Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, Knjiga 3 (1973)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 3 (1973)

Marija Skendžić

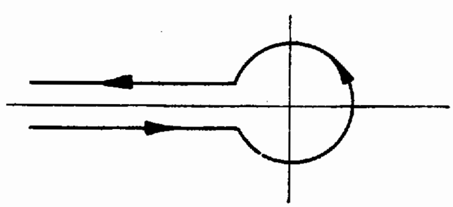
INTEGRALNA REPREZENTACIJA FUNKCIJA ZNAČAJNIH ZA OPERATORSKI RAČUN

Za operatorske funkcije operatora Mikusinskog pojmovi kao što su neprekidnost, diferencijabilnost, intergrabilnost itd. definisani su tako da oni predstavljaju proširenje istih pojmova za numeričke funkcije. Ispitivanje gore navedenih osobina operatorskih funkcija svodi se na određeni način, na ispitivanje istih osobina za numeričke funkcije dve promenljive. Za potrebe operatorskog računa pokazale su se kao korisne integralne reprezentacije dveju funkcija, koje će biti date u ovom radu. Jedna je funkcija kompleksne promenljive oblika:

$$\Phi(\beta, \alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\beta+\alpha k)}, \tag{1}$$

gde je β kompleksan broj, a $\alpha > -1$.

To je poznata Wrightova cela funkcija. Mnoge njene osobine su ispitali M. Wright [3] i B. Stanković [2]. Za ovu funkciju poznata je jedna integralna reprezentacija koju je dao sam Wright [5], ukoliko se u kompleksnoj ravni izabere kontura C kao na sl. 1.



Sl. 1.

To je kontura koja polazi od $-\infty$ na realnoj osi, obilazi koordinatni početak u pozitivnom smeru i vraća se u $-\infty$.

Wrightova funkcija (1) može se predstaviti u obliku:

$$(2) \qquad \Phi(\beta, \alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u^{-\beta} \exp(u + zu^{-\alpha})\, du$$

$u^{-\alpha}$ je glavna grana.

U teoremi 1. biće data još jedna integralna reprezentacije za Wrightovu funkciju. U teoremi 2. biće data integralna reprezentacija druge funkcije date izrazom

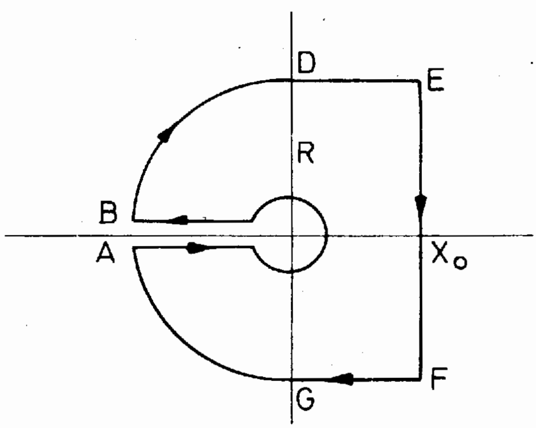
$$(3) \qquad F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+\beta)}{k!\, \Gamma(\alpha k + \gamma + 1)} \frac{t^{\alpha k + \gamma}}{z^{k+\beta}}.$$

To je numerička funkcija dve promenljive z i t, $t \geqslant 0$, $z \neq 0$ kompleksna promenljiva, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Ova reprezentacija je važna radi ispitivanja osobina ove funkcije na rubu oblasti definisanosti, što je zadatak teoreme 3.

Teorema 1. Ako je $\alpha > 0$, $\beta > 0$, za Wrightovu funkciju važi u svakom konačnom delu kompleksne ravni integralna reprezentacija

$$(4) \qquad \Phi(\beta, \alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} w^{-\beta} e^{w + zw^{-\alpha}}\, dw, \quad (x_0 > 0).$$



Sl. 2.

Dokaz. Neka je C' kontura kao na sl. 2. Unutar konture C' funkcija

$$\omega(w) = w^{-\beta} e^{w+zw^{-\alpha}}$$

je regularna, pa važi

$$\int_{C'} \omega(w)\, dw = 0.$$

Ako ovaj integral rastavimo po delovima putanje C', dobijamo

$$\int_{C_R} \omega(w)\, dw + \int_{BD} \omega(w)\, dw + \int_{DE} \omega(w)\, dw + \int_{EF} \omega(w)\, dw + \tag{5}$$

$$+ \int_{FG} \omega(w)\, dw + \int_{GA} \omega(w)\, dw = 0.$$

C_R je kontura koja polazi od A, obilazi u pozitivnom smeru koordinatni početak i vraća se do B.

