIAL EQUATIONS

Summary

Using M. Petrović's *numerical intervals*, *a system of interval differential equations* of a given system of non-linear differential equations is formed. It is shown that the solutions of the *system of interval equations* approximate the solutions of the given system of non-linear equations. From the *system of interval differential equations* two systems of *boundary equations* is derived, among the solutions of which the solutions of the given system of non-linear equations appear.

The graphical solutions of the *system of interval differential equations*, as well as the system of *boundary equations*, can be easily obtained on an analog computer, where the interval containing the solutions of the given system of non-linear differential equations, can be seen. By means of these graphs, the errors appearing when the solutions of the corresponding *system of interval equations* are substituted for the solutions of the given system of non-linear equations, can be estimated.

LITERATURA

[ ] Чаплыгин, С. А., *Основания нового сйособа йриближного инйегрирования дифференциальных уравнений*, Москва, 1919, (Собрание сочинений I, Гостехиздат, 1948, стр. 348—368).

[2] Чаплыгин, С. А., *Приближенное инйегрирование обыкновенного дифференциального уравнения йервого йорядка*, Брошюра, Издания Коммиссией артиллерийских опытов, Москва, 1920. (Собрание сочинений I, Гостехиздат, 1948, стр. 402—419).

[3] Чаплыгин, С. А., *Приближенное инйегрирование сисйемы двух дифференциальных уравнений*, Москва, (Собрание сочинений I, Гостехиздат, 1948, стр. 427—444).

[4] Чаплыгин, С. А., *Новый мейод йриближенного инйегриројания дифференциальных уравнений*. Классики естествознания, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.

[5] Лузин, Н. Н., *О мейоде йриближенного инйегрирования С. А. Чайлыгина*, Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.

[6] Лузин, Н. Н., *О мейоде йриближенного инйегрирования акад. С. А. Чайлыгина*, Успехи мат. наук, Т. VI, вып. 6 (46), Москва, 1951, стр. 3—27.

[7] Бабкин, Б. П., *Приближенное инйегрирование сисйем обыкновенных дифференциальных уравнений йервого йорядка мейодом С. А. Чайлыгина*, Известия АН СССР, сер. математическая, Т. 18, Москва, 1954, стр. 477—484.

[8] Бабкин, Б. П., *К йеореме С. А. Чайлыгина о дифференциальных неравенсйвах*, Мат. зборник, Т. 46 (88), Но. 4, Москва, 1958.

[9] Петров, Б. Н., *Граница йрименимосйи йеоремы С. А. Чайлыгина о дифференциальных неравенсйвах к линейным уравнениям с обыкновенными йроизводными вйорого йорядка*, ДАН СССР, 51, 4, Москва, 1946, стр. 251—254.

[10] Петров, Б. Н., *Нейрименимосйь йеоремы о дифференциальных неравенсйвах С. А. Чайлыгина к некойорым нелинейным уравнениям с обыкновенными йроизводными вйорого йорядка*, ДАН СССР, 51, 7, Москва, 1946, стр. 495—499.

[11] Petrović, M., *Računanje sa brojnim razmacima*, Beograd, 1932.

[12] Bertolino, M., *Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles*, Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, Bgd, 1961.

[13] Bertolino, M., *Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina*, Vesnik Društva mat. i fiz. SR Srbije, Beograd, 1963.

[14] Bertolino, M., *O maksimalnom intervalu primene Čapliginovih nejednakosti*, Mat. vesnik, 3 (18), sv. 1, 1966, Beograd.

[15] Bertolino, M., *Inégalités différentialles et l'analyse quantitative des équations différentielles ordinaires*, Ed. spéciales Inst. Math., Beograd, t. 7, Beograd, 1969.

[16] Pejović, P., *Određivanje razmaka greške približnog rešenja diferencijalne jednačine*, Mat.vesnik, 5 (20), sv. 2, 1968, Beograd.

[17] Pejović, P., *Jednačina razmaka Volterine integralne jednačine druge vrste*, Mat. vesnik, 6 (21) sv. 2, 1969, Beograd.

[18] Pejović, P., *Približno rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću jednačina razmaka*, Mat vesnik, 7 (22) sv. 1, 1970, Beograd.

[19] Pejović, P., *Približno rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina pomoću jednačina razmaka*, Matematički vesnik br. 7 (22), sv. 4.

[20] Азбелев, Н. В., *О йриближенном решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го йорядка на основе мейода С. А. Чайлыгина*, ДАН СССР, т. 83, 4, Москва 1952, стр. 517—519.

[21] Азбелев, Н. В., *О границах йрименимосйи йеоремы Чайлыгина о дифференциальных неравенсйвах*, Мат. сборник, т. 39 (81), Москва, 1956, 161—178.