*Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)*
*Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)*

*Dragoslav Herceg*

# O NEEKVIDISTANTNIM DIFERENCNIM FORMULAMA HERMITOVOG TIPA

**Uvod.** Konturni problem.

(KP) $$x''=f(t,x) \text{ na } I=[0,1],\ R_i x=z_i\ (i=0,1)$$

sa poznatim linearnim funkcionalima $R_i$ na $C^1(I)$, $f\in C(I\times R)$, $z_i\in R$ $(i=0,1)$ ($R$ je skup realnih brojeva) svodi se diskretizacijom nad nekom mrežom $I_h\subset I$ na sistem, u opštem slučaju, nelinearnih jednačina. Taj sistem je potpuno određen kada su poznati korak $h$, mreža $I_h$ diskretizacije i diferencne formule kojima se aproksimiraju jednačina i konturni uslovi iz (KP), [4].

Neka je $n\in N$ ($N$ je skup prirodnih brojeva) i $k_j>0$, $k_j\in R$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Tada se $h$ i $I_h$ mogu definisati na sledeći način

$$h^{-1}=\sum_{j=1}^{n} k_j,\quad I_h=\{t_0=0,\ t_j=t_{j-1}+k_j h : j=1,2,\ldots,n\}.$$

Ako je $k_i\neq k_j$, bar za jedan par $i,j$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ mreža $I_h$ je neekvidistantna (neregularna), [3]. Za $k_j=a\in R$ $(j=1,2,\ldots,n)$ mreža $I_h$ je ekvidistantna.

Pri diskretizaciji jednačine iz (KP) u tačkama $t_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ ekvidistantne mreže $I_h$ često se koriste ekvidistantne formule Hermitovog tipa, [2], [4], [5], [6]. Opšti oblik ovih formula je

(1) $$\sum_{j=-p}^{p}\left(h^{-2}a_j x(t_i+jh)+b_j f(t_i+jh, x(t_i+jh))\right)=0\,(h^{m-1}),$$

gde za $p\in N$ važi $p\leqslant\min(i, n\text{-}i)$, a $m\geqslant 2$ je prirodan broj za koji je $x\in C^{m+1}(I)$ i za koji je moguće koeficijente $a_j, b_j$ $(j=-p,\ldots,p)$ jednoznačno odrediti, [5], [6]. Kako se posmatraju samo tačke $t_i\in I$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, to su svim tim tačkama možemo uzeti $p=1$. Taj specijalni slučaj, kada je $m=5$, najčešće se koristi. Tada je

(2) $$a_{-1}=a_1=-1,\ a_0=2,\ b_{-1}=b_1=1/12,\ b_0=5/6.$$

Diskretizacije jednačine iz (KP), u kojima se koriste formule (1) sa različitim vrednostima za $p$, nalazimo u [2] i [3].

Primena ekvidistantnih diferencnih formula oblika (1) u diskretizaciji jednačine iz (KP) u tačkama $t_i$ neekvidistantne mreže $I_h$ je moguća, ako se ta mreža odredi na poseban način. Jedan primer takve mreže dat je u [3].

U ovom radu se daje jedan postupak određivanja neekvidistantnih diferencnih formula Hermitovog tipa:

$$\sum_{j=0}^{p}(h^{-k}a_j x(t_i+s_j h)+b_j x^{(k)}(t_i+s_j h))=0\,(h^{m+1-k}), \tag{3}$$

i odgovarajuća formula za $k=2$, $p=3$ i $m=5$. Dobijena formula može se koristiti za diskretizaciju jednačine iz (KP) u tačkama $t_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ proizvoljne neekvidistantne mreže $I_h$, što će biti predmet jednog od sledećih radova. Kao specijalan slučaj ove formule, kada je $I_h$ ekvidistantna mreža, javlja se formula oblika (1) sa koeficijentima iz (2).

