Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 4 (1974)
Review of Research of Science-University of Novi Sad, Volume 4 (1974)

Dr Olga Hadžić

EGZISTENCIJA IMPLICITNE FUNKCIJE U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

Za razliku od normiranih prostora, gde je pitanje egzistencije implicitne i inverzne funkcije jednostavno rešeno [7], u lokalno konveksnim prostorima ovaj problem je delimično ostao nerešen. Tačnije, nije utvrđeno u kojim lokalno konveksnim prostorima i za koju definiciju izvoda važe teoreme o implicitnim i inverznim funkcijama koje bi bile analogne onima za normirane prostore. U radu [2] definisan je diferencijal u smislu Gateauxa i Frecheta u lokalno konveksnim prostorima, a metodom nepokretne tačke u [1] je dokazana teorema o egzistenciji implicitne funkcije. Sličan postupak je primenjen i u radu [5], gde su uslovi za egzistenciju restriktivniji. Cilj ovog rada je, pak, da se korišćenjem opštije teoreme o nepokretnoj tački u lokalno konveksnim prostorima dobije teorema o egzistenciji.

Rad se sastoji iz tri dela. U prvom delu date su osnovne oznake, definicije i teoreme koje će se koristiti u dokazivanju egzistencije implicitne funkcije; u drugom delu data je teorema o nepokretnoj tački i neprekidnoj zavisnosti nepokretne tačke od parametra, a u trećem osnovna teorema.

1. Definicije i rezultati izneti u ovoj tački mogu se naći u [1].

D e f i n i c i j a 1. *Neka je E vektorski prostor i $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familija vektorskih prostora E, koji su snabdeveni nekom topologijom. Prostor E je pseudo-topološko ujedinjenje prostora E, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

i) $$E=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$$

ii) *Ako $\lambda'\in\Lambda$ i $\lambda''\in\Lambda$ postoji $\lambda\in\Lambda$ tako da je $E_{\lambda'}\cup E_{\lambda''}\subset E_\lambda$ i topologije prostora $E_{\lambda'}$ i $E_{\lambda''}$ su finije od topologije koje E_λ indukuje na $E_{\lambda'}$ i $E_{\lambda''}$ respektivno.*

Neka su E i F dva lokalno konveksna prostora sa topologijom generisanom familijom seminormi $|\cdot|_\alpha$, $\alpha\in\mathscr{A}$, odnosno $|\cdot|_\beta$, $\beta\in\mathscr{B}$. Linearno preslikavanje

T prostora E u prostor F je neprekidno samo ako za svako $\beta \in \mathscr{B}$ postoji $\alpha \in \mathscr{A}$ tako da je $\lim\limits_{|x|_\alpha \to 0} |Tx|_\beta = 0$. Lako je videti da je ovaj uslov ekvivalentan uslovu:

$$\sup_{|x|_\alpha = 1} |Tx|_\beta < \infty.$$

Prema tome, da bi linearno preslikavanje T prostora E u prostor F bilo neprekidno potrebno je, i dovoljno da postoji preslikavanje $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tako da je $\sup\limits_{|x|_{\varphi(\beta)} = 1} |Tx|_\beta < \infty$ za svako $\beta \in \mathscr{B}$.

Neka je $\mathscr{L}(E, F)$ prostor neprekidnih linearnih preslikavanja prostora E u prostor F i $|T|_{\beta\alpha} = \sup\limits_{|x|_\alpha = 1} |Tx|_\beta$. Označimo sa $\mathscr{L}_\varphi(E, F)$ podskup svih onih elemenata iz $\mathscr{L}(E, F)$ za koje je:

$$\sup_{|x|_{\varphi(\beta)} \leq 1} |Tx|_\beta < \infty.$$

Tada je podskup $\mathscr{L}_\varphi(E, F)$ lokalno konveksan prostor sa familijom seminormi:

$$|T|_{\bar{\beta}, \varphi(\bar{\beta})} = \sup \{ |T|_{\beta_1, \varphi(\beta_1)}, |T|_{\beta_2, \varphi(\beta_2)}, \ldots, |T|_{\beta_n, \varphi(\beta_n)} \},$$

gde $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ polazi svim konačnim podskupovima od $\mathscr{B}$. U [6] je pokazano da je $\mathscr{L}(E, F)$ pseudotopološko ujedinjenje prostora $\mathscr{L}_\varphi(E, F)$.

