Зборник радова Природно-математичког факултета—Универзитет у Новом Саду,
Књига 3 (1973)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 3 (1973)

Др Мирко Стојаковић

О ЈЕДНОЈ МЕТОДИ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ БУЛОВИХ ФУНКЦИЈА*

I — У теорији функција над коначним скупом доминирају два проблема — проблем комплетних скупова и проблем оптимизације. Подскуп A скупа свих таквих функција B комплетан је у B ако се суперпозицијом функција из A и сменом променљивих могу добити све функције из B. Јасно је да је, на пример, B комплетно у B. Али A може да се састоји и само од једне фуниције па да се ипак из те једне могу добити све остале. Проблем оптимизације састоји се у томе да се једна дата функција изрази помоћу минималног броја других функција или минималног броја променљивих. Како техника Булових функција — функција над скупом од само два члана са вредностима у том истом скупу — са своје стране доминира у модерној електронској рачунској техници, то је проблем оптимизирања Булових функција еквивалентан са проблемом тражења најекономичнијих начина за реализацију тих функција. Економичнија је она реализација која захтева мање делова (транзистора, отпорника, кондензатора, релеја, калемова, проводника итд.), него нека друга. Чињеници да у техници повезивања електричних кола главну улогу играју паралелно и серијско везивање одговора у рачуну с Буловим функцијама употреба дисјункције и коњункције поред негације у својству главних логичких конектива. Тако се при оптимизацији настоји да се поред броја променљивих свакако смањи број операција дисјункција и конјункција којима се дата функција изражава. Тако, већ у основним особинама ових конектива фигуришу идентитети с неједнаким бројем операција. Тако је $x \, V \, 1 = 1$ а $x \, V \, o = x$ док је $x.\, 1 = x$ а $x.\, 0 = 0$. Исто тако $x \, V \, x = x$, $x.\, x = x$. С десне стране у овим једнакостима стоје једноставнији изрази него с леве. И док израз $x.\, y$ реализован у серијској вези не може да се упрости, дотле израз $xVy' \, Vx'y \, V \, xy$ може да се изрази са $x \, V \, y$ а то је једноставније и реализује се једноставном паралелном везом.

II — У овом раду описаћемо један поступак за налажење најједноставнијих израза за дату функцију бивалентне логике, при чему се има сматрати једноставнијом од f она функција g која има мање променљивих а, затим, и мање конектива него f. Дисјункција и конјункција се убрајају у конективе, док се негација не узима у обрачун.

---

* Саопштено у Математичком институту (Београд) 15. јула 1972.

Нека је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функција над скупом $B = (0,1)$ са вредностима у B. Ова се функција може приказати као дисјункција конјункција промењљивих $x_1, \ldots, x_n$ или њихових негација, при чему једна промењљива не може у истој конјункцији да се јавља више пута (због $x.\, x = x$, $x.\, x' = 0$). Тако се добија пуна дисјунктивна нормална форма:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(i_1,\ldots,i_n)=1} (x_1 \,\&\, i_1) \ldots (x_n \,\&\, i_n), \tag{1}$$

где је $x \,\&\, 0 = x'$, а $x \,\&\, 1 = x$ — док се дисјункције узимају по свим и само оним изборима $i_1, \ldots, i_n$ за које је $f(i_1, \ldots, i_n) = 1$.

Израз с десне стране има онолико конјункција колико пута f узима вредност 1, а свака конјункција садржи све промењљиве x_i. Због тога се израз с десне стране у (1) и назива *пуна дисјунктивна нормална форма*. Упрошћавање се и састоји у томе да се уместо пуне напише *скраћена* нормална форма у којој број конјункција може евентуално бити и мањи од броја места на којима f има вредност 1, а те конјункције евентуално и не садрже све промењљиве. Тако у наведеном примеру пуна дисјунктивна нормална форма $xy'Vx'y\ V\ xy$ има еквивалентан скраћени облик $x\ V\ y$. У пуној форми ту има пет операција а у скраћеној само једна. У пуној сви чланови имају обе промењљиве, а у скраћеној сваки члан има само по једну промењљиву.

