Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, Knjiga 3 (1973)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, Volume 3 (1973)

Dr Danica Nikolić-Despotović

UT – GRANICA U POLJU OPERATORA MIKUSIŃSKOG

Uvod

Prodor matematike u raznovrsne grane nauke zahtevao je neminovne promene u osnovnim koncepcijama klasične analize. Tako nastaju i posebne teorije *uopštenih funkcija* koje predstavljaju prirodna rešenja i rešenja matematičkih modela i u onim slučajevima kada u smislu klasične matematike takva rešenja ne postoje. Poljski matematičar Jan Mikusiński dao je 1949. godine jak analitički aparat savremene matematike poznat pod imenom operatorski račun Mikusińskog. Mnogi matematički modeli rešavaju se u okviru ove teorije, a operatori Mikusińskog su osnova i ovog rada.

Klasa C neprekidnih, kompleksnih funkcija realne, nenegativne promenljive snabdevena je strukturom komutativne algebre bez delioca nule, ako se množenjem definiše preko konačne konvolucije, a sabiranje i množenje skalarom definišemo na uobičajen način. Količničko polje ove algebre je polje operatora K Mikusińskog. U polju operatora K definisani su [4] granica, izvod i integral.

U ovom radu definisana je UT-granica konvergentnog reda operatora oblika:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}$$

gde su: s — operator diferenciranja u polju K

a_n — proizvoljan niz kompleksnih brojeva

$0 \leqslant b_0 < b_1 < \ldots < b_n \ldots$

$b_n \to \infty, \; n \to \infty$

Za definiciju UT-granice koristila sam dva poznata endomorfizma polja operatora K [2] [4]. linearne operatorske transformacije T^{-z} i U_k. Ove endomorfizme uveo je Mikusiński, a detaljnije ih je ispitao Gesztelyi. Teoreme 1 i 2 govore o egzistenciji u polju K, UT-granice konvergentnog reda operatora

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}$ i omogućuju da se rezultati klasične analize koji se odnose na konvergentne Dirichletove redove ili Risz sumabilne redove u $z=0$ direktno prenesu u operatorski račun Mikusińskog.

Skup $\mathfrak{D}$ operatora i njegovi endormofizmi

Poznato je da u polju operatora K uvek konvergira red operatora oblika:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n s}, \tag{1}$$

gde su: s — operator diferenciranja,

$\{b_n\}$ — niz pozitivnih realnih brojeva koji monotono teži beskonačnosti, $b_n \to +\infty$, $n \to \infty$,

a_n — proizvoljan niz kompleksnih brojeva.

Red (1) nazovimo, analogno terminu u klasičnoj analizi, Dirichletovim redom operatora.

Naime:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n sq(b_n) \\
&= s \sum_{n=0}^{\infty} a_n \{q(b_n t)\} \\
&= s \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n q(b_n, t) \right\} \\
&= s \left\{ \sum_{b_n \le t} a_n \right\} \\
&= s \{F(t)\};
\end{aligned} \tag{2}$$

$F(t)$ je stepenasta funkcija koja se sa n menja samo za $t \geqslant b_n$

$$F(t)=\begin{cases} 0, & -\infty<t<b_0 \\ a_0, & b_0 \leqslant t<b_1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k, & b_n \leqslant t<b_{n+1} \end{cases}$$

Obeležimo sa $\mathfrak{D}$ skup svih onih operatora iz K, koji su definisani Dirichletovim redovima operatora oblika (1).

Linearne, multiplikativne, neprekidne operatorske transformacije T^p i U_k definisane su sa:

a. $T^p f=\{e^{pt} f(t)\}$ za $f \in e$, p je kompleksan broj

$$T^p x=T^p \frac{f}{q}=\frac{T^p f}{T^p q}; \quad x=\frac{f}{q} \in K, \; f, q \in e, \; q \neq 0.$$

Ako ovako definisanu operatorsku transformaciju T^p primenimo na operator diferenciranja s, dobijamo:

$$T^p s=T^p \frac{l^2}{l^3}=\frac{\{e^{pt} t\}}{\left\{e^{pt} \frac{t^2}{2}\right\}}=\frac{\frac{1}{(s+p)^2}}{\frac{1}{(s+p)^3}}=(s+p). \tag{3}$$

b. $U_k f=\{k f(kt)\}$ za $f \in C$, k je pozitivan realan broj

$$U_k x=U_k \frac{f}{q}=\frac{U_k f}{U_k q}; \quad x=\frac{f}{q} \in K, \; f, q \in \zeta, \; q \neq 0.$$

Ako U_k primenimo na operator diferenciranja s, imamo:

$$U_k s=U_k \frac{l^2}{l^3}=\frac{\{k^2 t\}}{\left\{k \frac{k^2 t^2}{2}\right\}}=\frac{k^2\{t\}}{k^3\left\{\frac{t^2}{2}\right\}}=\frac{\{t\}}{\left\{k \frac{t^2}{2}\right\}}=\frac{l^2}{k l^3}=\frac{s}{k}. \tag{4}$$

Gesztelyi je dokazao da je:

T e o r e m a A. Za svaku neprekidnu, linearnu i multiplikativnu operatorsku transformaciju $F \neq 0$, operator $F(s)$ je logaritam. Operatorska funkcija $f(x)=F(e^{-xs})$ je rešenje početnog problema:

$$f'(x)+F(s) f(x)=0$$

$$f(0)=1$$

Stoga je $F(e^{-xs})=e^{-xF(s)}$.

