Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Sammelheft der Arbeiten der Naturwissenschaftlich—Matematischen Fakultät Universität Novi Sad, Band 8 (1978)

Dragoslav Herceg

NUMERIČKO REŠAVANJE FREDHOLMOVE INTEGRALNE JEDNAČINE SA NENEGATIVNIM JEZGROM

1. Uvod. Posmatra se integralna jednačina

$$x(s)-\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt=y(s),\quad s\in I=[0,1], \tag{1}$$

u kojoj je $y \in C^2(I)$, a integralni operator K,

$$Kx=\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt,\quad s\in I, \tag{2}$$

je kompaktan operator iz $C(I)$ u $C(I)$.

Kada je jezgro $K(s, t)$ neprekidna funkcija za $s, t \in I$ i ima više neprekidnih izvoda po t, onda se kao veoma efektivan metod za numeričko rešavanje jednačine (1) koristi zamena određenog integrala kvadraturnom formulom. Pritom se koriste tačke $t_0<t_1<\ldots<t_n$, $0\leqslant t_0$, $t_n\leqslant 1$. Time se jednačina (1) svodi na sistem $n+1$ linearne jednačine sa isto toliko nepoznatih $x(t_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$; [1], [3], [5], [7], [8], [10], [11], [12].

U slučajevima kada jezgro $K(s, t)$ ima singularitete, na primer

$$\log|s-t|,\quad |s-t|^a,\ a>-1,\quad \log|\cos s-\cos t|,$$

primena kvadraturnih formula u numeričkom rešavanju jednačina (1) je otežana ili nemoguća. U [2] je izložena metoda, koja se zasniva na uopštenim kvadraturnim formulama, pomoću koje se mogu numerički rešavati i jednačine oblika (1) sa jezgrima koja imaju singularitete.

U § 2 je prikazana ukratko metoda iz [2], koja numeričko rešavanje jednačine (1) svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina. Taj sistem, čija se rešenja koriste za formiranje aproksimacije rešenja jednačine (1), rešava se u § 3. Pod pretpostavkama koje se svode na to da je jezgro $K(s, t)$ nenegativno za $s, t \in I$, sistem iz prethodnog paragrafa se rešava iterativno uz primenu ekstrapolacije kod monotonih iteracionih nizova ([6]). Time se malim brojem iteracija dobija dobra aproksimacija traženog rešenja jednačine (1).

Slučaj kada je jezgro $K(s, t)$ neprekidno zajedno sa nekoliko svojih izvoda, posmatra se u § 4, pri čemu se koristi uopštena trapezna kvadraturna formula iz [2]. Posebno se proučava rešavanje sistema linearnih jednačina, koji odgovara jednačini (1), kada se njegovi koeficijenti izračunavaju približno. U tom slučaju se pokazuje i jedna mogućnost primene teoreme 1 iz [15].

U paragrafu 5 su svedeni rezultati izneti u prethodnim paragrafima, a poslednji paragraf sadrži jedan primer i numeričke rezultate.

2. Numeričko rešavanje jednačine (1). Pretpostavimo da je

$$K(s,t)=H(s,t)\,L(s,t), \tag{3}$$

pri čemu H i L ispunjavaju uslove:

U0. Za svako $s\in I$ $H(s,t)$ je integrabilna funkcija na I i važi

$$H=\|H\|=\sup_{s\in I}\int_0^1 |H(s,t)|\,dt<\infty.$$

U1. $\int_0^1 |H(s_1,t)-H(s_2,t)|\,dt\to 0$ uniformno za $s_1, s_2\in I$ kada $|s_1-s_2|\to 0$.

U2. $L(s,t)$ i $\frac{\partial^2}{\partial t^2}L(s,t)$ su neprekidne funkcije za $s,t\in I$.

Pod navedenim pretpostavkama je integralni operator definisan u (2) kompaktan ([2]). Funkciju H treba birati tako, ako je moguće, da se lako integrali iz razloga koje ćemo navesti kasnije. U skup $C(I)$ uvodimo normu $\|x\|=\sup_{s\in I}|x(s)|$.

2.1. Primena uopštene trapezne formule. Pretpostavimo da je $f\in C^2(I)$ i da je $g(t)$ integrabilna funkcija na I. Označimo sa $\|g\|_1$ određeni integral funkcije $|g(t)|$ sa granicama 0 i 1. Sa $h=n^{-1}$, $n\in N$, $t_j=jh$ $(j=0,1,\ldots,n)$ uopštena trapezna formula glasi

$$\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt=\sum_{j=0}^{n} d_j f(t_j)+E_n(f),$$

sa

$$d_j=\alpha_{j+1}+\beta_j\ (j=0,1,\ldots,n),\ \beta_0=\alpha_{n+1}=0,$$

$$\alpha_j=n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_j-t)\,g(t)\,dt, \tag{4}$$

$$(j=0,1,\ldots,n),$$

$$\beta_j=n\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})\,g(t)\,dt,$$

i

$$|E_n(f)|\leqslant\frac{h^2}{8}\|f''\|\,\|g\|_1.$$

Primenjujući uopštenu trapeznu formulu na integralni operator (2) sa $f(t)=L(s,t)\,x(t)$ i $g(t)=H(s,t)$ dobijamo numerički integralni operator K_n.