Од самог почетка развијања теорије над коначним скупом предлагане су разне методе за упрошћавање израза којима се функција задаје. Природан и увек могућ начин јесте да се користе алгебарске трансформације, али овај метод постаје непрегледан кад је број промењљивих већи. Чак и у наведеном примеру функције $xy'\ V\ Vx'y\ Vxy$ није унапред јасно које кораке треба предузети:

Најпре се из последња два члана извуче x пред заграду, а она изостави јер јој је вредност 1:

$$x'y\ V\ xy'V\ xy = x'y\ V\ x\,(y'\ V\ y) = x'\,y\ V\ x.$$

Затим се прва конјункција $x'y$ „измножи дисјунктивно са x" чиме се поново уводе заграде и опет изостави она чија је вредност 1:

$$x'y\ V\ x = (x'\ V\ x)\,(yVx) = xVy.$$

Овај поступак је, међутим, непрегледан кад има више промењљивих. Осим тога, нема критеријума по коме би се одмах знало да ли је и када је упрошћавање завршено.

Графичка метода нема овај недостатак. Ова метода потиче од Вена. Скице којима се тумаче својства логичких конектива називају се по њему „Венови дијаграми". Као и у неким другим случајевима погрешног приписивања ауторства, тако је и у случају Вена могуће наћи примере за употребу дијаграма у логици из много ранијих времена. Вен је свој рад објавио 1881, а Хамилтон је пре њега 1866. употребљавао дијаграме за објашњавање силогизама, с напоменом да ни ти дијаграми нису његови него их он репродукује према изворима из петог века. М. Гарднер у монографији „Logic machines and diagrams'' даје историјски преглед развитка идеја везаних за примену дијаграма у проблемима логике исказа или теорије силогизама као и реализације у виду апарата који аутоматизују проблем упрошћавања Булових функција или решавају логичке једначине.

Сам Вен навео је неке недостатке који прате графичку методу онако како ју је он конципирао: а) дијаграми се не могу тако направити да обухватају општи случај за n променљивих: б) дијаграми дају једну област у више делова; в) тешко је постићи визуелну прегледност.

У раду [1] Андерсон и Кливер покушавају да ове недостатке отклоне. Истим настојањима карактеришу се и методе Карнафа [2], Мак Класкија [4], С. Петрика [5], Квајна [3] и других.

У овом чланку биће описана нова верзија графичке методе, која опробана у настави даје боље резултате него друге методе.

Поступак се састоји у следећем:

1. — Раван (цртежа) представља универзум: функција која у читавој равни има вредност 1 и сама је једнака 1. Таква функција у пуној дисјунктивно нормалној форми ако зависи од n променљивих има свих 2^n конјункција Алгебарски се може доказати да се таква функција стварно своди на 1.

2. — Раван је даље подељена (вертикалном) правом (x_1) на два дела (сл. 1, а); сваки од ова два дела параболом (x_2) је подељен на нова два симетрична дела (сл. 1, б); сваки од ова четири дела параболом (четвртог степена) (x_3) подељен је на нова два дела (сл. 1, ц); сваки од тако добијених осам симетрично распоређених делова параболом (шестог степена) (x_4) подељен је на по два нова дела (сл. 1, д) итд. Парабола (x_n) чији је редни број n дели сваки добивен део на два дела тако да се укупно појављује 2^n делова универзума.

3. — Свака парабола (x_i) придружује се по једној променљивој x_i.

4. — Сваки од добивених делова равни представља по једну конјункцију афирмација, односно негација појединих променљивих.

5. — Дисјункција (унија) погодно изабраних конјункција и представља дату функцију: $f(x_1, \ldots, x_n)$ у првом кораку то су x_1 и x'_1, у другом то су $x'_1 x_2$, $x_1 x'_2$, $x'_1 x'_2$, $x_1 x_2$ итд.

6. — По договору, параболе уцртавамо тако да с њихове горње стране стоји афирмација, а с доње негације оне променљиве којој се та парабола придружује. Низ слика објашњава ово узастопно придруживање појединих парабола променљивама $x_1, x_2, \ldots$: (сл 1).