Integrali $\int_{BD} \omega(w)\, dw$, $\int_{DE} \omega(w)\, dw$, $\int_{FG} \omega(w)\, dw$ i $\int_{GA} \omega(w)\, dw$ konvergiraju 0 kad $R \to \infty$.

Naime,

$$\left| \int_{BD} \omega(w)\, dw \right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| R^{-\beta} e^{-\beta \varnothing i} e^{Re^{\varnothing i} + zR^{-\alpha} e^{-\alpha \varnothing i}} Rie^{\varnothing i} \right| d\varnothing =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^{1-\beta} e^{R\cos\varnothing + |z| R^{-\alpha} \cos(-\alpha\varnothing + \arg z)}\, d\varnothing \to 0,\ R \to \infty.$$

Na isti način se pokazuje da $\int_{GA} \omega(w)\, dw \to 0$, $R \to \infty$.

U slučaju $\int\limits_{DE} \omega(w)\, dw$ imamo

$$\left| \int\limits_{DE} \omega(w)\, dw \right| \leqslant \int\limits_{0}^{x_0} \left| (x+iR)^{-\beta} e^{x+Ri+z(x+iR)^{-\alpha}} \right| dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{x_0} \left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^{-\beta} e^{x+|z|\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^{-\alpha} \cos[-\alpha \arg(x+iR)+\arg z]}\, dx,$$

pa se vidi da $\int\limits_{DE} \omega(w)\, dw \to 0$, kad $R \to \infty$, jer je $\beta > 0$.

Na isti način sledi da $\int\limits_{GF} \omega(w)\, dw \to 0$, kad $R \to \infty$.

Ako u relaciji (5) pustimo da $R \to \infty$ kontura C_R prelazi u C i relacija (5) postaje

$$\int\limits_{C} \omega(w)\, dw = \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\, \omega(x_0+iy)\, dy \qquad (C \text{ je kontura sa sl. 1.})$$

ili posle smene $w = x_0 + iy$

$$\int\limits_{C} \omega(w)\, dw = \int\limits_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} \omega(w)\, dw \tag{6}$$

iz (6) i (2) sledi tvrđenje teoreme 1.

T e o r e m a 2. Za $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ funkcija (3) $F(z, t)$ ima u oblasti $O = \left\{ t \geqslant 0,\ z \neq 0,\ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\alpha) \right\}$ integralnu reprezentaciju oblika

$$F(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} \Gamma(\beta)\, t^{\gamma} \frac{e^{w}\, w^{-(\gamma+1)}}{(z+t^{\alpha} w^{-\alpha})^{\beta}}\, dw. \tag{7}$$

Dokaz:

$$F(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(k+\beta)\,t^{\alpha k+\gamma}}{k!\,\Gamma(\alpha k+\gamma+1)\,z^{k+\beta}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{\alpha k+\gamma}}{k!\,\Gamma(\alpha k+\gamma+1)\,z^{k+\beta}}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{k+\beta-1}\,dx$$

Ako izvršimo razmenu reda graničnih procesa, tj. razmenu nesvojstvenog integrala i reda, dobijamo da je

$$F(z,t)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\beta-1}\frac{t^{\gamma}}{z^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{\alpha k}\,x^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\gamma+1)\,z^k}\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\beta-1}t^{\gamma}z^{-\beta}\,\Phi\left(\gamma+1,\ \alpha,\ -\frac{t^{\alpha}x}{z}\right)dx,$$

gde je Φ Wrightova funkcija. Na osnovu teoreme 1. možemo dalje pisati:

$$F(z,t)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\beta-1}t^{\gamma}z^{-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty}w^{-(\gamma+1)}\exp\left(w-\frac{t^{\alpha}x}{z}\,w^{-\alpha}\right)dw\,dx,$$

ili, posle razmene reda integracije, ova dva nesvojstvena integrala

$$F(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty}\Gamma(\beta)\,t^{\gamma}\,w^{-(\gamma+1)}\,e^{w}\,(z+t^{\alpha}w^{-\alpha})^{-\beta}\,dw.$$

Još ostaje da se opravdaju razmene graničnih procesa.

