Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Bulletin des travaux de la Faculté des Sciences — Université de Novi Sad, Tome 8 (1978)

Stojan Bogdanović

DEUX CARACTERISATIONS DES SEMIGROUPES ANTI-INVERSES

(Communiqué Avril le 27, 1978.)

Pour deux éléments x et y de semigroupe S on dit qu'ils sont anti-inverses l'un de l'autre si

$$x = yxy \text{ et } y = xyx.$$

Un semigroupe S est anti-inverse si pour chaque $x \in S$ il existe son élément anti-inverse $y \in S$. Avec $\mathcal{A}$ on dénote la classe des semigroupes anti-inverses.

Un sous-semigroupe I du semigroupe S est son idéal à gauche (à droit) s'il est $SI \subset I$ $(IS \subset I)$. Un sous-semigroupe I du semigroupe S est son idéal bilatéral s'il est à gauche et à droit en même temps.

Lemme 1. Chaque idéal du semigroups $S \in \mathcal{A}$ est un sous-semigroupe anti-inverse du semigroupe S.

Preuve. Soit I un idéal quelconque du semigroupe $S \in \mathcal{A}$. Soit $x \in I$, alors $x^2 \in I$. Comme pour $x \in I$ il existe son élément anti-inverse $y \in S$, nous avons que $x^2 = y^2$ (Théorème 2.1. [1]), c'est à dire que $y^2 \in I$. D'où nous arrivons a ce que $y^5 \in I$, c'est à dire que $y \in I$ (Théorème 2.1. [1]). Donc, $I \in \mathcal{A}$.

Remarque. Dans la preuve du lemme précédent nous avons vu que $y^2 \in I$ entraîne $y \in I$, c'est à dire que chaque idéal I du semigroupe $S \in \mathcal{A}$ est semiprime. Cette propriété peut être démontré par le corollaire 2.1. (vii) [1] et le lemme 4.1. [2].

Théorème 1. Soit I un idéal du semigroupe S. Alors $S \in \mathcal{A}$ si et seulement si chaque idéal $I \in \mathcal{A}$ et pour chaque $x \in S\ I$ il existe son élément anti-inverse $y \in S \setminus I$.

Preuve. Soit $S \in \mathcal{A}$. Alors par le lemme 1. $I \in \mathcal{A}$. Pour $x \in S \setminus I$ il existe un élément anti-inverse $y \in S \setminus I$. Supposons le contraire, c'est à dire, que pour $x \in S \setminus I$ l'élément antiinverse est $y \in I$, alors $y^2 \in I$. C'est pourquoi par le théorème 2.1. [1] nous avons que $x^2 \in I$, et comme chaque idéal du semigroupe anti-inverse est semiprime nous avons que $x \in I$, ce qui est une contradiction. Donc, pour chaque $x \in S \setminus I$ il existe son élément anti-inverse $y \in S \setminus I$.

L'inverse est trivial.

Lemme 2. L'image homomorphe du semigroupe anti-inverse est un semigroupe anti-inverse.

Preuve. Soit $S \in \mathcal{A}$ et φ homomorphisme de S sur S_1. Soit $x_1 \in S_1$, alors il existe $x \in S$ tel que $x\varphi = x_1$ et il existe $y \in S$ tel que $x = yxy$ et $y = xyx$, c'est pourquoi

$$x\varphi = (yxy)\,\varphi = (y\varphi)\,(x\varphi)\,(y\varphi)$$

$$y\varphi = (xyx)\,\varphi = (x\varphi)\,(y\varphi)\,(x\varphi),$$

c'est à dire

$$x_1 = (y\varphi)\,x_1\,(y\varphi)$$

$$y\varphi = x_1\,(y\varphi)\,x_1.$$

De cela nous avons que $y_1 = (y\varphi) \in S_1$ est anti-inverse pour x_1.

Soit I un idéal bilatéral du semigroupe S. On dénote avec $S_{/I}$ le facteur-semigroupe de Rees du semigroupe S [2] et avec φ l'homomorphisme naturel de S sur $S_{/I}$.

Théoreme 2. Soit S un semigroupe. Alors

$$S \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\forall I)\,(I \in \mathcal{A} \wedge S_{/I} \in \mathcal{A}).$$

Preuve. Soit $S \in \mathcal{A}$. Alors en utilisant les lemmes 1. et 2. suit l'énoncé.

L'inverse, soit n'importe quel idéal I du semigroupe S anti-inverse et soit $S_{/I} \in \mathcal{A}$. Alors on distingue deux cas

1° Si $x \in I$, alors x a son élément anti-inverse.

2° Si $x \in S \setminus I$, alors il existe $x\varphi \in S_{/I}$. Pour $y\varphi$ il existe son élément anti-inverse $y\varphi \in S_{/I}$ et nous avons

$$(x\varphi)\,(y\varphi)\,(x\varphi) = y\varphi \quad \text{et} \quad (y\varphi)\,(x\varphi)\,(y\varphi) = x\varphi,$$

c'est à dire

$$(xyx)\,\varphi = y\varphi \quad \text{et} \quad (yxy)\,\varphi = x\varphi. \tag{δ}$$

Comme φ est un isomorphisme sur $S \setminus I$ cela vient de la deuxième égalité

$$x = yxy. \tag{*}$$

Prouvons que $y \in S \setminus I$. Supposons le contraire, c'est à dire, soit $y \in I$, alors $yxy \in I$, c'est à dire $x \in I$, ce qui est une contradiction. Donc, $y \in S \setminus I$, mais comme φ est un isomorphisme sur $S \setminus I$ cela vient de la première égalité

$$x = xyx. \tag{**}$$

De (*) et (**) nous avons que pour chaque $x \in S \setminus I$ il existe son élément anti-inverse $y \in S \setminus I$. Donc, $S \in \mathcal{A}$.

Ce qui est la fin de la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bogdanović, S. Milić, V. Pavlović, *Anti-inverse semigroups*, (A paraitre), Publ. Inst. Math. Belgrade.

[2] A. H. Clifford, G, B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Amer. Math. Soc. 1961.

Stojan Bogdanović

DVE KARAKTERIZACIJE ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Rezime

Za semigrupe iz klase $\mathcal{A}$ koje su ispitivane u [1] ovde se daju sledeće dve karakterizacije:

Teorema 1. Neka je I ideal semigrupe S. Tada $S \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je svaki ideal $I \in \mathcal{A}$ i za svako $x \in S \setminus I$ postoji njemu anti-inverzan element $y \in S \setminus I$.

Teorema 2. Neka je I dvostrani ideal semigrupe S i $S_{/I}$ faktorsemigrupa Reesa [2] semigrupe S. Tada

$$S \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\forall I)\,(I \in \mathcal{A} \wedge S_{/I} \in \mathcal{A}).$$