Teorema B. Postoji li, u polju operatora K, granica

$$\lim_{k \to \infty} U_k x = a$$

za proizvoljan operator $x \in K$, tad je a kompleksan broj.

Operatorske transformacije T^p i U_k su neprekidne, linearne i multiplikativne [2].

Dokazaćemo najpre dve leme.

Lema 1. *Za proizvoljan kompleksan broj z, operatorska transformacija T^{-z} preslikava $\mathfrak{D}$ u $\mathfrak{D}$. Naime, T^{-z} je u odnosu na algebarsku strukturu skupa $\mathfrak{D}$, koja je indukovana iz polja operatora K, endomorfizam.*

Dokaz: Za proizvoljan kompleksan broj z, zbog neprekidnosti, linearnosti i multiplikativnosti operatorske transformacije T^{-z} sledi:

$$T^{-z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} T^{-z}(a_n e^{-sb_n}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{-z}(e^{-sb_n}) =$$

(na osnovu teoreme A) $$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n T^{-z}_s} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n(s+z)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-sb_n} \in \mathfrak{D} : c_n = a_n e^{-zb_n} \in C.$$

Lema 2. *Za proizvoljan, utvrđen broj $k \in R^+$, operatorska transformacija U_k je endomorfizam skupa $\mathfrak{D}$.*

Dokaz: Dokaz je analogan kao u lemi 1 i sledi iz neprekidnosti, linearnosti i multiplikativnosti operatorske transformacije U_k

$$U_k\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-sb_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U_k\,(a_n\, e^{-sb_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, U_k\,(e^{-sb_n}) =$$

(prema teoremi A)
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n\, Uks} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{b_n s}{k}}\right\} \in \mathfrak{D}.$$

Neka je z proizvoljan kompleksan broj, $Re\{z\} \geqslant x_0$, a $k \in R^+$, tad zbog linearnosti, neprekidnosti i multiplikativnosti transformacije $U_k\,(T^{-z})$, a na osnovu lema 1 i 2. sledi:

$$U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n s}\right)\right] = U_k\left(\sum_{u=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n\,(s+z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U_k\,(a_n\, e^{-b_n\,(s+z)}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\left(\frac{s}{k}+z\right)b_n}.$$

UT-granica

Definicija 1. *Ako u polju operatora K, postoji granica:*

$$\lim_{k\to\infty} U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-sb_n}\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\left(\frac{s}{k}+z\right)b_n},$$

tu granicu nazvaćemo UT-granicom Dirichletovog reda operatora (1) *za dato z.*

Na osnovu (2) je:

$$U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-sb_n}\right)\right] = U_k\,[T^{-z}\,(s\,\{F\,(t)\})] \tag{5}$$

$$= U_k\,(T^{-z}\, s)\, U_k\, T^{-z}\,\{F\,(t)\} \quad = \text{ prema (3)}$$

$$= U_k\,(s+z)\, U_k\, T^{-z}\,\{F\} \quad = \text{ prema (4)}$$

$$= \left(\frac{s}{k} + z\right) U_k\,(T^{-z}\,\{F\})$$

Na osnovu definicije 1, relacije (5) i teoreme B, sledi:

Ako u polju operatora K, postoji granična vrednost UT-granica, Dirichletovog reda operatora (1) ona je jednaka:

$$\lim_{k\to\infty} U_k \left[T^{-z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} \right) \right] = z \lim_{k\to\infty} U_k T^{-z} \{F\} = a(z).$$

T e o r e m a 1: *Ako Dirichletov red oblika*:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n z} \tag{6}$$

$$0 \leqslant b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \quad b_n \to \infty, \quad n \to \infty$$

konvergira za $Re\{z\} > \sigma \geqslant 0$, *u klasičnom smislu, tada za svako takvo* z *u polju operatora* K, *postoji UT-granica*:

$$\lim_{k\to\infty} U_k \left[T^{-z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} \right) \right] = \text{UT-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{s}{k}+z\right) b_n}$$

i važi:

$$\lim_{k\to\infty} U_k \left[T^{-z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n z}$$

$$= \left\{ z \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t)\, dt \right\}.$$

D o k a z: Ako Dirichletov red (6), za $Re\{z\} > \sigma \geqslant 0$ konvergira, u klasičnom smislu, on se tada može, kao što je poznato [1] prikazati u obliku:

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t)\, dt \qquad Re\{z\} > \sigma \geqslant 0,$$

σ je apscisa konvergencije Dirichletovog reda (6).