Definicija 2. *Neka su E i F dva vektorska prostora nad telom skalara K snabdevena strukturom pseudotopološkog ujedinjenja i neka je T preslikavanje V u F $(V \subset E)$, pri čemu $x \in V$ i za svako $h \in E$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $x + th \in V$. Ako za svaki elemenat $h \in E$ postoji limes:*

$$\delta T(x, h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in K}} \frac{1}{t} [T(x + th) - T(x)].$$

kažemo da je preslikavanje T diferencijabilno u smislu Gateauxa u tački x. Preslikavanje $h \to \delta T(x, h)$ naziva se diferencijal u smislu Gateauxa, funkcije T u tački x.

Diferencija 3. *Neka su E i F dva lokalno konveksna prostora sa familijom seminormi $|\cdot|_\alpha$, $\alpha \in \mathscr{A}$ i $|\cdot|_\beta$, $\beta \in \mathscr{B}$ respektivno, a preslikavanje T neka je definisano u okolini tačke $x \in E$ sa vrednostima u F. Pretpostavimo da postoji* *neprekidno (po h) preslikavanje $dT(x, h)$ koje zadovoljava sledeći uslov: za svako $\beta \in \mathscr{B}$ postoji $\alpha \in \mathscr{A}$ tako da je*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|T(x+h) - T(x) - dT(x, h)|_\beta}{|h|_\alpha} = 0.$$

Diferencijal u smislu Frecheta preslikavanja T u tački x je $dT(x, h)$

Ako je preslikavanje T diferencijabilno u smislu Frecheta u tački x, tada je ono diferencijabilno i u smislu Gateauxa i važi $\delta T(x, h) = d\ T(x, h)$. Iznećemo i jedan dovoljan uslov da iz diferencijabilnosti u smislu Gateauxa sledi diferencijabilnost u smislu Frecheta. Neka su E i F dva lokalno konveksna prostora sa familijom seminormi $|\cdot|_\alpha$, $\alpha \in \mathscr{A}$ i $|\cdot|_\beta$, $\beta \in \mathscr{B}$, a $\mathscr{L}(E, F)$ prostor neprekidnih linearnih preslikavanja prostora E u prostor F, posmatran kao pseudo-topološko ujedinjenje prostora $\mathscr{L}_\beta(E, F)$. Ako je preslikavanje prostora E u prostor F takvo da postoji izvod u smislu Gateauxa u jednoj konveksnoj okolini tačke $x \in E$, koji neprekidno zavisi od x u odnosu na topologiju u E i pseudotopologiju u $\mathscr{L}(E, F)$, tada je preslikavanje T diferenciiabilno u smislu Frecheta u tački x.

L e m a. *Neka je T preslikavanje prostora E u prostor F i $x_0 \in E$. Pretpostavimo da izvod T_x u smislu Gateauxa postoji u svakoj tački $x \in V$, gde je V konveksna okolina tačke x_0 i da je $T_x \in \mathscr{L}_\varphi(E, F)$ bar za jedno $\varphi\ \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Tada za svako h takvo da je $x_o + h \in V$ i svako $\beta \in \mathscr{B}$ postoji realan broj τ_0, $0 \leqslant \tau_0 \leqslant 1$, tako da je:*

$$|T(x_0 + h) - T(x_0)T(x_0)|_\beta \leqslant |T_{x_0} + \tau_0 h|_{\beta, \varphi(\beta)}\ |h|_{\varphi(\beta)}.$$

