Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 4 (1974)
Review of Research of Science-University of Novi Sad, Volume 4 (1974)

Mr Aleksandar Ivić

O NEKIM ARITMETIČKIM FUNKCIJAMA VEZANIM ZA RASPODELU PROSTIH BROJEVA

U teoriji prostih brojeva veliku ulogu igraju funkcije $\Lambda_1(n)$ i $\Lambda_2(n)$ (Specht, [1], str. 18) koje se definišu na sledeći način:

$$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\log p & n=p^m,\ p \text{ prosto}\\ 0 & n\neq p^m\end{cases}$$

$$\Lambda_2(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\log^2\frac{n}{d},$$

pri čemu je $\mu(n)$ funkcija Möbiusa, a sumiranje se vrši po svim deliteljima broja n uključujući 1 i samo n. Funkcije $\Lambda_1(n)$ i $\Lambda_2(n)$ vezane su sledećim identitetom A. Selberga (Specht, [1], Chandrasekharan, [2])

$$\Lambda_2(n)=\Lambda_1(n)\log n+\sum_{d\mid n}\Lambda_1(d)\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1}$$

iz kojega se posle sumiranja po svim n koji ne premašaju x dobija formula koja direktno vodi ka elementarnom dokazu teoreme o prostim brojevima.

Prvi cilj ovoga rada je izvođenje nekoliko identiteta sa funkcijama $\Lambda_1(n)$ i $\Lambda_2(n)$ koji se dobijaju pomoću (1), a iz kojih se mogu dobiti interesantne analitičke procene. U tu svrhu se posmatra funkcija

$$F_k(n)=\sum_{d\mid n}g(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right)\log^k d,$$

pri čemu je k prirodan broj ili nula, a $g(n)$ je proizvoljna aritmetička funkcija.

Kad d prolazi skupom delitelja broja n, $\frac{n}{d}$ takođe prolazi tim skupom, pa će biti

$$F_k(n) = \sum_{d|n} g(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \log^k d = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \log^k \frac{n}{d} =$$

$$= \sum_{d|n} g(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) (\text{logn-logd})^k = \sum_{d|n} g(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n \cdot \log^i d =$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n \sum_{d|n} g(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \log^i d = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n \cdot F_i(n).$$

Time se dobila rekurentna formula za izračunavanje $F_k(n)$ (odnosno $F_{k-1}(n)$, jer se $F_k(n)$ potire sa $F_k(n)$ za k parno) koja u slučaju $g(n) = \Lambda_1(n)$, $F_0(n) = \Lambda_2(n) - \Lambda_1(n) \log n$ daje sledeće identitete

$$\Lambda_2(n) \log n = \Lambda_1(n) \log^2 n + 2 \sum_{d|n} \Lambda_1(d)\, \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \log d, \tag{2}$$

$$\Lambda_2(n) \log^3 n = \Lambda_1(n) \log^4 n + 6 \log n \sum_{d|n} \Lambda_1(d)\, \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \log^2 d - 4 \sum_{d|n} \Lambda_1(d) \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \log^3 d, \tag{3}$$

i, kasnije, još komplikovanije identitete.

Iz (1) se trivijalno dobija $\Lambda_2(n) \geqslant \Lambda_1(n) \log n$, jer je funkcija $\Lambda_1(n)$ po definiciji nenegativna. Sledeća teorema daje ograničenje funkciie $\Lambda_2(n)$ sa gornje strane:

T e o r e m a 1. $\Lambda_2(n) \leqslant 2\, \Lambda_1(n) \log n + \frac{1}{2} \log^2 n - \Lambda_1^2(n)$.