(5) $$K_n x=\sum_{j=0}^{n} d_j(s)\,L(s,t_j)\,x(t_j),$$

sa $d_j(s)$ $(j=0,1,\ldots,n)$ iz (4).

Jednačina $(E-K_n)\,x_n=y$ (E je jedinični operator), koja aproksimira jednačinu $(E-K)\,x=y$, tj. jednačinu (1), glasi

(6) $$x_n(s)-\sum_{j=0}^{n} d_j(s)\,L(s,t_j)\,x_n(t_j)=y(s),\quad s\in I.$$

Stavljajući u (6) $s=t_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ dobijamo sistem linearnih jednačina

(7) $$x_n(t_i)-\sum_{j=0}^{n} d_j L(t_i,t_j)\,x_n(t_j)=y(t_i)\ (i=0,1,\ldots,n).$$

Poznavajući rešenje $x_n(t_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ sistema (7) možemo prema (6) odrediti rešenje $x_n(s)$ jednačine $(E-K_n)\,x_n=y$ i oceniti $\|x-x_n\|$, gde je x rešenje jednačine (1). Uvedimo prvo oznake

$$L=\max_{s,\,t\in I}|L(s,t)|,\quad L_2=\max_{s,\,t\in I}\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(L(s,t)\,x(t)).\right|$$

Teorema 1. Neka je $K(s,t)$ oblika (3), pri čemu $H(s,t)$ zadovoljava uslove $U0$ i $U1$, a $L(s,t)$ uslov $U2$. Definišimo K_n $(n\in N)$ prema (5) i pretpostavimo da je $LH<1$. Tada važi:

a) $$\|x-x_n]\leqslant\frac{1}{1-LH}\|Kx-K_n x\|;$$

b) $$\text{Iz } x\in C^2(I) \text{ sledi } \|x-x_n\|\leqslant\frac{h^2H}{8(1-LH)}L_2.$$

Dokaz. Iz (5) imamo

$$\|K_n\|\leqslant L\sup_{s\in I}\left|\sum_{j=0}^{n} d_j(s)\right|\leqslant LH,$$

$$\text{jer je } \sum_{j=0}^{n} d_j(s)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j(s)+\beta_j(s))=\int_0^1 H(s,t)\,dt.$$

Zbog $LH<1$, prema lemi 1.2—1 iz [8], sledi egzistencija operatora $(E-K_n)^{-1}$ i ocena

(8) $$\|(E-K_n)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|K_n\|}\leqslant\frac{1}{1-LH}.$$

Iz $(E-K_n)\,x_n=y$ i $(E-K)\,x=y$ sada dobijamo $x-x_n=(E-K_n)^{-1}(K-K_n)\,x$, a otuda

(9) $$\|x-x_n\|\leqslant\|(E-K_n)^{-1}\|\;\|Kx-K_nx\|\leqslant\frac{1}{1-LH}\,|\,Kx-K_nx\,|.$$

Time je tvrđenje teoreme pod a) dokazano. Ako je $x\in C^2(I)$, onda se na osnovu teoreme 1 iz [2] dobija $\|Kx-K_nx\|\leqslant h^2HL_2/8$, što sa (8) i (9) daje tvrđenje teoreme pod b).

Konstanta L_2 može se odrediti iz (1) pod pretpostavkom da je $\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}K(s,t)$ neprekidna funkcija za $s,t\in I$. Iz (1) tada sledi

(10) $$\left\|\frac{d^i}{ds^i}\,x(s)\right\|\leqslant\|x\|\left\|\int_0^1\frac{\partial^i}{\partial s^i}K(s,t)\,dt\right\|+\left\|\frac{d^i}{ds^i}\,y(s)\right\|,\quad (i=1,2)$$

i zbog (8) iz

(11) $$\|x\|\leqslant\frac{1}{1-LH}\,\|y\|$$

i uslova $U2$ nije teško odrediti L_2.

U specijalnom slučaju kada je $H(s,t)=1$ i kada su funkcije $\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}K(s,t)$ $(v=s,t)$ neprekidne za $s,t\in I$, biće $\alpha_j=\beta_j=h/2$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Time se uopštena trapezna formula svodi na običnu trapeznu formulu. U tom slučaju se tvrđenje pod b) teoreme 1 može dobiti i primenom teoreme 1.4—1 iz [8], ako se umesto Simpsonove kvadraturne formule koristi trapezna.