2. Sledeće dve teoreme dokazane su u radu [3].

T e o r e m a A. *Neka je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan vektorsko topološki prostor, $|\cdot|_\alpha$, $\alpha \in \mathscr{A}$ dovoljna familija seminormi koja definiše topologiju u E, φ preslikavanje skupa $\mathscr{A}$ u $\mathscr{A}$, M zatvoren podskup skupa E i T preslikavanje skupa M u samog sebe. Pretpostavimo:*

1. *Za svako $\alpha \in \mathscr{A}$ postoji $q_\alpha > 0$ tako da je*

$$|Tx - Ty|_\alpha \leqslant q_\alpha\, |x - y|_{\varphi(\alpha)}$$

za svako $x, y \in M$.

2. *Postoji $x_0 \in M$ tako da red:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-2} q_{\varphi\ k(\alpha)} |Tx_0 - x_0|_{\varphi\ (\alpha)}^{\ n-1} = S(\alpha)$$

konvergira za svako $\alpha \in \mathscr{A}$, *pri čemu je*

$$q_{\varphi_{(\alpha)}^{-1}} = 1, \; q_{\varphi^{0}(\alpha)} = q_{\alpha}, \; \varphi^{n}(\alpha) = \varphi\,[\varphi^{n-1}_{(\alpha)}] \; n \geqslant 1.$$

Tada postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine $Tx = x$ *koje zadovoljava i uslov*:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-2} q_{\varphi^{k}(\alpha)} \right) |x - x_0|_{\varphi^{n-1}_{(\alpha)}} = 0 \quad za \ svako \ \alpha \in \mathscr{A}.$$

Rešenje je $x = \lim\limits_{n \to \infty} T^n x_0$ *i važi nejednakost:*

$$|x - x_0|_{\varphi^{k}(\alpha)} \leqslant \frac{S(\alpha) - S_k(\alpha)}{\prod\limits_{r=0}^{k-1} q_{\varphi^{r}(\alpha)}}$$

za svako $\alpha \in A$ *i* $k = 0, 1, \ldots$ *gde je* $S_k(\alpha)$ *k-ta parcijalna suma reda* $S(\alpha)$.

Teorema B. *Neka je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan vektorsko topološki prostor, M zatvoren podskup od E,* Λ *topološki prostor,* Φ *preslikavanje topološkog proizvoda* $M x \ \Lambda$ *u M. Pretpostavimo da je za svako fiksno* $x \in M$ *preslikavanje*: $\lambda \to \Phi\ (x, \lambda)$ *neprekidno preslikavanje topološkog prostora* Λ *u M i da preslikavanje* $\Phi_\lambda : x \to \Phi\ (x, \lambda)$ *zadovoljava sledeće uslove*:

1. $$|\Phi_\lambda x - \Phi_\lambda y|_\alpha \leqslant q_\lambda(\alpha)\, |x - y|^{\varphi_\lambda(\alpha)}$$

za svako $x, y \in M$,

2. *Za svako* $\alpha \in \mathscr{A}$ *i* $n \in N$ *postoji* $a_\alpha(n) \geqslant 0$, $Q_\alpha(n) \geqslant 0$ *i* $\beta(\alpha) \in \mathscr{A}$, *tako da je*:

a) $|x|_{\varphi_\lambda^n(\alpha)} \leqslant a_\alpha(n)\ |x|_{\beta(\alpha)}$ *za sve* $x \in M$;

b) $q_\lambda\,[\varphi_\lambda^n(\alpha) \leqslant Q_\alpha(n)$

c) $$Red \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-2} Q_\alpha(k) \right) a_\alpha(n\text{-}1)$$

konvergira

Tada je preslikavanje $\lambda \to x(\lambda)$, gde je $\Phi_\lambda\ [x(\lambda)] = x(\lambda)$, neprekidno preslikavanje Λ u M.