Dokaz. Iz (1) se vidi da ako $n \neq p^a$ ili $n \neq p^a q^b$ (p i q prosti), tada za neko d koje deli n ili d ili $\frac{n}{d}$ sadrže više od jednog prostog faktora pa je tada $\Lambda_2(n) = 0$. Ako je, međutim, $n = p^a$, onda $\Lambda_2(n) = \Lambda_1(p^a) \log p^a + \sum_{d|p^a} \Lambda_1(d)\, \Lambda_1\left(\frac{p^a}{d}\right) =$

$a\log^2 p + \Lambda_1(1)\Lambda_1(p^a) + \Lambda_1(p)\Lambda_1(p^{a-1}) + \Lambda_1(p^2)\Lambda_1(p^{a-2}) + \ldots + \Lambda_1(p^a)\Lambda_1(1) =$ $a\log^2 p + (a-1)\log^2 p = 2a\log^2 p - \log^2 p = 2\,\Lambda_1(n)\log n - \Lambda_1^2(n)$. Za $n = p^a q^b$ dobiće se

$$\Lambda_2(n) = \sum_{d \mid p^a q^b} \Lambda_1(d)\,\Lambda_1\left(\frac{p^a q^b}{d}\right) = \Lambda_1(p^a)\,\Lambda_1(q^b) + \Lambda_1(p^b)\,\Lambda_1(q^a) = 2\log p \cdot \log q \text{ jer je u}$$

ostalim slučajevima ili $\Lambda_1(d)$ ili $\Lambda_1\left(\frac{p^a q^b}{d}\right)$ jednako nuli. Primenom nejednakosti $2xy \leqslant \frac{1}{2}(x+y)^2$ dobija se $\Lambda_2(n) = 2\log p \cdot \log q \leqslant \frac{1}{2}(\log p + \log q)^2 \leqslant \frac{1}{2}(a\log p + b\log q)^2 = \frac{1}{2}(\log p^a q^b)^2 = \frac{1}{2}\log^2 n$.

S obzirom na to da su $\frac{1}{2}\log^2 n$ i $2\,\Lambda_1(n)\log n - \Lambda_1^2(n)$ za prirodne vrednosti argumenta n nenegativne funkcije dobija se teorema 1.

Kako se funkcija $\Lambda_1(n)$ može, slično funkciji $\Lambda_2(n)$ (Prachar, [3]), predstaviti u obliku

$$\Lambda_1(n) = \sum_{d \mid n}^{m-1} \mu(d) \log \frac{n}{d},$$

to se prirodno nameće proučavanje sledećih funkcija koje generališu funkcije $\Lambda_1(n)$ i $\Lambda_2(n)$:

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log^k \frac{n}{d} = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left(\log \frac{n}{d}\right)^k. \tag{4}$$

Za funkcije $\Lambda_k(n)$ postoji rekurzivna formula koju daje

T e o r e m a 2. Za svako m koje je manje od k važi

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n) \log^m n + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \sum_{d \mid n} \Lambda_{k-m}(d)\, \Lambda_{m-i}\left(\frac{n}{d}\right) \log^i d.$$

Dokaz. $\Lambda_k(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log^k \frac{n}{d} = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log^m \frac{n}{d} \cdot \log^{k-m} \frac{n}{d} =$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) \log^m \frac{n}{d} \sum_{s \mid \frac{n}{d}} \Lambda_{k-m}(s) = \sum_{ds \mid n} \mu(d) \log^m \frac{n}{d} \Lambda_{k-m}(s) =$$

$$\sum_{ds\, n} \mu(d) \log^m s \frac{n}{ds} \Lambda_{k-m}(s) = \sum_{ds|n} \mu(d) (\log \frac{n}{ds} + \log s)^m \Lambda_{k-m}(s) =$$

$$\sum_{ds|n} \mu(d) \Lambda_{k-m}(s) \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \log^{m-i} \frac{n}{ds} \log^i s =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{ds|n} \Lambda_{k-m}(s) \log^{m-i} \frac{n}{ds} \log^i s\, \mu(d) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \sum_{s|n} \sum_{d|\frac{n}{s}} \Lambda_{k-m}(s) \log^{m-i} \frac{n}{ds} \log^i s\, \mu(d) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \sum_{s|n} \Lambda_{k-m}(s) \log^i s\, \Lambda_{m-i}\left(\frac{n}{s}\right) + \sum_{s|n} \Lambda_{k-m}(s) \log^m s \sum_{d|\frac{n}{s}} \mu(d) =$$

$$= \Lambda_{k-m}(n) \log^m n + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \sum_{d|n} \Lambda_{k-m}(d) \Lambda_{m-i}\left(\frac{n}{d}\right) \log^i d.$$

U dokazu je korišćena poznata osobina funkcije Möbijusa $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$, kao i relacija $\log^k n = \sum_{d|n} \Lambda_k(d)$, koja se iz (4) neposredno dobija primenom Möbijusove formule inverzije. U specijalnom slučaju $m=1$ dobija se identitet

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-1}(n) \log n + \sum_{d|n} \Lambda_{k-1}(d)\, \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right), \tag{5}$$

koji je dobio Kasara, [4] i koji predstavlja generalizaciju identiteta (1). Iz (5) indukcijom sledi da je $\Lambda_k(n) = 0$ kad n ima više od k različitih prostih faktora.