Da bismo opravdali razmenu graničnih procesa u slučaju reda i nesvojstvenog integrala, stavimo

(8) $$V_k(x)=\frac{(-1)^k\,t^{\alpha k+\gamma}\,e^{-x}\,x^{k+\beta-1}}{k!\,\Gamma(\alpha k+\gamma+1)\,z^{k+\beta}}\qquad k=0,1,2,\ldots$$

Lako je pokazati da važi:

a) $V_k(x)$ je neprekidna funkcija po x u svakom konačnom intervalu $[x_1, x_2]$, $0<x_1<x_2<\infty$ dok je $t\geqslant 0$ i $z\neq 0$.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)$ uniformno konvergira po x u svakom zatvorenom intervalu $[x_1, x_2]$, $0 < x_1 < x_2 < \infty$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |V_k(x)|\, dx$ konvergira, jer red (3), koji definiše $F(z, t)$ apsolutno konvergira.

Na osnovu teoreme za integraciju reda član po član, kad se radi o nesvojstvenom integralu [1] (str. 44.), iz a), b), c) sledi da je ova razmena dozvoljena.

Druga razmena graničnih procesa u slučaju dva nesvojstvena integrala dozvoljena je na osnovu teoreme za razmenu poretka integrisanja dva nesvojstvena integrala [1] (str. 54.). Proverićemo uslove a_1), b_1), c_1), d_1), koji se za ovu razmenu prema navedenoj teoremi traže.

Stavimo $w = x_0 + iy$ i označimo sa

$$H(y, x) = (x_0 + iy)^{-(\gamma+1)} x^{\beta-1} \exp\left[-x + x_0 + iy - \frac{t^\alpha x}{z}(x_0 + iy)^{-\alpha}\right]. \tag{9}$$

Tada je:

a_1) $H(y, x)$ neprekidna funkcija dve promenljive u svakoj zatvorenoj oblasti $[y_1, y_2] \times [x_1, x_2]$, $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$, $0 < x_1 < x_2 < \infty$.

b_1) $\int_0^{\infty} H(y, x)\, dx$ uniformno konvergira po y u svakom zatvorenom intervalu $[y_1, y_2]$, $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$.

Naime,

$$|H(y, x)| = \left(\sqrt{x_0^2 + y^2}\right)^{-(\gamma+1)} x^{\beta-1} \exp\left\{-x + x_0 - t^\alpha x\, Re\left[\frac{1}{z}(x_0 + iy)^{-\alpha}\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-x} x^{\beta-1} \left(\sqrt{x_0^2 + a^2}\right)^{-(\gamma+1)} e^{x_0},$$

jer je $|\arg z + \alpha \arg(x_0 + iy)| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $a = \min(|y_1|, |y_2|)$, a $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1}\, dx$ konvergira, to na osnovu Weierstrassovog stava za uniformnu konvergenciju sledi tvrđenje b_1).

c_1) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} H(y,x)\,dy$ uniformno konvergira po x u svakom zatvorenom intervalu $[x_1, x_2]$, $0<x_1<x_2<\infty$.

Naime,

$$|H(y,x)|<k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right)^{-(\gamma+1)} e^{x_0}; \quad k=\max\left(x_1^{\beta-1}, x_2^{\beta-1}\right),$$

a $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right)^{-(\gamma+1)} dy$ konvergira, pa je tvrđenje c_1) tačno.

d_1) $\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} |H(y,x)|\,dx$ konvergira.

Zaista, kako je zbog $|\arg z+\alpha\arg(x_0+iy)|\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} |H(y,x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right)^{-(\gamma+1)} e^{x_0}\left\{Re\left[1+\frac{t^\alpha}{z}(x_0+iy)^{-\alpha}\right]\right\}^{-\beta}\Gamma(\beta)\,dy$$

$$\leqslant\Gamma(\beta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_0}\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right)^{-(\gamma+1)} dy$$

i $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{x_0^2+y^2}\right)^{-(\gamma+1)} dy$ konvergira, to je i ovaj uslov ispunjen.

Time je dokazana teorema 2.

T e o r e m a 3. Za $0<\alpha\leqslant 1$, $\beta=\frac{r}{s}>0$ racionalan broj, $\gamma>0$ i $\gamma-\alpha\beta>0$, funkcija $F(z,t)$ definisana relacijom (3) ima graničnu vrednost u tačkama $(0,t)$, kada se ove tačke posmatraju kao atherentne tačke oblasti $O=\left\{(z,t),\ z\neq 0,\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}(1-\alpha),\ t\geqslant 0\right\}$.

Ta granična vrednost u tački $(0,t_0)$ je $\frac{t_0^{\gamma-\alpha\beta}\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha\beta+1)}$.