3. U ovom delu dokazaćemo teoremu o egzistenciji i neprekidnosti implicitne funkcije na način koji je sličan onom u [1].

T e o r e m a *Neka je f funkcija definisana i neprekidna u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0) \in ExF$ sa vrednostima u F pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $$f(x_0, y_0) = 0;$$

2. *U svakoj tački skupa nad kojim je funkcija f definisana postoji izvod $f_y(x, y)$ u smislu Frecheta sa osobinom da je $f_y(x, y) \in \mathscr{L}_\varphi(F, F)$ i preslikavanje $(x, y) \to f_y(x, y)$ je neprekidno u tački (x_0, y_0).*

3. *Levi inverzni operator od $f_y(x_0, y_0)$, $[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l$, ili desni inverzni operator $[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_d$ pripada $Z_\psi(F, F)$, gde preslikavanje $\varphi_0\psi = 0$ ima sledeću osobinu: za svako $\beta \in \mathscr{B}$ postoji $m(\beta) \geqslant 0$ i $\delta(\beta) \in \mathscr{B}$ tako da je:*

$$|y|_{\theta^k(\beta)} \leqslant m(\beta)\ |y|_{\delta(\beta)} \quad k = 1, 2, \ldots \quad y \in F.$$

Tada za svako $\beta \in \mathscr{B}$ postoji $\alpha(\beta), \gamma(\beta), \varepsilon(\beta)$ i $\eta(\beta)$ tako da je relacija $f(x, y) = 0$ ekvivalentna sa relacijom $y = g(x)$ nad skupom $(x_0 + H) x (y_0 + K)$, gde je $H = \bigcap\limits_{\beta \in \mathscr{B}} H_{\alpha(\beta)\,\eta(\beta)}$ i $K = \bigcap\limits_{\beta \in \mathscr{B}} (\bigcap\limits_{k \geq 0} K_{\theta^k[\gamma(\beta)],\, \varepsilon(\beta)})$ a $H_{\alpha, \eta} = \{x \mid x \in E, |x|_\alpha \leqslant \eta\}$, $K_{\gamma;\, \varepsilon} = \{y \mid y \in F,\ |y|_\gamma \leq \varepsilon\}$ i g je neprekidno preslikavanje skupa $x_0 + H$ u skup $y_0 + K$

Dokaz: Neka je UxV okolina tačke (x_0, y_0) u kojoj je funkcija $f(x, y)$ definisana i ispunjava sve uslove teoreme a postoji $[f_y(x, y)]^{-1}{}_l$. Kao i u [1], uvodimo nove promenljive h i k smenom $h = x - x_0$ i $k = y - y_0$. Tada je relacija $f(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ ekvivalentna relaciji $k = \Phi(h, k)$, gde je $\Phi(h, k) = k - [f_y(x_0, y_0)]_l\ f(x_0 + h,\ y_0 + k) = [f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l \times [f_y(x_0, y_0)\ (k) - f(x_0 + h, y_0 + k)]$ i $\Phi_k(h, k) = [f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l \times [f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0 + h, y_0 + k)]$. Može se pokazati da je [1]:

$$|\Phi_k(h, k)|_{\beta,\, \varphi\psi(\beta)} \leqslant |\,[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l|_{\beta,\, \psi(\beta)}\, |f_y(x_0, y_0) -$$

$$- f_y(x_0 + h, y_0 + k)\,|_{\psi(\beta),\, \varphi\psi(\beta)}.$$

Primenjujući lemu dobijamo:

(2) $$|\Phi(h, k_1) - \Phi(h, k_2)\,|_\beta \leqslant |\,\Phi_k(h, k_2 + \tau_0(k_1 - h_2)\,|_{\psi(\beta),\, (\varphi)\psi(\beta)} \times$$

$$\times |k_1 - k_2|_{\varphi\psi(\beta)} \leqslant |\,[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l\,|_{\beta,\, \psi(\beta)}\, |k_1 - k_2|_{\varphi\psi(\beta)} \times$$

$$\times\ |\,f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0 + h, y_0 + k_0 + \tau_0\, k_1 + k_2)\,)\,|_{\psi(\beta)\ \varphi\psi(\beta)}.$$