U [2] je data i uopštena Simpsonova kvadraturna formula, koja se kao i uopštena trapezna formula može koristiti za numeričko rešavanje jednačine (1). Sa odgovarajućim dopunskim uslovima koje zahteva Simpsonova kvadraturna formula, može se formulisati teorema analogna teoremi 1.

3. Rešavanje sistema jednačina (7). Neka je za fiksno $n\in N$ $T=\{1,2,\ldots,n+1\}$. Sistem linearnih jednačina (7) možemo napisati u obliku

(12) $$z=Ax+y,$$

gde je A matrica formata $(n+1)\times(n+1)$ sa elementima

(13) $$a_{ij}=d_{j-1}(t_{i-1})\,L(t_{i-1},t_{j-1})\;(i,j\in T),$$

i

$$z_i=x_n(t_{i-1}),\;y_i=y(t_{i-1}),\;(i\in T).$$

Jednačina (12) se rešava iterativno prema

(14) $$z^{(k)}=Az^{(k)}+y,\quad k=1,2,\ldots$$

sa proizvoljnim $z^{(0)}$. U daljem radu ćemo koristiti sledeću vektorsku i matričnu normu

$$\|z\|=\max_{i\in T}|z_i|,\quad \|A\|=\max_{i\in T}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Lema 1. Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 1. Rada niz $z^{(k)}$, definisan sa (14), konvergira ka rešenju jednačine (12) i važi ocena

$$\|z^{(k)}-z\|\leqslant\frac{LH}{1-LH}\|z^{(k)}-z^{(k-1)}\|.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $\|A\|<1$. Tada tvrđenje leme sledi neposredno iz [9]. Očigledno je

$$\|A\|\leqslant L\max_{i\in T}\sum_{j=0}^{n}|d_j(t_{i-1})|.$$

Kako je

$$|d_j(t_{i-1})|\leqslant|\alpha_{j+1}(t_{i-1})|+|\beta_j(t_{i-1})|\quad(j=0,1,\ldots,n)$$

to je

$$\sum_{j=0}^{n}|d_j(t_{i-1})|\leqslant\int_0^1|H(t_{i-1},t)|\,dt\leqslant H.$$

Otuda je $\|A\|\leqslant LH$ i, zbog pretpostavke $LH<1$, $\|A\|<1$.

Jednu mogućnost bržeg dobijanja dobre aproksimacije rešenja iz jednačine (12), a time i jednačine (1), pruža primena teoreme koja se zasniva na Šauderovoj teoremi o nepokretnoj tački, [6, str. 286]. Da bismo je iskoristili definišimo

(15) $$\delta z^{(k)}=z^{(k)}-z^{(k-1)},\quad k=2,3,\ldots$$

i za fiksno k

(16) $$m=\min_{i\in T}\frac{\delta z_i^{(k)}}{\delta z_i^{(k-1)}},\quad M=\max_{i\in T}\frac{\delta z_i^{(k)}}{\delta z_i^{(k-1)}},$$

sa $z^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots)$ iz (14).

Lema 2. Neka su ispunjeni uslovi teoreme 1 i neka za elemente matrice A iz (12) važi $a_{ij}\geqslant 0$ $(i,j\in T)$. Ako je za neko $k\geqslant 2$ ispunjen uslov

$$0<\delta z^{(k)}<\delta z^{(k-1)}.$$

tada je

$$z^{(k)}+\frac{m}{1-m}\delta z^{(k)}\leqslant z\leqslant z^{(k)}+\frac{M}{1-M}\delta z^{(k)}.$$

Dokaz leme sledi neposredno na osnovu teoreme iz [6, str. 286].

Uslov $a_{ij}\geqslant 0$ $(i,j\in T)$ se može zameniti odgovarajućim uslovima za $L(s,t)$ i $\alpha_j(s)$, $\beta_j(s)$. Tako, na primer, ako su $L(s,t)$ $s,t\in I$, i $\alpha_{j+1}(s)+\beta_j(s)$ istog znaka, uslov $a_{ij}\geqslant 0$ $(i,j\in T)$ je ispunjen. Ovaj uslov se može zadovoljiti i postavljanjem uslova na $L(s,t)$ i $H(s,t)$. Dovoljno je da su L i H istog znaka za $s,t\in I$, što znači da je $K(s,t)\geqslant 0$.

Sa $z^{(0)}=y\geqslant 0$ iz leme 2 dobijamo

$$\left\| z-z^{(k)}-0.5\left(\frac{m}{1-m}+\frac{M}{1-M}\right)\delta z^{(k)}\right\| \leqslant 0.5\left(\frac{M}{1-M}-\frac{m}{1-m}\right)\left\|\delta z^{(k)}\right\|.$$

4. Rešavanje jednačine (12) sa približno izračunatim koeficijentima. U prethodnim paragrafima posmatrali smo faktorizaciju jezgra $K(s, t)$ oblika (3), pod pretpostavkom da je funkcija H integrabilna i da se koeficijenti $\alpha_j(t_i)$, $\beta_j(t_i)$ mogu tačno izračunati. Prema (13), tada se i koeficijenti a_{ij} matrice A iz (12) mogu tačno izračunati. Ukoliko je faktorizacija jezgra takva da se funkcije $H(s, t)$ i $tH(s, r)$ ne integrale lako, pribegava se izračunavanju približnih vrednosti $\bar{\alpha}_j(t_i)$, $\bar{\beta}_j(t_i)$ koeficijenata $\alpha_j(t_i)$ i $\beta_j(t_i)$. U tu svrhu se koriste određene kvadraturne formule, koje zahtevaju neprekidnost nekoliko uzastopnih izvoda funkcije $H(s, t)$ po t.