Odnosno:

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \mathcal{L}\{F(t)\} \qquad Re\{z\} > \sigma \geqslant 0,$$

gde je $F(t) = \sum a_n$; $F(t)$ je stepenasta funkcija koja se sa n menja samo za $t \geqslant b_n$.

Kako postoji $\mathcal{L}\{F(t)\}$ za $Re\{z\} > \sigma \geqslant 0$, to će na osnovu teoreme Gesztelyia [2] postojati u polju operatora K, za $Re\{z\} > 0$ i

$$\lim_{k\to\infty} U_k(T^{-z}\{F\}) \text{ i on je jednak sa } \mathcal{L}\{F(t)\},$$

tj.

$$\lim_{k\to\infty} U_k(T^{-z}\{F\}) = \mathcal{L}\{F(t)\} \quad Re\{z\} > \sigma \geqslant 0.$$

Naime, za $Re\{z\} > 0$ je:

$$U_k(T^{-z}\{F\}) = \{ke^{-ktz}F(kt)\}.$$

Tada je $\frac{1}{s^2} U_k(T^{-z}\{F\}) = l^2\{ke^{-ktz}F(kt)\}$.

Sada je lako pokazati da niz neprekidnih funkcija $\frac{1}{s^2} U_k(T^{-z}\{F\})$ uniformno konvergira u intervalu $t \in [0, T]$ funkciji $\left\{t\int_0^t e^{-zx}F(x)\,dx\right\}$ za $Re\{z\} > 0$. [2].

Primer: Neka je $\{b_n\}$ pozitivan, monotono rastući niz brojeva, $b_n \to \infty$, $n \to \infty$, koji zadovoljava sledeće uslove:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty \qquad b_{n+1} - b_n > \delta \geqslant 0.$$

Tada red:

$$\Psi(z) = 1 + a_1 e^{-b_1 z} + a_2 e^{-b_2 z} + \ldots \tag{7}$$

sa koeficijentima

$$a_n = -1/e \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - b_n} \exp\left(-\frac{b_n}{b_k}\right)$$

konvergira apsolutno za sve kompleksne vrednosti z i uniformno za $Re\{z\} \geqslant x_0$. Na osnovu teoreme 1 red (7) konvergira i u polju operatora K, odnosno za sve kompleksne vrednosti z postoji UT-granica:

$$\lim_{k \to \infty} U_k \left[T^{-z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-zb_n}.$$

Red (7) dobijamo koristeći niz $\{\Psi_k\}$ *Hirschman-Widderovih* [4] funkcija oblika:

$$\{\Psi_k(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{b_1}{s+b_1} \cdots \frac{b_k}{s+b_k} = \{1 + a_{k_1} e^{-b_1 t} + \ldots + a_{kk}^{-b_k t}\}$$

$\Psi_k(t)$ raste dok $0 \leqslant t < \infty$ i to $0 \leqslant \Psi_k(t) \leqslant 1$.

Teorema 1 omogućuje da se rezultati klasične analize koji se odnose na konvergentne Dirichletove redove, mogu direktno preneti u operatorski račun Mikusińskog. Mogu se vršiti i dalja uopštavanja.

Naime, sa $k \in Z^+$ je:

$$q(b_n) = s^k q_k(b_n) = s^k \{q_k(b_n, t)\} = s^k \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < b_n \\ \dfrac{(t-b_n)^k}{k!} & b_n \leqslant t \end{cases}.$$

Naravno, ovo se može generalizirati i kada k nije ceo pozitivan broj, naime za $k \in R^+$ je:

$$q(b_n) = s^k \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \leqslant t < b_n \\ \dfrac{(t-b_n)^k}{\Gamma(k+1)} & b_n \leqslant t \end{matrix} \right\} = s^k q_k(b_n).$$

Zato, ako $k \in R^+$ je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n} = s\{F(t)\} = \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \left\{ \sum_{b_n \leqslant t} (t-b_n)^k a_n \right\}, \tag{8}$$

$$= \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \{F^{(k)}(t)\}$$

gde je:

$$F^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t-b_n)^k a_n$$

konvergentan red u polju operatora K, i važi:

$$F^{(k)}(t)=\frac{\Gamma(k+1)}{s^k}\{F(t)\}=\Gamma(k+1)\left\{\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\right\}\{F(t)\}=k\{t^{k-1}\}\{F(t)\}.$$