Kako je preslikavanje $(x, y) \to f_y(x, y)$ neprekidno u tački (x_0, y_0) to se za svako $\beta \in \mathscr{B}$ mogu naći $\alpha(\beta), \gamma(\beta), \eta(\beta)$ *i* $\varepsilon(\beta)$ tako da iz $h + H_{\alpha(\beta), \eta(\beta)} \subset U - x_0$ i $k \in K_{\gamma(\beta), \varepsilon(\beta)} \subset V - y_0$ sledi

$$|f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0 + h, y_0 + k)_{\psi(\beta), \varphi\psi(\beta)} < \frac{1}{2\,[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l}.$$

Tada je za svako $h \in H_{\alpha(\beta), \eta(\beta)}$, k_1 i $k_2 \in K_{\gamma(\beta), \varepsilon(\beta)}$ i $\tau \in [0, 1]$:

$$(3)\ |\,[f_y x_0, y_0)\,]^{-1}{}_l|_{\beta, \psi(\beta)}\ |\,f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0 + h, y_0 + k_2 + \tau(k_1 - k_2))\,|_{\psi(\beta), \varphi\psi(\beta)} < \frac{1}{2}.$$

Takođe je $\lim\limits_{h \to 0} \Phi(h, 0) = 0$ [1]. Pretpostavimo da su $\alpha(\beta)$ i $\eta(\beta)$ tako određeni da iz $h \in H_{\alpha(\beta), \eta(\beta)}$ sledi da je:

$$|\,\Phi(h, 0)\,|_{\delta[\gamma(\beta)]} < \frac{1}{2m\,[\gamma(\beta)]}\,\varepsilon(\beta),$$

gde su $\delta[\gamma(\beta))]$ i $m\ [\gamma(\beta)]$ određeni uslovom 3. . Kako e $|y|_{\theta k(\beta)} \leqslant m(\beta)$ $|y|_{\delta(\beta)}$ za svako $\beta \in \mathscr{B}$ i svako $y \in F$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ to je:

$$\sup_{k \geq 0}\ |\Phi(h, 0)\,|_{\theta k[\gamma(\beta)]} \leqslant m\,[\gamma(\beta)]\,|\,\Phi(h, 0)\,|_{\delta[\gamma(\beta)]} < \frac{1}{2}\,\varepsilon(\beta).$$

(4) Neka je $H = \bigcap\limits_{\beta \in \mathscr{B}} H_{\alpha(\beta), \eta(\beta)}$ i $K = \bigcap\limits_{\beta \in \mathscr{B}} \ (\bigcap\limits_{k \geq 0} K_{\theta k[\gamma(\beta)], \varepsilon(\beta)})$

Pokazaćemo da su zadovoljeni svi uslovi teoreme *B* gde je $\Lambda = H$, $\Phi(\lambda, x) = \Phi)$ (h, k), $E = F$ i $M = K$. Iz (2) i (3) sledi da je;

$$|\,\Phi(h, k_1) - \Phi(h, k_2)\,|_\beta \leqslant q(h, k_1, k_2, \beta)\,|_{\theta(\beta)}$$

za svako $h \in H$ i $k_1, k_2, \in K$ gde je $q(h, k_1, k_2, \beta) < \frac{1}{2}$. Pokažimo da preslikavanje $\Phi_h(k) : k \to \Phi(h, k)$ preslikava K u K. Zaista

$$|\Phi(h, k)\,|_{\theta\nu[\gamma(\beta)]} \leqslant |\,\Phi(h, k) - \Phi(h, 0)\,|_{\theta\nu\,[\gamma(\beta)]} + |\,\Phi(h, 0)\,|_{\theta\nu[\gamma(\beta)]} \leqslant$$

$$\leqslant q(h, k_1, k_2, \beta)\ \ |k|_{\theta\nu+1[\gamma(\beta)]} + |\,\Phi(h, 0)\,(h, 0)\,|_{\theta\nu[\gamma(\beta)]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon(\beta)}{2} + \frac{\varepsilon(\beta)}{2} = \varepsilon(\beta).$$