**Određivanje koeficijenata $a_j$ i $b_j$ iz (3).** Neka je $I_h$ neekvidistantna mreža, a $t_i$ bilo koja tačka te mreže. Uvedimo za fiksno $p\in N$ oznaku $T=\{0,1,\ldots,p\}$ i pretpostavimo

$$k\leqslant p,\ k,p\in N,\ s_j\in R\,(j\in T),\ s_0=0,\ s_i\neq s_j \text{ za } i\neq j\ (i,j\in T) \tag{4}$$

$$t_i+s_j h\in I_h\,(j\in T),$$

$$x\in C^{m+1}(I) \text{ za neko } m\geqslant p+k,\ m\in N. \tag{5}$$

Koeficijenti $a_j, b_j\,(j\in T)$ iz (3) određuju se iz sledećeg sistema linearnih jednačina ([5]):

$$\sum_{j=0}^{p}a_j=0,\quad \sum_{j=0}^{p}a_j s_j^q=0\ (p=1,2,\ldots,k-1), \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{p}(a_j s_j^k+b_j k!)=0, \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{p}\left(a_j s_j^q+b_j\frac{q!}{(q-k)!}s_j^{q-k}\right)=0\ (q=k+1,\ldots,m), \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{p}b_j=1. \tag{9}$$

Da bi se diskretizacija jednačine iz (KP) mogla sprovesti, potrebno je da je $b_j\neq 0$ bar za jedno $j\in T$, što se obezbeđuje jadnačinom (9). U tom slučaju (7) se svodi na

$$\sum_{j=0}^{p}a_j s_j^k=-k!,$$

te je sistem linearnih jednačina (6) — (9) nehomogen.

Sada se broj $m\in N$ određuje tako da taj sistem ima rešenje i da je $m\geqslant k+p$. Jedna mogućnost određivanja broja $m$ i rešenja sistema linearnih jednačina (6) — (9), pod pretpostavkama (4) i (5), data je u dokazu sledeće teoreme.

Teorema. Neka su ispunjene pretpostavke (4) i (5) za $m=p+k$. Tada sistem linearnih jednačina (6) — (9) ima bar jedno rešenje.

Dokaz. Iz sistema linearnih jednačina (6) — (9) izdvojimo prvih $p+1$ jednačina. Ako je $b_0=1$, $b_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, p)$, izdvojene jednačine obrazuju nehomogeni sistem linearnih jednačina sa nepoznatim $a_j$ $(j \in T)$. Ovako dobijeni sistem, označimo ga sa $(Sa)$, jednoznačno je rešiv, [5], [7], a rešenje se može odrediti prema formulama iz [7]. Uvrštavajući tako dobijene vrednosti za $a_j$ $(j \in T)$ u jednačine (8) za $q=k+1, \ldots, k+p$, dobija se sistem $p$ linearnih jednačina sa nepoznatim $b_i$ $(j=1, 2, \ldots, p)$. Označimo taj sistem sa $(Sb)$. Pomoću rešenja sistema $(Sa)$, rešenja sistema $(Sb)$ i $b_0$, koje se onda može dobiti iz (9), obrazuje se rešenje sistema (6) — (9).

Za vrednosti koeficijenata $a_j$ $(j \in T)$ dobijene rešavanjem sistema $(Sa)$ važi, prema [7],

$$\sum_{j=0}^{q} a_j s_j^q \neq 0 \quad \text{za } q \geqslant p+1.$$

To znači da je sistem $(Sb)$ nehomogen. Ovaj sistem možemo napisati u obliku

$$\sum_{j=0}^{p} b_j s_j^{q-k} = -\frac{(q-k)!}{q!} \sum_{j=0}^{p} a_j s_j^q \quad (q=k+1, \ldots, k+p)$$

Otuda se lako vidi da je determinanta sistema $(Sb)$ različita od nule (pod pretpostavkama (4)), što znači da je taj sistem jednoznačno rešiv.

Na ovaj način smo odredili jedno rešenje sistema (6) — (9) za $m=k+p$. Da li $m$ može biti veće od $k+p$ i za koliko, u ovom slučaju, utvrđuje se proveravanjem da li rešenje sistema (6) — (9), dobijeno za $m=k+p$, zadovoljava jednačine (8) za $q=k+p+1, k+p+2, \ldots$ .