Do računanja sa približnim vrednostima $\bar{a}_{ij}$ koeficijenata a_{ij} $(i, j\in T)$ može doći i onda kada su poznati integrali funkcija $H(s, t)$ i $tH(s, t)$ po t, ali se njihove vrednosti kao i vrednosti funkcije $L(s, t)$ za različite vrednosti promenljivih $s, t\in I$ ne mogu izračunati tačno.

Pretpostavimo, dakle, da je

$$\begin{aligned} &|\alpha_j(t_i)-\bar{\alpha}_j(t_i)|<\varepsilon, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i=0,1\ldots, n; j=1,\ldots, n) \\ &|\beta_j(t_i)-\bar{\beta}_j(t_i)|<\varepsilon, \end{aligned} \tag{17}$$

gde je $\varepsilon>0$, tj. da je poznata granica apsolutne greške sa kojom se izračunavaju koeficijenti $\bar{\alpha}_j(t_i)$, $\bar{\beta}_j(t_i)$. Neka su $\bar{d}_{j-1}(t_{i-1})$ $(i, j\in T)$ izračunati prema (4) sa $\bar{\alpha}_j(t_{i-1})$ i $\bar{\beta}_j(t_{i-1})$ umesto $\alpha_j(t_{i-1})$ i $\beta_j(t_{i-1})$.

4.1 *Uticaj nejednakosti* (17) *na rešenje jednačine* (12). Posmatrajmo sada jednačinu $z=Bz+y$, gde je B matrica formata $(n+1)\times(n+1)$ sa elementima

$$b_{ij}=\bar{d}_{j-1}(t_{i-1})\,L(t_{i-1}, t_{j-1})\quad (i, j\in T).$$

Lema 3. Neka je $LH<1$ i neka su uslovi (17) ispunjeni za $0<\varepsilon<(1-LH)/2nL$. Obeležimo sa z i $\bar{z}$ rešenja jednačina $z=Az+y$ i $z=Bz+y$ respektivno. Tada važi

$$\|z-\bar{z}\|\leqslant\frac{2\|y\|n\varepsilon L}{(1-LH)(1-LH-2n\varepsilon L)}\,:$$

Dokaz. Jednačina $z=Bz+y$ može se posmatrati kao jednačina $(E-A-\delta A)(z+\delta z)=y$, pri čemu za elemente $(\delta A)_{ij}$ matrice δA važi

$$\begin{aligned} &|(\delta A)_{ij}|\leqslant\varepsilon L,\ (i\in T;\ j=1,\ n+1) \\ &|(\delta A)_{ij}|\leqslant 2\varepsilon L,\ (i\in T; j=2, 3,\ldots, n). \end{aligned} \tag{18}$$

Otuda je

$$\|\delta A\|\leqslant 2n\varepsilon L. \tag{19}$$

Zbog $\| A \| \leqslant LH < 1$ postoji $(E-A)^{-1}$ i važi

$$\| (E-A)^{-1} \leqslant \frac{1}{1-LH}\,. \tag{20}$$

Iz (19), (20) i pretpostavke leme sledi

$$\| \delta A \| < \frac{1}{\| (E-A)^{-1} \|}\,,$$

te, na osnovu teoreme 3 iz [9, str. 37], imamo

$$\frac{\| \delta z \|}{\| z \|} \leqslant \frac{\| (E-A)^{-1} \| \; \| \delta A \|}{1 - \| \delta A \| \; \| (E-A)^{-1} \|}\,.$$

Iz poslednje nejednakosti i $\| z \| \leqslant \| (E-A)^{-1} \| \; \| y \|$ sledi tvrđenje leme.

Ako se $\bar{\alpha}_j(t_i)$, $\bar{\beta}_j(t_i)$ izračunavaju pomoću Njutn-Kotesovih kvadraturnih formula, mogu se ispuniti uslovi (17) za unapred dato $\varepsilon > 0$, pod uslovima koje ćemo navesti.