Stoga je:

$$F^{(k)}(t)=k\int_0^t (t-u)^{k-1}F(u)\,du;\ k\in R^+.$$

Kada, Dirichletov red (6) za $Re\{z\}>\sigma\geqslant 0$ konvergira, tada postoji UT-granica za sve one kompleksne vrednosti z za koje je $Re\{z\}>\sigma\geqslant 0$ i važi za $k\in R^+$

$$\lim_{m\to\infty} U_m\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)\right]=\lim_{m\to\infty} U_m\left[T^{-z}\left(\frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\{F^{(k)}(t)\}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+1)}\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{s}{m}+z\right)^{k+1} U_m\left[T^{-z}(\{F^{(k)}(t)\})\right]\right\}=$$

$$=\left\{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\int_0^{\infty} e^{-zt}F^{(k)}(t)\,dt\right\}.$$

Rieszova sumabilnost Dirichletovog reda u $z=0$, u oznaci (R,b,k) sumabilnost, igra u teoriji Dirichletovih redova istu fundamentalnu ulogu kao i $\mathscr{L}^{(k)}\{F\}$ — uopštena Laplaceova transformacija k-tog reda [1]. Zato, na osnovu teoreme [2] Gesztelyi-a koja se odnosi na $\mathscr{L}^{(k)}\{F\}$, neposredno sledi da važi:

T e o r e m a 2. *Ako Dirichletov red* (6) *ne konvergira, ali je* (R,b,k) *sumabilan u tački* $z=0$, $k>0$, *tad za svako* $z\in S_z\left(0,\ \Psi<\frac{\pi}{2}\right)$ *postoji, u polju operatora* K, *UT-granica konvergentnog reda operatora* (1), *gde su* a_n *i* b_n *koeficijenti* (R,b,k) *sumabilnog reda, i važi*:

$$\lim_{m\to\infty} U_m\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)\right]=\lim_{m\to\infty} U_m\left[T^{-z}\left(\frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\{F^{(k)}(t)\}\right)\right]=$$

$$=\left\{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)}\int_0^{\infty} e^{-zt}F^{(k)}(t)\,dt\right\},$$

gde je:

$$F^{(k)}(t) = \sum_{b_n \leqslant t} a_n (t - b_n)^k.$$

Na osnovu teoreme 2, rezultati klasične analize koji se odnose na Dirichletove redove (R, b, k) sumabilne u tački $z = 0$, mogu se preneti u operatorski račun odnosno na UT-granicu.

REFERENCE

[1] G. Doetsch: Handbuch der Laplace Transformation I, Basel, (1950 — 1956).

[2] E. Gesztelyi: Uber lineare Operatortransformationen, Publ. Math. Debrecen, 14 (1967) 169-206.

[3] E. Gesztelyi: The application of the operational calculus in the theory of numbers, Coll. Math. Soc. J. Boly i 2 Debrecen (1968).

[4] J. Mikusiński: Operational Calculus, Pergamen Press (1959).

Dr Danica Nikolić-Despotović

UT-LIMIT IN THE OPERATOR FIELD MIKUSIŃSKI

Summary

The class e of continuous complex-valued functions, of non-negative real variable forms, a commutative algebre without zero divisors where the product is defined as the finite convolution and the sums and scalar products are defined in the usual way. The quotient field of this algebra is the operator field K of Mikusiński. In this operator field the limit, differentiation and in'egration are defined. The UT-limit of convergent series operators is defined in this paper. The series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}$$

where: s is the differential operator in the operator field K

a_n is the sequence of complex numbers

$0 < b_0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots$

$b_n \to +\infty,\ n \to \infty$ is always convergent.

For the definition of the UT-limit, I shall use two linear, continuous transformations T^{-z} and U_k of the operator field K.

The following theorems are proved:

Theorem 1: If a Dirichlet series:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-zb_n}$$

converges, in the classical sense, for $Rez > \sigma \geqslant 0$, then for each z, in the operator field K, the limit UT of convergent series operators $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}$ exists, in the following form:

$$\text{UT-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{s}{k}+z\right)b_n} = \lim_{k\to\infty} U_k T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)$$

and the following holds:

$$\lim_{k\to\infty} U_k\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-b_n z} = \left\{z\int_0^{\infty} e^{-zt} F(t)\,dt\right\}$$

Theorem 2: If a Dirichlet series is (R, b, k) $k > 0$, Riesz summable in $z=0$, then for each $z \in S_z\left(0, \Psi < \frac{\pi}{2}\right)$ in the operator field K, the UT-limit of convergent series operators $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}$ exists, and the following holds:

$$\lim_{m\to\infty} U_m\left[T^{-z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sb_n}\right)\right] = \left\{\frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^{\infty} e^{-zt} F^{(k)}(t)\,dt\right\}$$

where

$$F_{(t)}^{(k)} = \sum_{b_n < t} a_n (t-b_n)^k, \qquad k>0.$$