Iz teoreme 2 se uzimanjem raznih vrednosti za m i izjednačavanjem $\Lambda_k(n)$ mogu dobiti razni identiteti sa funkcijama $\Lambda_k(n)$, kao na primer

$$\Lambda_3(n)\log n=\Lambda_1(n)\log^3 n+3\sum_{d|n}\Lambda_2\left(\frac{n}{d}\right)\Lambda_1(d)\log d+3\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right)\log^2 d. \tag{6}$$

Teorema 3. $\Lambda_1(n)\log^{k-1}n\leqslant\Lambda_k(n)\leqslant k\log^k n.$

Dokaz. Za $k=1$ nejednakost postaje

$$\Lambda_1(n)\leqslant\Lambda_1(n)\leqslant\log n,$$

što je očigledno iz definicije funkcije $\Lambda_1(n)$. Time je započet induktivni dokaz; neka je nejednakost tačna za neko k. Iz (5) sledi

$$\Lambda_{k+1}(n)=\Lambda_k(n)\log n+\sum_{d|n}\Lambda_k(d)\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right),$$

pa se primenom induktivne pretpostavke dobija

$$\Lambda_{k+1}(n)\geqslant\Lambda_k(n)\log n\geqslant\Lambda_1(n)\log^{k-1}n\cdot\log n=\Lambda_1(n)\log^k n.$$

Time je prvi deo nejednakosti dokazan, a drugi se slično dokazuje:

$$\Lambda_{k+1}(n)\leqslant k\log^k n\cdot\log n+\sum_{d|n}\Lambda_k(d)\log\frac{n}{d}\leqslant$$

$$k\log^{k+1}n+\log n\sum_{d|n}\Lambda_k(d)=k\log^{k+1}n+\log n\cdot\log^k n=(k+1)\log^{k+1}n.$$

Stavljanjem dobivenih nejednakosti u (5) sledi

$$\Lambda_k(n)\geqslant\Lambda_1(n)\log^{k-1}n+\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right)\log^{k-2}d \tag{7}$$

$$\Lambda_k(n)\leqslant(k-1)\log^k n+(k-1)\sum_{d|n}\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right)\log^{k-1}d, \tag{8}$$

što predstavlja oštrije, ali manje praktične nejednakosti od teoreme 3.

Analitičke procene. Sumiranjem (2) po svim n koji ne premašaju x dobiće se

$$\sum_{u \leq x} \Lambda_2(n) \log n = \sum_{n \leq x} \Lambda_1(n) \log^2 n + 2 \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} \Lambda_1(d) \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \log d.$$

Ako se upotrebe poznate funkcije teorije prostih brojeva

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_1(n)$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_2(n)$$

i iskoristi poznati rezultat (Specht, [1])

$$\psi_2(x) = 2x \log x + O(x),$$

parcijalnim sumiranjem se lako nalazi

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) \log n = 2x \log^2 x + O(x \log x)$$

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_1(n) \log^2 n = \psi_1(x) \log^2 x + O(x \log x)$$

što daje

(9) $$2x \log^2 x + O(x \log x) = \psi_1(x) \log^2 x + 2 \sum_{mn \leq x} \Lambda_1(m) \Lambda_1(n) \log n,$$

jer je

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) = \sum_{mn \leq x} f(m, n).$$

Ako se sada iskoristi teorema o prostim brojevima u sledećem obliku (Prachar, [3])

(10) $$\psi_1(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

dobija se

$$\sum_{mn\leq x} \Lambda_1(m)\,\Lambda_1(n)\log n = \frac{x}{2}\log^2 x + O(x\log x). \tag{11}$$

Parcijalnim sumiranjem poznate formule (Chandrasekharan, [2])

