Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, Knjiga 3 (1973)
Review of Research of Science.— University of Novi Sad, Volume 3 (1973)

Dr Olga Hadžić

GENERALIZACIJA JEDNE TEOREME G. MARINESCUA

U [2] Henri Cartan je dokazao sledeću teoremu:

Teorema: *Neka je $B(a, r)$ otvorena lopta sa centrom u a i poluprečnikom r u Banahovom prostoru E i neka je f neprekidno preslikavanje skupa $B(a, r)$ u skup E, tako da je preslikavanje $\tilde{f}(x) = x - f(x)$ kontraktivno sa konstantom k. Neka je $f(a) = b$. Tada postoji otvoren skup V koji sadrži a, sadržan u $B(a, r)$, tako da je f homeomorfizam skupa V na $B(b, (1-k)r)$, recipročno preslikavanje $g = f^{-1}$ skupa $B(b, (1-k)r)$ u skup $B(a, r)$ je Lipschitzovo sa konstantom $1/1-k$.*

G. Marinescu je u [1] uopštio ovu teoremu kada je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan vektorsko topološki prostor. Teorema koju ćemo dokazati je dalje uopštenje teoreme Cartana, koje kao specijalan slučaj sadrži teoremu G. Marinescua:

Teorema: *Neka je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan vektorsko topološki prostor, $|\ |_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ familija seminormi koja generiše topologiju u E, φ preslikavanje skupa $\mathcal{A}$ u samog sebe, $k(\alpha)$ preslikavanje skupa $\mathcal{A}$ u skup N prirodnih brojeva i $b(\alpha)$ preslikavanje skupa $\mathcal{A}$ u skup R^+ pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavimo da za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ postoji $m(\alpha) \in R^+$ i $\beta(\alpha) \in \mathcal{A}$ tako da važi nejednačina:*

$$|x|_{\varphi^{k(\alpha)}} \leqslant m(\alpha)\, |x|_{\beta(\alpha)}$$

za svako $x \in E$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Neka je dalje:

$$M = \left\{x \in E,\ |x - x_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}} \leqslant b\left[\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}\right] \text{ za sve } \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

i f neprekidno preslikavanje skupa M u skup E pri čemu preslikavanje $\tilde{f}(x) = x - f(x)$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) *za svako $\alpha \in \mathcal{A}$ postoji q_α, tako da je*

$$|\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2)|_\alpha \leqslant q_\alpha\, |x_1 - x_2|_{\varphi(\alpha)}$$

za sve $x_1, x_2 \in M$,

(ii) $$q_{\varphi^{k(\alpha)}} \leqslant q(\alpha) < 1, \text{ za sve } k \geqslant k(\alpha).$$

Tada postoji neprekidno preslikavanje g skupa

$$M' = \left\{ y \in E,\ |y - f(x_0)|_{\beta(\alpha)} \leqslant \frac{1 - q(\alpha)}{m(\alpha)} b\left[\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}\right] \text{ za sve } \alpha \in \mathscr{A} \right\}$$

u skup M *tako da je* $f[g(h)] = x$ *za sve* x *iz skupa* M *i* $g[f(y)] = y$, *za sve* $y \in g(M)$ *i važi nejednačina:*

$$|g(y_1) - g(y_2)|_\alpha \leqslant m(\alpha)\, |y_1 - y_2|_{\beta(\alpha)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{k(\alpha)} q_{\varphi^{\nu}(\alpha)} + \frac{\prod_{\nu=0}^{k(\alpha)-1} q_{\varphi^{\nu}(\alpha)}}{1 - q(\alpha)} \right\}.$$

Dokaz: Neka je $y \in M'$. Pokažimo da postoji jedno i samo jedno $x \in M$ tako da je $f(x) = y$, odnosno $x = y + \tilde{f}(x)$. Formiraćemo niz $\{x_n\}$, x_0 iz formulacije teoreme, $x_{n+1} = y + \tilde{f}(x_n)$. Pokazaćemo da za svaki prirodan broj n, $x_n \in M$. Imamo da je:

$$|x_1 - x_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}} = |y - y_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}} \leqslant m(\alpha)\, |y - y_0|_{\beta(\alpha)} \leqslant b\left[\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}\right],$$

pa dakle $x_1 \in M$.