Označimo sa $S_m(f, a, b)$ vrednost integrala $\int_a^b f(t)\,dt$ dobijenu Njutn-Kotesovom formulom reda N, sa podelom intervala $[a, b]$ na m podintervala. Ova formula je tačna za polinome reda $\leqslant q$, gde je $q=N$ za N parno i $q=N+1$ za N neparno. Za trapeznu formulu je $N=1$, a za Simpsonovu $N=2$. Neka $p(t)$ polinom reda $\leqslant q$. Uvedimo oznake

$$S_{2m}(\alpha, i, j) = S_{2m}\left((t_j - t)\, H(t_i, t) + p(t),\; t_{j-1},\; t_j \right),$$

$$S_{2m}(\beta, i, j) = S_{2m}\left((t - t_{j-1})\, H(t_i, t) + p(t),\; t_{j-1},\; t_j \right),$$

$$G_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(t)\,dt,$$

i uzmimo da je

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}_j(t_i) = S_{2m}(\alpha, i, j) - G_j\,, \\ &\qquad\qquad (i=0, 1, \ldots, n;\, j=1, 2, \ldots, n) \\ &\bar{\beta}_j(t_i) = S_{2m}(\beta, i, j) - G_j. \end{aligned} \tag{21}$$

Lema 4. Neka su za svako $s \in I$ funkcije

$$\frac{d^{q+1}}{dt^{q+1}} \left[(t_j - t)\, H(s, t) + p(t) \right] \quad (j=0, 1, \ldots, n)$$

neprekidne po t i neka imaju konstantan znak na I. Tada za $\varepsilon > 0$ iz

$$| S_{2m}(r, i, j) - S_m(r, i, j) | < \varepsilon / n, \quad (r=\alpha, \beta;\, j=1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

sledi (17).

Dokaz. Kako je $\alpha_j(s)=n\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}(t_j-t)\,H(s,\ t)\,\mathrm{d}t$, to primenjujući teoremu 3.1 iz [14] na funkcije $(t_j-t)\,H(t_j,\ t)+p(t)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ sledi iz (22)

$$|\,h(\alpha_j(t_i)+G_j)-hS_{2m}(\,(t_j-t)\,H(t_i,\ t)+p(t)\,)\,|<\varepsilon/n,$$

odnosno

$$|\,\alpha_j(t_i)-(S_{2m}(\alpha,\ i,\ j)-G_j)|<\varepsilon,$$

što je prvi deo uslova (17). Drugi deo uslova (17) se dobija analogno. Dovoljno je primetiti da su funkcije $\dfrac{\mathrm{d}^{q+1}}{\mathrm{d}t^{q+1}}[(t-t_{j-1}).\ H(s,t)-p(t)]$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ neprekidne po t i da imaju konstantan znak na I.

U prethodnoj lemi može biti i $p(t)=0$.

4.2. *Iterativno rešavanje sistema* (12). Pretpostavimo, kao u 4.1, da su elementi matrice A iz (12) izračunati približno sa $\bar{\alpha}_j(t_i)$ i $\bar{\beta}_j(t_i)$ umesto sa $\alpha_j(t_i)$ i $\beta_j(t_i)$ i da su uslovi (17) ispunjeni za neko $\varepsilon>0$. Time jednačina (12) postaje $x=(A+\delta A)\,x+y$, a matirca δA zadovoljava (18) i (19).

Uporedo sa jednačinom $x=Ax+y$ posmatrajmo jednačinu

$$z=(A+\rho E)\,z+y, \tag{23}$$

gde je $\rho=2n\varepsilon L$. Jednačinu (23) rešavamo iterativno prema

$$z^{(k)}=(A+\rho E)\,z^{(k-1)}+y,\ z^{(0)}=y,\ k=1,\ 2,\ \ldots \tag{24}$$

Za $z^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ iz (24) definišimo $\delta z^{(k)}$ prema (15).

U [15] je pokazana mogućnost upoređivanja rešenja jednačina (12) i (23), tj. jedna aproksimacija rešenja x jednačine (12) pomoću $z^{(k)}$. Da bismo primenili teoremu 1 iz [15], uvedimo neke oznake. Neka su za fiksno $k\geqslant 2$ brojevi m i M određeni prema (16) i neka je

$$I_z=\left[z^{(k)}+\frac{m}{1-m}\,\delta z^{(k)},\ z^{(k)}+\frac{M}{1-M}\,\delta z^{(k)}\right],$$

$$\bar{z}^{(k)}=z^{(k)}+0.5\left(\frac{m}{1-m}+\frac{M}{1-M}\right)\delta z^{(k)}, \tag{25}$$

$$C=\max_{u\in I_z}\|\,u\,\|.$$

Teorema 2. Neka su elemente matrice A iz (12), date u (13), važi $a_{ij}\geqslant 0$ $(i,j\in T)$ i neka je $\rho<1-LH$. Tada, ako je za neko $k\geqslant 2$ $0<\delta z^{(k)}<\delta z^{(k-1)}$, imamo:

a) Jednačina (23) ima u I_z jedinstveno rešenje z.