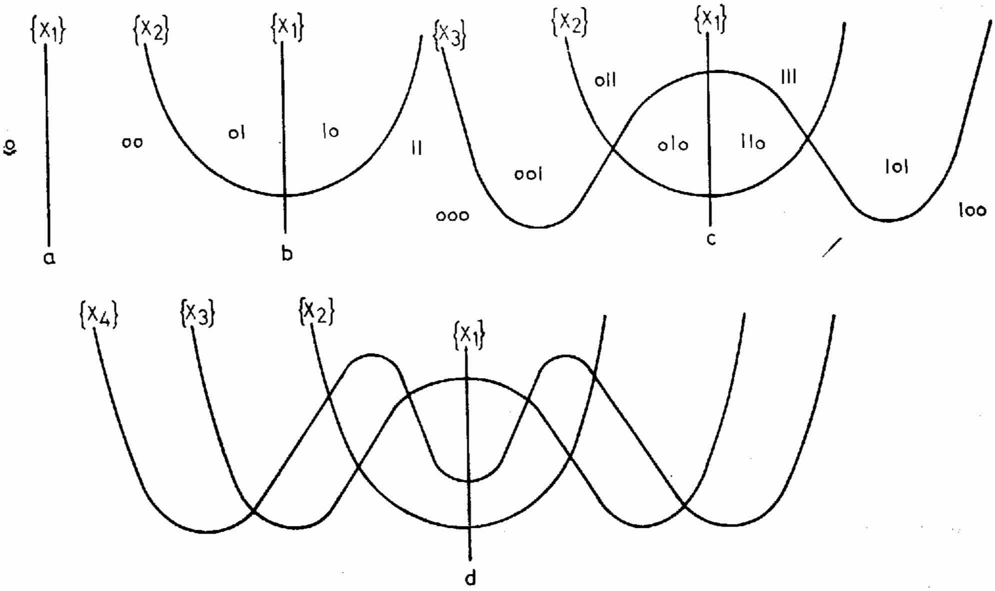
Упрошћавање дате функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ постиже се тада на следећи начин:

1. За дату функцију начини се пуна дисјунктивна нормална фрома.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(i_1, \ldots, i_n)=1} (x_1 \& i_1) \ldots (x_n \& i_n).$$

2. Раван универзума издели се на делове потребним бројем парабола, то су параболе $(x_1), \ldots, (x_n)$.

3. У издељеној равни истакну се (нумерисањем, бројањем, шрафирањем) оне конјункције које учествују у (пуној) дисјунктивној нормалној форми за дату функцију.



sl. 1

4. Истакнути делови равни стапају се у целине унијом (што одговара дисјункцији), тако да се опишу, евентуално, мањим бројем парабола него што има променљивих. Тако се и добија скраћена дисјунктивна нормална форма која репрезентује функцију $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Овако спроведено упрошћавање има неке предности над другим познатим системима. Те предности се састоје у следећем:

1. Непосредно се утврђује: који део равни представља дату конјункцију: афирмација једне променљиве лежи изнад одговарајуће параболе, а негација испод (рачунајући, рецимо, у случају кад се ради о првој променљивој x_1 „лево" као „испод" а „десно" као „изнад").

2. Целине које представљају скраћену форму непосредно се сагледавају са дијаграма. При томе не чини никакву сметњу то што се поједини делови који представљају исту коњункцију јављају раздвојени. Подсећамо да је Вен то сматрао тешким недостатком.

3. Број променљивих за које је метод применљив, и још увек визуелно прегледан, знатно је већи него код метода Карнафа, Мак Класкија и других.

4. Уз дијаграм припремљен за овај поступак лако се може сачинити и дрво бисекције („генеалошко стабло") на којем се добивени резултат може лако контролисати.

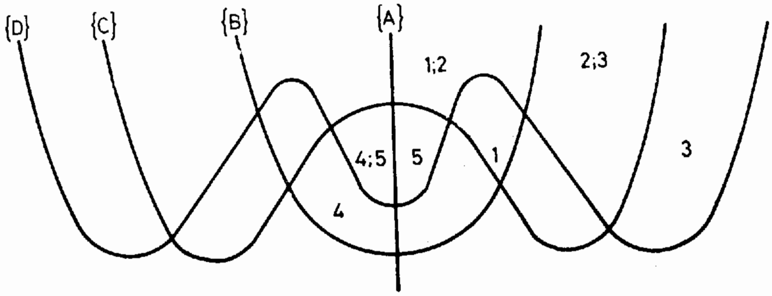
5. Лако је од провидног дезенираног целулоида начинити модел парабола и њиховим полагањем једне преко друге добити график без цртања.