Dokazaćemo indukcijom da važi nejednakost:

$$|x_n - x_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}} \leqslant \frac{1 - q^n(\alpha)}{1 - q(\alpha)} m(\alpha)\, |y - y_0|_{\beta(\alpha)},$$

odakle sledi da je $x_n \in M$, za svako $n \in N$. Za svako $n \in N$ je

$$|x_{n+1} - x_n|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}} \leqslant q_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\, |x_n - x_{n-1}|_{\varphi^{k(\alpha)+1}_{(\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant q_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\, q_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)+1}}\, |x_{n-1} - x_{n-2}|_{\varphi^{k(\alpha)+2}_{(\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant q^n(\alpha)\, |x_1 - x_0|_{\varphi^{k(\alpha)+n}_{(\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant q^n(\alpha)\, m(\alpha)\, |y - y_0|_{\beta(\alpha)}$$

Koristeći ovo, imamo da je:

$$|x_{n+1}-x_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\leqslant|x_{n+1}-x_n|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}+|x_n-x_0|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[q^n(\alpha)+\frac{1-q^n(\alpha)}{1-q(\alpha)}\right]m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}=$$

$$=\left[\frac{1-q^{n+1}(\alpha)}{1-q(\alpha)}\right]m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)},$$

čime je dokazana ispravnost nejednakosti (1).

Pokažimo da je iz $\{x_n\}$ Košijev. Imamo da je za $n\geqslant k(\alpha)$:

$$|x_{n+p}-x_n|_\alpha\leqslant q_\alpha|x_{n+p-1}-x_{n-1}|_{\varphi(\alpha)}\leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)}|x_{n+p-2}-x_{n-2}|_{\varphi^2(\alpha)}\leqslant$$

$$\leqslant\ldots\leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)}\ldots q_{\varphi^{k(\alpha)-1}_{(\alpha)}}|x_{n+p-k(\alpha)}-x_{n-k(\alpha)}|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}.$$

Koristeći nejednačinu trougla dobijamo:

$$|x_{n+p-k(\alpha)}-x_{n-k(\alpha)}|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\leqslant|x_{n+p-k(\alpha)}-x_{n+p-k(\alpha)-1}|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}+$$

$$+|x_{n+p-k(\alpha)-1}-x_{n+p-k(\alpha)-2}|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}+\ldots+|x_{n-k(\alpha)+1}-x_{n-k(\alpha)}|_{\varphi^{k(\alpha)}_{(\alpha)}}\leqslant$$

$$\leqslant[q(\alpha)]^{n+p-k(\alpha)-1}m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}+[q(\alpha)]^{n+p-k(\alpha)-2}\times$$

$$\times\, m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}+\ldots+[q(\alpha)]^{n-k(\alpha)}m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}\leqslant$$

$$\leqslant m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}\{[q(\alpha)]^{n-k(\alpha)}+\ldots+[q(\alpha)]^{n-k(\alpha)+p-1}\}.$$

Prema tome je:

(2)
$$|x_{n+p}-x_n|_\alpha\leqslant q_\alpha\, q_{\varphi(\alpha)}\ldots q_{\varphi^{k(\alpha)-1}}\, m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}\times$$

$$\times\{[q(\alpha)]^{n-k(\alpha)}+\ldots+[q(\alpha)]^{n-k(\alpha)+p-1}\}\leqslant$$

$$\leqslant m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)}\frac{\prod_{\nu=0}^{k(\alpha)-1}q_{\varphi^\nu(\alpha)}}{p^{k(\alpha)}_{(\varphi)}}\{[q(\alpha)]^n+\ldots+[q(\alpha)]^{n+p-2}\}.$$