b) Za rešenje x jednačine $x=Ax+y$ važi

$$\|\,\bar{z}^{(k)}-x\,\|\leqslant\frac{C\cdot\rho}{1-LH}+\|\,z-z^{(k)}\,\|.$$

Dokaz ove teoreme sledi neposredno iz [15], teorema 1. Veličina C se može lako izračunati, a isto tako i ocena za $\| z-\bar{z}^{(k)} \|$ iz

$$\| \bar{z}-z^{(k)} \| \leqslant \frac{\| y \|}{1-LH-\rho}+\| \bar{z}^{(k)} \|.$$

Ako je $y \geqslant 0$, onda iz b) dobijamo

$$\|\bar{z}^{(k)}-x\| \leqslant \frac{\rho}{1-LH} \| z^{(k)}+\frac{M}{1-M} \delta z^{(k)} \|+ \tag{26}$$

$$+0.5\left(\frac{M}{1-M}-\frac{m}{1-m}\right) \| \delta z^{(k)} \|.$$

5. Zaključna razmatranja. Pri numeričkom rešavanju jednačine (1) težimo da odredimo takvu aproksimaciju x_n njenog rešenja x da odstupanje $\| x-x_n\|$ bude što manje i da je $x_n(s)$ moguće izračunati za svako $s \in I$. Na osnovu izloženog u paragrafima od 1 do 4 razlikujemo dva osnovna slučaja.

I. Koeficijenti $d_j(s)$ su određeni tačno, kao funkcije od $s \in I$, a elementi a_{ij} iz (13) su određeni tačno ili približno.

II. Koeficijenti $d_j(s)$ su određeni samo u tačkama $s=t_i$ $(i=0, 1, \ldots n)$ sa poznatim granicama apsolutnih grešaka.

I. Kao aproksimacija rešenja x jednačine (1) uzima se

$$\bar{x}_n(s)=\sum_{j=0}^{n} d_j(s) L(s, t_j) u_j+y(s), \ s \in I, \tag{27}$$

gde je u neka aproksimacija rešenja z jednačine (12). Za $u=z$ pisaćemo $\bar{x}_n(s)= =x_n(s)$. Tada je

$$\| x-\bar{x}_n \| \leqslant \| x-x_n \| + \| x_n-\bar{x}_n \|. \tag{28}$$

Ocena za $\| x-x_n \|$ je data u teoremi 1, a ocena za $\| x_n-\bar{x}_n \|$ zavisi od izbora apsoksimacije u, što se vidi iz relacije

$$\| x_n-\bar{x}_n \| \leqslant \sum_{j=0}^{n} | d_j(s) L(s, t_j)(z_j-u_j) | \leqslant LH \| z-u \|.$$

I.1. Koeficijenti a_{ij} su izračunati tačno.
Za $u=z$ biće $\| x_n-\bar{x}_n\|=0$, $x_n=\bar{x}_n$ i (28) se svodi na rezultat teoreme 1. Ako je $u=z^{(k)}$, sa $z^{(k)}$ iz (14), ocena za $\| z-u\|$ je data u lemi 1, a za $u=\bar{z}^{(k)}$, sa $\bar{z}^{(k)}$ prema (25) i $z^{(k)}$ iz (14), ocena za $\| z-u \|$ je data u lemi 2.

I.2. Koeficijenti a_{ij} su izračunati približno sa greškom manjom od $2L\varepsilon$.

Za $u=\bar{z}$ iz leme 3 ocena za $\| u-z\|$ je data u istoj lemi a za $u=\bar{z}^{(k)}$ iz teoreme 2 ocena za $\| u-z \|$ je data u toj teoremi.

II. U ovom slučaju se aproksimacija rešenja x jednačine (1) posmatra ponovo u obliku (27), ali se za svako $s \in I$, $s \neq t_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ mora odrediti približna vrednost za $d_j(s)$, što je prilično komplikovano. Neka je $\bar{d}_j(s)$ za fiksno $s \in I$ približna vrednost za $d_j(s)$ i neka je

$$\bar{x}_n(s) = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j(s) L(s, t_j) u_j + y(s). \tag{29}$$

Ako se $\bar{d}_j(s)$ računa pod pretpostavkom da je uslov (17) ispunjen za neko $\varepsilon > 0$, imaćemo $|\bar{d}_j(s) - d_j(s)| \leqslant 2\varepsilon$. Otuda je

$$|x(s) - \bar{x}_n(s)| \leqslant |x(s) - x_n(s)| + |x_n(s) - \bar{x}_n(s)|$$

$$\leqslant |x - x_n| + \sum_{j=0}^{n} |\bar{d}_j(s) L(s, t_j)(z_j - u_j)| + L \sum_{j=0}^{n} |\bar{d}_j(s) - d_j(s)| \, |z_j|$$

$$x(s) - \bar{x}_n(s)| \leqslant \|x - x_n\| + \|z - u\| L(H + 2\varepsilon) + 2n\varepsilon \|z\| L.$$

U zavisnosti od izbora aproksimacije u ocena za $\|z - u\|$ se dobija kao u slučaju I.2, a ocena za $\|z\|$ je data u dokazu leme 3.