**Formula (3) za $k=2$, $p=3$ i $m=5$.** Koristeći se postupkom iznetim u dokazu teoreme, odredićemo sada neekvidistantnu diferencnu formulu oblika (3) za $k=2$, $p=3$, i $m=5$. Pretpostavimo da za $s_j$ $(j=0, 1, 2, 3)$ i $x$ važi (4) odnosno (5). Sistem $(Sa)$ u ovom slučaju glasi

$$\sum_{j=0}^{3} a_j=0, \quad \sum_{j=0}^{3} a_j s_j^q = -\delta_{2q} \cdot 2! \; (q=1, 2, 3), \tag{10}$$

gde je $\delta_{2q}$ Kronekerov simbol. Rešenje tog sistema je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{-2(s_1+s_2+s_3)}{s_1 s_2 s_3}, & a_1 &= \frac{2(s_2+s_3)}{s_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)}, \\ a_2 &= \frac{2(s_1+s_3)}{s_2(s_2-s_1)(s_2-s_3)}, & a_3 &= \frac{2(s_1+s_2)}{s_3(s_3-s_1)(s_3-s_2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Iz (10) imamo sada $y_1 := \sum_{j=0}^{3} a_j s_j^3 = 0$, a lako se izračunava

$$y_2 := \sum_{j=0}^{3} a_j s_j^4 = 2\,(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3),$$

$$y_3 := \sum_{j=0}^{3} a_j s_j^5 = 2\,(s_1 + s_2)\,(s_1 + s_3)\,(s_2 + s_3).$$

Sistem $(Sb)$ sada glasi

$$\sum_{j=1}^{3} b_j s_j^{q-2} = \frac{-y_{q-2}}{q\,(q-1)}\,(q=3,\,4,\,5),$$

a njegovo rešenje je dato sa

$$b_1 = a_1\,(y_2 - 3s_1^2)/60, \quad b_2 = a_2\,(y_2 - 3s_2^2)/60,$$

(12)

$$b_3 = a_3\,(y_2 - 3s_3^2)/60.$$

Sada se iz (9) dobija

(13) $$b_0 = a_0 y_2/60 + 9/10.$$

Za $-s_1 = s_2$ dobija se iz (11), (12) i (13)

$$-a_0/2 = a_1 = a_2 = -s_2^{-2},\ a_3 = 0,\ b_0 = 5/6,\ b_1 = b_2 = 1/12,\ b_3 = 0,$$

a za $s_2 = 1$ formula (3) svodi se na formulu oblika (1) sa koeficijentima iz (2).

Da za $k=2$, $p=3$ i $a_j$, $b_j\,(j=0,\,1,\,2,\,3)$ dobijene na navedeni način ne može biti $m>5$, vidi se iz sledećeg primera. Neka je $s_1=-1$, $s_2=2$, $s_3=3$. Tada nalazimo $a_1=-5/6$, $a_2=-2/3$, $a_3=1/6$, $b_1=1/72$, $b_2=1/9$, $b_3=-5/72$ i

$$\sum_{j=0}^{3} (a_j s_j^6 + 30 b_j s_j^4) = -37,$$

što znači da jednačina dobijena za $q=6$ iz (8) nije zadovoljena.

## LITERATURA


[1] Bohl, E., Monotonie, *Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Bd. 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[2] Bohl, E., *Zur Anwendung von Differenzenschemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben*. ISNM 32, 25—47, Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart, 1976.

[3] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems*. To appear in Proceedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30 — June 2, 1978, Academic Press. 1978.

[4] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Schemes of Higher Order*. A Summary for Two-Point Boundary Value Problems. To apper in Aequ. Math.

[5] Collatz, L., *The Numerical treatment of differential equations.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1964.

[6] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations,* John Wiley, New York, 1962.

[7] Pflanz, E., *Allgemeine Differenzenausdrücke für die Ableitungen einer Funktion y (x),* Z. angew. Math. Mech., Bd. 20, Nr. 11/12, 379–381, 1949.

*Dragoslav Herceg*

## ON NONEQUIDISTANT DIFFERENCE FORMULAE OF THE HERMITE TYPE

Symmary

In this paper a procedure for determination of nonequidistant difference formulae of the Hermite type

$$\sum_{j=0}^{p} (h^{-k}\ a_j x\,(t_i+s_j h)+b_j x^{(k)}\,(t_i+s_j h))=0\ (h^{m+1-k}),$$

and a corresponding formula for $k=2$, $p=3$, $m=5$ are given. The obtained formula can be used for a discretion of the equation from (KP) at points $t_i$ $(i=1, 2, \dots, n-1)$ of an arbitrary nonequidistant grid $I_h$. A special case of this formula, when $I_h$ is an equidistant grid, is a well known formula ([5]), [6]) of the type (1) with coefficients from (2).