Odavde se jasno vidi da je x_n jedan Košijev niz. Neka je $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Tada je $x'=y+\tilde{f}(x')$. Pokazaćemo da je to i jedino rešenje. Neka je $x'=y+\tilde{f}(x')$. Tada je:

$$|x-x'|_{\alpha}=|f(x)-f(x')|_{\alpha}\leqslant q_{\alpha}|x-x'|_{\varphi(\alpha)}\leqslant$$

$$\leqslant q_{\alpha}q_{\varphi(\alpha)}|x-x'|_{\varphi^2(\alpha)}\leqslant\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{\nu=0}^{k(\alpha)-1}q_{\varphi^{\nu}(\alpha)}[q(\alpha)]^n m(\alpha)|x-x'|_{\beta(\alpha)}.$$

Preslikavanje g definisano je kao $g(y)=x=y+\tilde{f}(x)$.

Pokazaćemo da je preslikavanje g neprekidno. Neka je $y_1, y_2\in M'$. Tada je

$$g(y_1)=\lim_{n\to\infty}x_n \text{ gde je } x_{n+1}=y_1+\tilde{f}(x_n) \text{ i } g(y_2)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n',\ x_{n+1}'=y_2+\tilde{f}(x_n'),\ x_0=x_0'.$$

Tada je:

$$|x_1-x_1'|_{\alpha}=|y_1+\tilde{f}(x_0)-y_2-\tilde{f}(x_0)|_{\alpha}=|y_1-y_2|_{\alpha}$$

$$|x_2-x_2'|_{\alpha}=|y_1+\tilde{f}(x_1)-y_2-\tilde{f}(x_1')|_{\alpha}\leqslant|y_1-y_2|_{\alpha}+$$

$$+q_{\alpha}|x_1-x_1'|_{\varphi(\alpha)}\leqslant|y_1-y_2|_{\alpha}+q_{\alpha}|y_1-y_2|_{\varphi(\alpha)}.$$

Lako je videti da važi za svaki prirodni broj n:

$$|x_n-x_n'|_{\alpha}\leqslant|y_1-y_2|_{\alpha}+q_{\alpha}|y_1-y_2|_{\varphi(\alpha)}+\ldots+$$

$$\prod_{\nu=0}^{n-2}q_{\varphi^{\nu}(\alpha)}|y_1-y_2|_{\varphi^{n-1}(\alpha)}\leqslant\left[1+q_{\alpha}+\ldots+\prod_{\nu=0}^{n-2}q_{\varphi^{\nu}(\alpha)}\right]\times$$

$$\times m(\alpha)|y_1-y_2|_{\beta(\alpha)}$$

i kad $n\to\infty$ dobijamo ocenu za $|g(y_1)-g(y_2)|_{\alpha}$ iz teoreme. Ako u (2) pustimo da $p\to\infty$, dobijamo:

$$|x-x_n|_{\alpha}\leqslant\frac{\prod_{\nu=0}^{k(\alpha)-1}q_{\varphi^{\nu}(\alpha)}[q(\alpha)]^n}{q_{(\alpha)}^{k(\alpha)}}m(\alpha)|y-y_0|_{\beta(\alpha)} \text{ za } n\geqslant k(\alpha).$$

Rezultat Marinescua dobijamo kada je $k(\alpha)=1$, $m(\alpha)=1$, $\beta(\alpha)=\varphi(\alpha)$ za svako $\alpha\in\mathscr{A}$.

LITERATURA

[1] G. Marinescu, Theoremes de contractions dans les espaces localement convexes, Rev. Roum. math. pures et appl. tome XIV, No 3, p. 1535 – 1538, (1969)

[2] H. Cartan, Calcul differentiel, Herman, Paris (1967)

[3] O. Hadžić, B. Stanković, Some theoremes on the fixed point in locally convex spaces, Publications Ins. Math. Beograd (1970)

Dr Olga Hadžić

GENERALIZATION OF A THEOREM OF G. MARINESCU

Summary

In this paper we generalized a theorem of G. Marinescu on the existence of inverse mapping f^{-1} in the locally convex spaces.