6. Primer i numerički rezultati. Rešavana je jednačina (1) sa $K(s, t) = 1/(1 + (s-t)^2)$ i $y(s) = (0.5 - s) \ln((1 + (s-1)^2)/(1 + s^2)) + (s - s^2)$ (arctg $((1 + s(s-1))^{-1}) - 1)$.

Integralne jednačine sa istim jezgrom nalazimo u [3], [4], [7]. Takvo jezgro se javlja i u Loveovoj jednačini iz elektrostatike, [4], [7].

Sa $H(s, t) = K(s, t)$ i $L(s, t) = 1$, prema (4) i (13), dobija se

$$\alpha_j(t_{i-1}) = (j - i + 1) \operatorname{arctg}(n/(n^2 + (i-j)(i-j-1))) + $$
$$+ 0.5 n \ln((n^2 + (i-j)^2)/(n^2 + (i-j-1)^2))$$

$$\beta_i(t_{i-1}) = -\alpha_j(t_{i-1}) + \operatorname{arctg}(n/(n^2 + (i-j)(i-j-1))),$$

$$i \in T, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$a_{i1} = \alpha_1(t_{i-1}), \ a_{in+1} = \beta(t_{i-1}) \ (i \in T)$$

$$a_{ij} = \alpha_j(t_{i-1}) + \beta_{j-1}(t_{i-1}) \ (i \in T; \ j = 2, 3, \ldots, n).$$

Dalje je, $H \leqslant 0.9273$, $L = 1$, $\|y\| \leqslant 13.0330$, $\|y''\| \leqslant 11.4293$, $\left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} K(s, t) \right\| \leqslant 4$.

Na osnovu toga i (10) i (11) sledi $\|x\| \leqslant 179.2526$ i $L_2 \leqslant 728.4395$.

Na osnovu teoreme 1 se dobija $\|x - x_n\| \leqslant 1161.34/n^2$. Vidimo da je prethodna ocena dobra tek za velike vrednosti broja n (za $n = 100$ je $\|x - x_n\| \leqslant 0.1162$). U tom slučaju sistem (12) postaje glomazan, što opravdava iterativni postupak u rešavanju tog sistema. Kako se u svim ocenama za $\|x - \bar{x}_n\|$ sa $\bar{x}_n$ iz (28) i (29) pojavljuje $\|x - x_n\|$, to ćemo upoređivati samo ocene za $\|u - z\|$ sa različitim aproksimacijama u.

Iz praktičnih razloga je uzeto $n=20$. Jednačina (12) koja odgovara posmatranoj integralnoj jednačini, rešavana je u slučaju I.1 prema (14), a u slučaju I.2 prema (24). Tačno rešenje date integralne jednačine $x(s)=s^2-s+1$ je takođe izračunato u tačkama $s_i=i/20\,(i=0,\ 1, \ldots, 20)$. U slučaju I.1 za $k=4$ je dobijena tablica 1 i ocene

$$\| z-z^{(4)} \| \leqslant 7.11\cdot 10^{-1}, \quad \| z-\bar{z}^{(4)} \| \leqslant 3.84\cdot 10^{-7}.$$

U slučaju I.2 vrednosti za $\bar{\alpha}_j(t_j)$, i $\bar{\beta}_j(t_i)$ su računate pomoćnu trapezne formule prema (21) sa $p(t)=6t^2$ i $\varepsilon=10^{-6}$. Za $k=4$ prema (26) je izračunato

$$\| \bar{z}^{(4)}-z \| \leqslant 5.52\cdot 10^{-4}.$$

s	z^4	$\bar{x}^4$	$x(s)$	$\lvert x(s)-\bar{x}^4 \rvert$
.00	.6587787D 00	.1002714D 01	.1000000D 01	.2713747D-02
.05	.6005877D 00	.9552987D 00	.9525000D 00	.2798733D-02
.10	.5480682D 00	.9128782D 00	.9100000D 00	.2878212D-02
.15	.5013559D 00	.8754515D 00	.8725000D 00	.2951449D-02
.20	.4605795D 00	.8430173D 00	.8400000D 00	.3017301D-02
.25	.4258575D 00	.8155747D 00	.8125000D 00	.3074671D-02
.30	.3972956D 00	.7931227D 00	.7900000D 00	.3122722D-02
.35	.3749840D 00	.7756610D 00	.7725000D 00	.3161015D-02
.40	.3589944D 00	.7631888D 00	.7600000D 00	.3188782D-02
.45	.3493791D 00	.7557055D 00	.7525000D 00	.3205465D-02
.50	.3461707D 00	.7532112D 00	.7500000D 00	.3211205D-02
.55	.3493791D 00	.7557054D 00	.7525000D 00	.3205452D-02
.60	.3589944D 00	.7631888D 00	.7600000D 00	.3188821D-02
.65	.3749840D 00	.7756611D 00	.7725000D 00	.3161032D-02
.70	.3972956D 00	.7931228D 00	.7900000D 00	.3122741D-02
.75	.4258575D 00	.8155747D 00	.8125000D 00	.3074668D-02
.80	.4605795D 00	.8430173D 00	.8400000D 00	.3017340D-02
.85	.5013561D 00	.8754516D 00	.8724999D 00	.2951648D-02
.90	.5480688D 00	.9128787D 00	.9100001D 00	.2878655D-02
.95	.6005881D 00	.9552991D 00	.9525000D 00	.2799073D-02
.100	.6587792D 00	.1002714D 01	.1000000D 01	.2714169D-02