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_1(n)}{n} = \log x + O(1)$$

dobija se

$$x\log^2 x + O(x\log x) = 2\sum_{n\leq x} \Lambda_1(n)\,\frac{x}{n}\log n \tag{12}$$

i u opštem slučaju

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_1(n)}{n}\log^k n = \frac{\log^{k+1}x}{k+1} + O(\log^k x). \tag{13}$$

Oduzimanjem (12) od (9) dobiće se

$$-\rho(x)\log^2 x = \sum_{n\leq x} \Lambda_1(n)\log n\,\rho\left(\frac{x}{n}\right) + O(x\log x), \tag{14}$$

pri čemu je korišćeno (11) i funkcija $\rho(x) = \psi_1(x) - x$, pomoću koje se teorema o prostim brojevima (10) može napisati u obliku

$$\rho(x) = 0\,(xe^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{15}$$

Relacija (14) se može poopštiti, kao što pokazuje sledeća

T e o r e m a 4. Za $k \geqslant 2$ važi

$$-\rho(x)\log^k x = \sum_{n\leq x} \Lambda_1(n)\log^{k-1} n\,\rho\left(\frac{x}{n}\right) + O(x\log^{k-1}x). \tag{16}$$

Dokaz. Maločas je pokazano da (16) važi za $k=2$, pa ako se pretpostavi da važi za neko k, onda će biti

$$-\rho(x)\log^{k+1}x = \sum_{n\leq x} \Lambda_1(n)\log^{k-1}n\log\frac{x}{n}\,\rho\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n<x} \Lambda_1(n)\log^k n\,\rho\left(\frac{x}{n}\right) + O(x\log^k x),$$

što se dobija množenjem (16) sa $\log x$, pa ostaje da se pokaže

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_1(n) \log^{k-1} n \log \frac{x}{n}\, \rho\left(\frac{x}{n}\right) = O(x\log^k x).$$

Iz (15) sledi

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_1(n) \log^{k-1} n \log \frac{x}{n}\, \rho\left(\frac{x}{n}\right) = O\left(\sum_{n\leq x} \Lambda_1(n) \log^{k-1} n \log \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} e^{-c\sqrt{\log \frac{x}{n}}}\right) =$$

$$x\, O\left(\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda_1(n)}{n} \log^{k-1} n\right) = O(x\log^k x)$$

pri čemu je korišćeno (13), kao i činjenica da je

$$\log \frac{x}{n}\, e^{-c\sqrt{\log \frac{x}{n}}} = O(1).$$

pošto funkcija xe^{-cx} opada za dovoljno veliko x, jer je $c>0$. Time je završen induktivni dokaz teoreme 4.

LITERATURA

[1] W. Specht, *Elementare Beweise der Primzahlsätze*, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1956.

[2] K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[3] *К. Прахар, Распределение простых чисел*, Мир, Москва, 1967.

[4] *И. Касара, Об одном обобщении формулы Сельберга*, Труды Самаркандского Университета, вып. 181, стр. 44-49, Самарканд, 1970.

Aleksandar Ivić

ON CERTAIN ARITHMETICAL FUNCTIONS CONNECTED WITH THE DiSTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

Summary

Let $\Lambda_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log^k \frac{n}{d}$, where $\mu(d)$ is the Möbius function.

Then the following is proved:

a) $\Lambda_2(n) \log n = \Lambda_1(n) \log^2 n + 2 \sum_{d|n} \Lambda_1(d) \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) \log d,$

b) $\Lambda_2(n) \leq 2 \Lambda_1(n) \log n + \frac{1}{2} \log^2 n - \Lambda_1^2(n).$

c) For every m less than k

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n) \log^m n + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \sum_{d|n} \Lambda_{k-m}(d) \Lambda_{m-i}\left(\frac{n}{d}\right) \log^i d.$$

d) $\Lambda_1(n) \log^{k-1} n \leq \Lambda_k(n) \leq k \log^k n.$

e) $-\rho(x) \log^k x = \sum_{n \leq x} \Lambda_1(n) \log^{k-1} n \, \rho\left(\frac{x}{n}\right) + O(x \log^{k-1} x), \; k \geqq 2,$

where
$$\rho(x) = \psi_1(x) - x,$$

and
$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_1(n).$$