Da je preslikavanje $h \to \Phi(h, k)$ neprekidno preslikavanje H u K, sledi iz neprekidnosti preslikavanja $f(x, y)$ jer i $[f_y(x_0, y_0)]^{-1}{}_l \in \mathscr{L}_\psi(EF)$. Dakle, postoji neprekidno preslikavanje $\omega : h \to \omega(h) = k$ tako da je

$$\omega(h) = \Phi(h, \omega(h)),$$

odnosno za $g(x) = y_0 + \omega_v(x - x_0$ je $y = g(x)$.

LITERATURA

]1] Деляну А. — Маринеску Г., *Теорема о неподвижной точке и неявных функциях в локально выпуклых пространствах*, Revue de Math. pures et appliq. 8 (1963), 91-99.

[2] G. Marinescu, *Differentielles de Gateaux et Frechet dans les espaces localement convexes*, Bull. Math, R. P. R., № 1, (1957), 77-86.

[3] O. Hadžić, *Existence theorems for the system $x = H(x, y)$ $y = K(x, y)$ in locally convex spaces*, to appearin Publ. Inst. Math., Beograd,

[4] O. Hadžić, B. Stanković, *Some theorems on the fixed point in locally convex spases*, Publ. Inst. Math. Beograd, 10 (1970), 9-19.

[5] Д. С. Салько, *К теории существоваия неявных функций в локально выпуклых простраствах*, уч. зап. пед. и-та, Им. Н. К. Крупской, Т. CX, Математика, вып. 7 (1962), 245-264.

[6] G. Marinescu, *Espaces vecteriels pseudotopologiques et theorie des distributions*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.

[7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональний анализ в нормированиых пространствах*, Физматгиз, Москва. 1959.

[8] Terrence S. Mc Dermett, *Implicitly defined mappings in locally convex spaces*, Transactions ef the American Mathematical Society. Vol. 161, november 1971, 89-99.

[9] Peter L. Falb and Marc Q. Jacobs, *On Differentials in Locally Convex Spaces*, Journal of Differential Equations, Vol. 4, number 3 July 1968, 444-459

Dr Olga Hadžić

EXISTENCE OF IMPLICIT FUNCTIONS IN LOCALLY CONVEX SPACES

Summary

Using the fixed point method an implicit function theorem was proved. This theorem is a generalization of theorem 3 in [1].

Theorem Let f be defined and continuous in a neighbourhood $V(x_0 y_0) \subset ExF$ and maps V into F so that the following conditions are satisfied

1. $f(x_0 y_0) = 0$

2. for every $(x_0, y_0) \in V(x_0 y_0)$ there exists $f_y(x, y)$ in the Frechet sense, $f_y(x, y) \in \mathscr{L}\varphi(E, F)$ and the mapping $(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$ is continuous in the point (x_0, y_0)

3. left inverse $[f_y(x_0 y_0)]^{-1}{}_l$ (or right inverse) is in $\mathscr{L}\psi(F, F)$ where the mapping $\varphi_0 \psi = \theta$ has the following property: for every $\beta \in \mathscr{B}$ there exist $m(\beta) \geq 0$ and $\delta(\beta) \in \mathscr{B}$ so that $|y|_{\theta^k(\beta)} \leq m(\beta)\ |y|_{\delta(\beta)}$ $k = 1, \ldots$ $y \in F$.

Then $f(x, y) = 0 \Leftarrow\!\Rightarrow y = g(x)$ for evey $(x, y) \subset (x + H) \times (y_0 + K)$ (see (4)) and g is continuous on $(x_0 + H)$.