Tablica 1.

Sa istim ε iz leme 4 se dobija $\| \bar{z}-z \| \leqslant 9.87\cdot 10^{-2}$, pri čemu je $\bar{z}$ jednako teško odrediti kao i z.

Za aproksimaciju (29) dobijene su za $S(u)=\| z-u \| L(H+2\varepsilon)+2n\varepsilon \| z \| L$ sledeće ocene

$$S(\bar{z}^{(4)}) \leqslant 7.17\cdot 10^{-3}, \quad S(\bar{z}) \leqslant 9.87\cdot 10^{-2}.$$

Na osnovu iznetih rezultata vidi se da je u ovom primeru primena leme 2 i teoreme 2 dala znatno bolje rezultate u odnosu na primenu lema 1 i 3. Relativno velika odstupanja $\lvert x(s_i)-\bar{z}_i^{(4)} \rvert$ (poslednja kolona u tablici 1) posledica su male vrednosti broja n $(=20)$ i malog broja iteracija $(k=4)$.

LITERATURA

[1] Anselone, P. M., *Collectively Compact Operator Approximation Theory*, Prentice Hall, 1971.

[2] Atkinson, K. E., *The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, SIAM J. Num. Anal. 4 (1967), pp. 337–348.

[3] Atkinson, K. E., *An Automatic Program for Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, ACM Transaction on Mathematical Software, Vol. 2, No. 2, June 1976. pp. 154–171.

[4] Baker, C. T. H., *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1977.

[5] Brakhage, H., *Über die numerische Behandlung von Integralgleichungen nach der Quadraturformelmethode*, Numer. Math. 2 (1960), 183–196.

[6] Collatz, L., *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968.

[7] Delves, L. M., and J. Walsh, *Eds. Numerical Solution of Integral Equations*, Clarendon Press, New York, 1974.

[8] Gavurin, M. K., *Lekcii po metodam vyčislenij*, Nauka, Moskva, 1971.

[9] Isaacson, E., and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley and Sons, Inc. New York London Sydney, 1966.

[10] Kantorovič, L. V., G. P. Akilov, *Funkcional'nij analiz*, Nauka, Moskva, 1977.

[11] Noble, B., *Error Analysis of Collocation Methods for Solving Fredholm Integral Equations*, Topics in Numerical Analysis, Edited by J. J. H. Miller, Academic Press, London and New York, 1973, pp. 211–232.

[12] Noble, B., *The Numerical Solution of Integral Equations*, The state of the Art in Numerical Analysis, Edited by D. A. H. Jacobs, Academic Press, London New York San Francisko 1977, pp. 915–966.

[13] Rowland, J. H., Y. L. Varol, *Exit Criteria for Simpson's Compund Rule, Math.* Comp. Vol. 26, No. 119 (1972), 699–703.

[14] Rowland, J. H., G. J. Miel, *Exit Criteria for Newton-Cotes Quadrature Rules*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 14, No. 6 (1977), 1145–1150.

[15] Surla, K., D. Herceg, *Some possibilities in solving operator equations using non stationary iterative methode*, Math. Ves., 1 (14) (29), sv. 4, 1977, 371–377.

Dragoslav Herceg

DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG VON FREDHOLMISCHEN INTEGRALGLEICHUNG MIT NICHTNEGATIVEN KERN

Zusammenfassung

Die Arbeit befasst sich mit der numerischen Bechandlung von linearen Integralgleichung zweiter Art (1) nach verallgemeinerte Quadraturformel aus [2]. Durch (6) wird (1) in lineares Gleichungssystem (7) übergeführt. Dies es Gleichungssystem lost man in § 3 durch iterativen Verfahren (14) mit Anwendung die Extrapolation mit Fehlerabschätzung bei monotonen Iterationsfolge ([6]).

Im Fall, dass für Koeffizienten des Systems (7) nur Näherungswerte bekannt sind, bestimmt man in § 4 die Näherungslösung von (7) durch den Satz 1 aus [15].

In § 5 ist mit Näherungslösungen von (7) einige Näherungslösungen von (1) und entsprechende Fehlerabschätzungen gegeben, und in § 6 ein Beispiel.