III *Примери*. 1. — Упростити функцију

$$f(A, B, C, D) = ABC \vee ACD \vee AB'D \vee A'BC' \vee BC'D$$

(једноставности ради променљиве су овде означене са A, B, C, D чиме се избегава употреба индекса). Форма, у којој је овде функција дата, није пуна.

Дијаграм захтева 4 параболе — за сваку променљиву по једна. Нумеришимо конјункције редом којим су горе наведене са 1, 2, 3, 4, 5 и ове исте нумере ставимо у одговарајућа поља издељене равни (сл. 2).



sl. 2

Области у којима се налазе нумере 5; 1,2; 2,3; 3 описују се конјункцијом AD. Поља у којима се нумере 1; 1,2 описују се конјункцијом ABC. Најзад, поља у којима су нумере 4; 4,5 описују се конјункцијом $A'BC'$. И тако задата функција у скраћеној форми има облик

$$AD \vee ABC \vee A'BC'$$

Пошто прва конјункција садржи променљиву D која се не јавља у другим двема конјункцијама, тај члан се више не може утопити у неку ужу целину. За друга два члана можемо на горњем дијаграму показати да се ни та два члана даље не могу сужавати. Добивени облик је, дакле, најједноставнији у смислу који смо раније дефинисали. Број операција ту се може смањити, ако се из друга два члана извуче B:

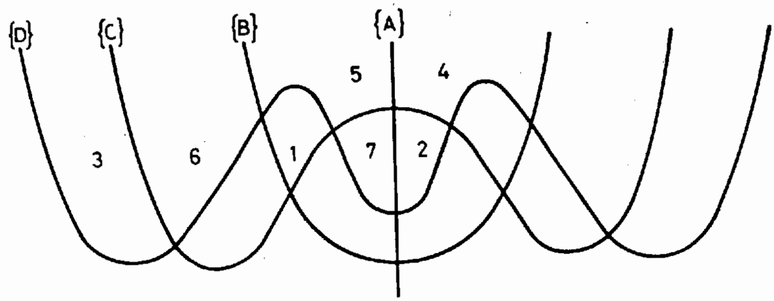
$$f(A, B, C, D) = AD \vee B(AC \vee A'C') =$$

Пример 2. — Упростити следећу функцију дату у пуној дисјунктивној нормалној форми

$$f(A, B, C, D) =$$

$$= A'BCD' \vee ABCD' \vee A'B'C'D \vee ABCD \vee A'BCD \vee A'B'CD \vee A'BC'D$$

Нумеришимо у том изразу редом конјункције бројевима од 1 до 7 и у дијаграму са четири параболе истим бројевима нумеришимо области које одговарају појединим конјункцијама (сл. 3).



sl. 3

Унија области 3, 5, 6, 7 описује се са $A'D$ а унија области 1, 2, 4, 5 са BC. Тако је упрошћени облик за ову функцију $A'D \vee BC$. Пошто добивене конјункције садрже различита слова, даље упрошћавање није могуће.

IV. Описани метод може се искористити и за друге сврхе. Једна од могућности је *извођење доказа* за теореме у исказном рачуну. Дисјунктивна нормална форма за импликацију $A \to B$ је $A'B \vee A'B' \vee AB$ за $B \to C$ на исти начин је $B'C \vee B'C' \vee B'C' \vee BC$, а за $A \to C$ имамо $A'C \vee A'C' \vee AC$. Да из прве следи трећа, уочава се на дијаграму који одговарајуће конјункције садржи као делове равни издељене са три параболе. Како су делови равни који истовремено припадају првим двема репрезентацијама функција $A \to B$ и $B \to C$ садржани у списку делова који репрезентују функцију $A \to C$, то излази импликација

$$(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$$

V. — Још једна могућност за упрошћавање Булових функција састоји се у претварању проблема реализације у инверзни проблем: упрошћавање функција треба да послужи упрошћавању реализације; али и обрнуто, упрошћавање реализације може да доведе до упрошћавања функције. Ова друга могућност у литератури није коришћена јер је у пракси циљ упрошћавања функција да се добије економична реализација, а не обрнуто.