Dokaz. U oblasti $OF(z,t)$ prema teoremi 2. može se napisati u obliku

$$F(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \Gamma(\beta)\, t^{\gamma} \frac{e^w\, w^{-(\gamma+1)}}{(z + t^{\alpha} w^{-})^{\beta}}\, dw.$$

Potrebno je, dakle, pokazati da je

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ t \to t_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \Gamma(\beta)\, t^{\gamma} \frac{e^w\, w^{-(\gamma+1)}}{(z + t^{\alpha} w^{-\alpha})^{\beta}}\, dw = \frac{t_0^{\gamma - \alpha\beta}\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha\beta + 1)}.$$

Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi teoreme za razmenu limesa i integrala [1] (str. 289.). Ako stavimo $w = x_0 + iy$, $x_0 > 0$ i sa $G(z,t,y)$ označimo numeričku funkciju tri promenljive

$$G(z,t,y) = \frac{\Gamma(\beta)\, t^{\gamma}\, e^{x_0 + iy}\, (x_0 + iy)^{-(\gamma+1)}}{[z + t^{\alpha}(x_0 + iy)^{-\alpha}]^{\beta}}, \tag{10}$$

tada je prema navedenoj teoremi potrebno pokazati da

1° $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ t \to t_0}} G(z,t,y) = g(y)$ postoji uniformno po y u svakom zatvorenom intervalu $[y_1, y_2]$; $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$;

2° Integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy$ postoji;

3° $\int_{-\infty}^{\infty} G(z,t;y)\, dy$ konvergira uniformno po z i t na svakom kompaktnom delu iz oblasti O.

Evo redom tih osobina

1° $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ t \to t_0}} G(z,t,y) = \dfrac{\Gamma(\beta)\, e^{x_0 + iy}\, t_0^{\gamma - \alpha\beta}}{(x_0 + iy)^{\gamma + 1 - \alpha\beta}} = g(y).$

Da ovaj limes postoji uniformno po y, $y \in [y_1, y_2]$, sledi iz činjenice da za svako $\varepsilon > 0$ unapred dato postoji okolina $B(\varepsilon)$ tačke $(0, t_0)$ nezavisna od y, $y \in [y_1, y_2]$, tako da je

$$|G(z,t,y) - g(y)| < \varepsilon, \quad (z,t) \in B(\varepsilon) \cap 0. \tag{11}$$

Ako je $t_0 \neq 0$, $B(\varepsilon)$ se može odabrati tako da ne sadrži tačke $(z, 0)$. Kako je u O $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\alpha)$, to je u $O \cap B(\varepsilon)$ $|zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1|^\beta \geqslant 1$, pa je

$$|G(z,t,y)-g(y)| = \left|\Gamma(\beta)\, e^{x_0+iy} \frac{t^{\gamma-\alpha\beta}-t_0^{\gamma-\alpha\beta}[zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1]^\beta}{(x_0+iy)^{\gamma-\alpha\beta+1}[zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1]^\beta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma(\beta)\, e^{x_0} \frac{|t^{\gamma-\alpha\beta}-t_0^{\gamma-\alpha\beta}|+t_0^{\gamma-\alpha\beta}|[zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1]^\beta-1|}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\{e^{x_0}|t^{\gamma-\alpha\beta}-t_0^{\gamma-\alpha\beta}|+t_0^{\gamma-\alpha\beta}\left|\sum_{k=1}^{r}\left[\binom{r}{k} zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha\right]^k\right|}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}\left|\sum_{k=0}^{s-1}[zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1]^{k\beta}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(\beta)\, e^{x_0}\{|t^{\gamma-\alpha\beta}-t_0^{\gamma-\alpha\beta}|+t_0^{\gamma-\alpha\beta}\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}|zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha|^k}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(\beta)\, e^{x_0}\{|t^{\gamma-\alpha\beta}-t_0^{\gamma-\alpha\beta}|+t_0^{\gamma-\alpha\beta}\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\left[|z|\, t^{-\alpha}\sqrt{(x_0^2+a^2)^\alpha}\right]^k}{(\sqrt{x_0^2+b^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}},$$

gde je $a = \max(|y_1|, |y_2|)$, $b = \min(|y_1|\, |y_2|)$. Iz ove poslednje majoracije za (11) može se zaključiti da postoji $B(\varepsilon)$ tako da je u $B(\varepsilon) \cap O$ uslov (11) zadovoljen uniformno po y, $y \in [y_1, y_2]$.

Ako je $t_0 = 0$, okolina $B(\varepsilon)$ može sadržati tačke $(z, 0)$, ali to ne stvara nikakav problem jer je $G(z, 0, y) = 0$ a i $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ t\to 0}} G(z, t, y) = 0$.