За решавање овог обрнутог проблема треба дати најпре *канонички облик за реализацију* потпуне дисјунктивне нормалне форме функције, а онда упростити саму ову реализацију.

Свака пуна дисјунктивна нормална форма може се приказати у облику релејне схеме електричног кола на овај канонички начин:

1. Релеји са два положаја представљају променљиве: једном положају релеја x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ одговара вредност нула, а другом положају одговара вредност 1 независно променљиве x_i.

2. У коло је серијски укључен извор енергије E као и потрошач f који и представља функцију $f(x_1, \ldots, x_n)$ коју треба упростити. Кад кроз коло протиче електрицитет, функција има вредност 1; а кад је коло прекинуто, функција има вредност 0.

3. Дисјункцији две променљиве одговара паралелно везивање проводника на којима се налазе релеји за те две променљиве, а конјункцији две променљиве одговара серијско везивање проводника на којима се налазе релеји који те две променљиве представљају.

4. Један релеј прекида одједном све проводнике којих у паралелној вези има онолико колико пуна дисјунктивна нормална форма има чланова дисјункција.

5. На сваком проводнику има онолико контаката колико има независно променљивих.

6. Афирмисаној променљивој одговара затворен релеј, а негираној одговара отворен релеј. Кад релеј заузме други положај, отворена места се затварају а затворена се отварају.

Илуструјемо то следећим примером у коме постоје три независно променљиве x, y, z и 4 члана дисјункције:

Потребно је конструисати електрично коло у коме ће сваки прекидач заменити стање у потрошачу електричног кола у супротно стање — ако је потрошач добивао енергију прекидач ће је одузети, а ако је није добивао он ће је укључити („степенишни аутомат" — осветљење на степеништу искључује се и укључује са сваког од три спрата независно од стања прекидача на другим спратовима).

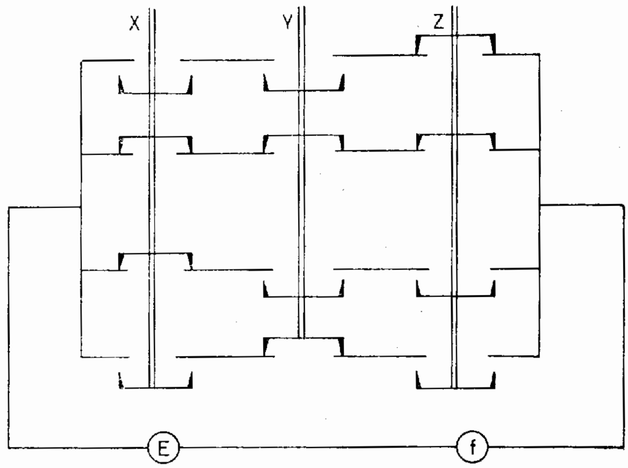
Табела вредности за потрошачку функцију $f(x, y, z)$ је

f	x	y	z
0	0	0	0
1	0	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0

У пуну дисјунктивну нормалну форму улазе само чланови који одговарају вредности 1 за потрошачку функцију:

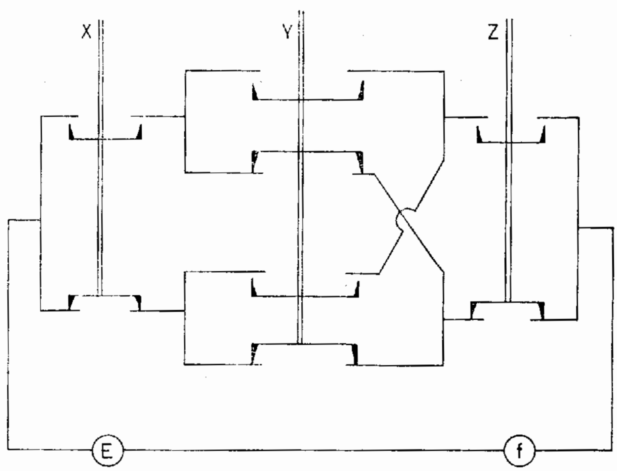
$$f(x, y, z) = x'y'z \; V \; x\,y\,z \; V x\,y'z' \; V x'\,y\,z'.$$