2° Funkcija $g(y) = \dfrac{\Gamma(\beta)\, e^{x_0+iy}\, t_0^{\gamma-\alpha\beta}}{(x_0+iy)^{\gamma-\alpha\beta+1}}$ integrabilna u $-\infty < y < \infty$.

3° Uniformna konvergencija integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(z,t,y)\, dy$ na svakom kompaktnom delu oblasti O može se dokazati Weierstrassovim stavom. Kako je

$$|G(z,t,y)| = \left|\frac{\Gamma(\beta)\, t^{\gamma-\alpha\beta}\, e^{x_0+iy}}{[zt^{-\alpha}(x_0+iy)^\alpha+1]^\beta (x_0+iy)^{\gamma-\alpha\beta+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(\beta)\, t^{\gamma-\alpha\beta}\, e^{x_0}}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}} \leqslant \frac{\Gamma(\beta)\, T^{\gamma-\alpha\beta}\, e^{x_0}}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}}$$

$T = \max t$ na posmatranom podskupu od O, a $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(\sqrt{x_0^2 + y^2})^{\gamma-\alpha\beta+1}}$ konvergira,

to je uslov 3° zadovoljen.

Dakle, zadovoljeni su uslovi za razmenu limesa i nesvojstvenog integrala, pa je

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ t \to t_0}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \Gamma(\beta)\, t^{\gamma} \frac{e^{w}\, w^{-(\gamma+1)}}{(z + t^{\alpha} w^{-\alpha})^{\beta}}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} \Gamma(\beta)\, t_0^{\gamma-\alpha\beta}\, e^{w}\, w^{-(\gamma+1)+\alpha\beta}\, dw = \frac{\Gamma(\beta)\, t_0^{\gamma-\alpha\beta}}{\Gamma(\gamma - \alpha\beta + 1)}\,.$$

LITERATURA

[1] A. Ostrowski (1954), Vorlesungen über Diferential und Integralrechnung, Verlag Birkhäuser, Basel.

[2] B. Stanković (1970), On the Function of E. M. Wright, Publications de l'Institut Mathématique, Beograd. T. 10. (24).

[3] E. M. Wright (1953), On the coefficients of power series having exponential singularities, J. Lond. Math. Soc. 8. pp 71-79.

[4] E. M. Wright (1934), The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. Proc. Lond. Math. Soc. 38. pp 258-270.

[5] E. M. Wright (1940), The generalized Bessel function of order greater than one. Quart. J. Math. Oxford series 2.

Marija Skendžić

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF FUNCTIONS WHICH ARE IMPORTANT FOR THE OPERATIONAL CALCULUS

Summary

The integral forms for two functions are given. One is Wright's function (1) $\Phi(\beta, \alpha, z)$; the other is

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+\beta)\, t^{\alpha k+\gamma}}{k!\, \Gamma(\alpha k+\gamma+1)\, z^{k+\beta}} \tag{3}$$

$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $t\geqslant 0$, $z\neq 0$ complex number.

Theorem 1. If *are* $\alpha>0$, $\beta>0$ Wright's function has, in the whole complex plane, the integral form

$$\Phi(\beta, \alpha, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} w^{-\beta} e^{w+zw^{-\alpha}}\, dw, \quad x_0>0. \tag{4}$$

Theorem 2. For $0<\alpha\leqslant 1$, $\beta>0$, $\gamma>0$, the function $F(z,t)$ has in the region $O=\left\{(z, t),\ z\neq 0,\ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\alpha),\ t\in 0\right\}$ the integral form

$$F(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} \Gamma(\beta)\, t^{\gamma} \frac{e^{w}\, w^{-(\gamma+1)}}{(z+t^{\alpha} w^{-\alpha})^{\beta}}\, dw. \tag{7}$$

In theorem 3. I use the integral form for function $F(z,t)$ to obtain the limits in the points $(0, t)$ in the bound of O.

Theorem 3. For $0<\alpha\leqslant 1$, $\beta=\frac{r}{s}$ (rational number), $\gamma>0$ and $\gamma-\alpha\beta>0$ the function $F(z,t)$ has the limits in the points $(0, t)$ in the bound of region O. The limits is

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ t\to t_0}} F(z, t) = \frac{t_0^{\gamma-\alpha\beta}\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha\beta+1)}.$$

The results obtained will be used in an another paper by the author in solving a problem in Mikusinski's operator differential equations.