Постоје четири члана дисјункције, па за сваки члан предвиђамо по један проводник у паралелној вези. А како постоје три независно променљиве, то за сваку предвиђамо по један прекидач у серијској вези на сваком проводнику. Прекидач x прекида одједном везу на сва четири проводника, исто тако y и z. Реализација према томе изгледа овако:



sl. 4

Јасно је да се два проводника који се истовремено прекидају или спајају понашају као један. Тако се уместо горње схеме може усвојити следећа схема (сл. 5), у којој као што се, без анализе саме функције види, користећи непо-



sl. 5

средно схему реализације за први и трећи прекидач, могу користити само два проводника. Ово одговара алгебарској чињеници да се чланови из дисјунктивне форме могу груписати према закону дистрибуције у оне који садрже x односно $x'a$ затим у оне који садрже z односно z':

$$f(x, yz) = x(yz \, V \, y' z') \, V \, x(y'z \, V \, yz').$$

Тако се и канонична реализације функције $x'y \, v \, xy' \, v \, xy$ сама од себе упрошћава у реализацију помоћу паралелне везе за еквивалентну функцију $x V y$.

И у једном и у другом овде изложеном начину представљања функција, број независно променљивих ограничен је само практичним разлозима, али је у сваком случају, број променљивих са којима је, по нашем поступку, још увек практично лако радити далеко већи него у досада описаним поступцима.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. E. Anderson — F. L. Claever: *Venn type diagrams for arguments of n terms — Journal of sumbolic logic* — 30, No. 2 — 1965, 113—118.

[2] M. Karnaugh: *The map method for synthesis of combinatorial logic circuits* — Comunications and electronics 9/1953, 593—599.

[3] W. V. Quine: *The problem of symplifving truth functions.* Amer. math. Monthly 59 (1952), 521—531.

[4] E. J. Mc Cluskey: *Minimization of Boolean functions: Bell System* Techn. Journal 35 (1956), 1417—1444.

[5] S. R. Petrick: *A direct determination of the irredundant form of a Bolean function from the set of prime implicants* — Air force Cambridge research center 56 (1956), 56—110.

[6] M. Gardner: *Logic machines and diagrams* — (1958) — New York.

[7] J. Chinal: *Techniques Booléennes et calculateurs arithmétiques* — Paris — 1971.

[8] В. М. Глушков: *Синтез цифрових автоматов* — Москва 1962.

[9] Hao Wang: *Towards mechanical mathematics* — IBM Journal 1960.

Dr Mirko Stojaković

A METHOD OF OPTIMIZING BOOLEAN FUNCTIONS

Summary

This is an attempt to find diagrams of the Venn type for simplifying Boolean functions of any number of variables. The method developped here has the advantage of being applicable to a greater number of variables than is usually possible by the existing methods ([1], [2], [3], [4], [5]). The diagrams drawn are completely symmetric so that the scheme obtained is not onfusing to the eye as it is the case for other methods.

Let $f(x_1, \ldots, x_n)$ be a function from $(0,1)^n$ to $(0,1)$. For each variable x_i, $i = 1, \ldots, n$ we draw a curve (x_i) in the plane which is a „parabola" of even degree $2(i-1)$, $i = 1, \ldots, n$, so that

a) the curve (in fact the straight line) (x_1) is the axis of symmetry for all other curves (x_2), $\ldots$, (x_n).

b) Each curve (x_i) bisects every part of the plane previously divided by the curves (x_1), $\ldots$, (x_{i-1}).

Each part of the plane bisected by the curves (x_i), $i = 1, \ldots, n$ represents a conjunction of the variables x_i or their negations corresponding to the place in which this part is situated (on the „upper" or in the „lower" side of the curve (x_i) (. 1a, b, c, d; 2 B).

The function $f(x_1, \ldots, x_n)$ is then represented by the union of the conjunctions from the complete disjunctive normal form of that function.

The paper also proposes a method of the canonical realization of Boolean functions in terms of two position relay circuits which are convenient for the „self-simplification" of the scheme (f.4; 5).