Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta — Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 8 (1978)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 8 (1978)

Katarina Surla

O IZLAZNOM KRITERIJUMU ZA INTERPOLACIONE KVADRATURNE FORMULE

U mnogim standardnim programima za numeričku integraciju koristi se pravilo Runge-a kao izlazni kriterijum [1]. U [2] i [3] se posmatraju Newton-Cotes-ove kvadraturne formule sa ravnomernim rasporedom čvorova i daju klase funkcija za koje taj kriterijum uvek važi kao i klase funkcija za koje on samo asimptotski važi. Ovaj rad uopštava neke rezultate iz [2] i [3].

Interpolacione kvadraturne formule za približno izračunavanje integrala

$$I(f)=\int_a^b (x)\,dx \tag{1}$$

imaju oblik

$$I(f)\approx S_m(f)=\sum_{q=1}^{n} s_q(f),\quad \text{gde je} \tag{2}$$

$$s_q(f)=\sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)\approx \int_{a_{q-1}}^{a_q} f(x)\,dx,$$

$$a_{q-1}=x_1<x_2<\ldots<x_n=a_q,\quad a_q=\varphi\left(\frac{q}{m}\right),$$

$\varphi(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija koja zadovoljava uslov $\varphi(0)=a$, $\varphi(1)=b$. Koeficijenti A_j su određeni u [1].

Formula (2) je tačna za polinome stepena $p\leqslant n$, ako je n neparno, i $p\leqslant n-1$ ako je n parno.

T e o r e m a 1. Neka je $f\in C^{l+1}[a,b]$. Neka je za izračunavanje integrala $I(f)$ primenjena kvadraturna formula (2) tačna za polinome stepena p, $p\leqslant l-1$ i neka je

$$K_l=\int_0^1 f^{(l)}(\varphi(t))\,(\varphi'(t))^{l+1}\,dt\neq 0.\quad \text{Tada}$$

a) postoji m_0 takvo da za svako $m_1\geqslant m_0$ i $m_2\sim\lambda m_1$, $\lambda^l\geqslant 2$, važi nejednakost

$$|I(f)-S_{m2}(f)|\leqslant|S_{m1}(f)-S_{m2}(f)| \tag{3}$$

b) postoji takvo n_0 da za svako $n_1 \geqslant n_0$ i $n \sim \lambda n_1$, $n_3 \sim \varsigma n_2$, $\lambda > 1$ važi nejednakost

$$| I(f)-S_{n_3}(f) | \leqslant \frac{(S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f))^2}{| S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f) |} \cdot \frac{\lambda^l}{\lambda^l-1}$$

Dokaz.

a) Prema [1] (§ 13. i § 11.) je

$$I(f)-S_{m_1}(f)=\gamma_l 2^{-l-1} m_1^{-l} K_l + o(m_1^{-l}), \quad \gamma^l \neq 0 \tag{3}$$

pa je

$$S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)=P_l(m_1^{-l}-m_2^{-l})+o(m_2^{-l}), \quad \text{gde je} \tag{4}$$

$$P_l=\gamma_l K_l 2^{-l-1}$$

$$\lim_{m_1 \to \infty} \frac{I(f)-S_{m_2}(f)}{S_{m_1}(f)-S_{m_2}(f)} = \frac{1}{\lambda^l-1} \tag{5}$$

čime je tvrđenje dokazano.

b) Prema (4) je

$$\lim_{n_1 \to \infty} \frac{S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f)}{S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f)} = \lambda^l$$

a prema (5)

$$\lim_{n_1 \to \infty} \frac{I(f)-S_{n_3}(f)}{S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f)} = \frac{1}{\lambda^l-1}, \text{ pa je}$$

$$\lim_{n_1 \to \infty} (I(f)-S_{n_3}(f)) \frac{S_{n_2}(f)-S_{n_1}(f))}{(S_{n_3}(f)-S_{n_2}(f))^2} = \frac{\lambda^l}{\lambda^l-1},$$

čime je tvrđenje dokazano.

Teorema 1. objedinjuje i uopštava teoreme 3. [2] i 4.1. [3]. Naime, u slučaju ravnomernog rasporeda čvorova x_j, na intervalu $[a_{q-1}, a_q]$, formule (2) su Newton-Cotes-ove. Za $\varphi(t)=a+(b-a)t$, uslov $K_l \neq 0$ svodi se na uslov $f^{(l-1)}(a) \neq f^{(l-1)}(b)$ teoreme 4.1. [3], te se za $m_2=2m_1$ tvrđenje a) teoreme 1. svodi na teoremu 4.1. [3]. Ova teorema daje nešto drugačiju i za praktičnu primenu pogodniju asimptotsku ocenu. Delenjem (3) sa $I(f)-S_{m_2}(f)$ za $m_2=2m_1$ i prelaskom na graničnu vrednost dobijamo asimptotsku ocenu teoreme 4.1. [3].

Ako je u (2) $n=3$, imamo Simpsonovu kvadraturnu formulu pa za $m_2=2m_1$ dobijamo tvrđenje teoreme 3. [2] uz oslabljenje pretpostavke na izvode podintegralne funkcije.

Na osnovu teoreme 1. možemo formulisati dva izlazna kriterijuma za kvadraturne formule (2).

I $\quad | S_{m_1}(f)-S_{m_2}(f) | \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ unapred zadato $m_2=\lambda m_1$, $\lambda^l \geqslant 2$)

II $\quad \begin{cases} \text{a) } (S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f))/(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)) \text{ se ponaša kao stepen broja } \lambda \\ \text{b) } (S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2/ | S_{m_1}(f)-S_{m_2}(f) | \leqslant \varepsilon \end{cases}$

($\varepsilon > 0$ unapred zadato, $m_2=\lambda m_1$, $m_3=\lambda m_2$, $\lambda > 1$)

O izboru najpogodnijeg parametra λ može se naći u [1]. Statistički se popokazuje da je $\lambda=e$ najbolje u pogledu obima računanja, ali je za praktičan rad pogodnije $\lambda=2$ pa se najčešće koristi.

Teorema 2. Neka su zadovoljene pretpostavke teoreme 1.

a) Neka je za prekid računanja po formulama (2) korišćen kriterijum I. Tada važi ocena:

$$I(f)-S_{m_2}(f)=\frac{S_{m2}(f)-S_{m1}(f)}{\lambda^l-1}+o(m_3^{-l}) \tag{6}$$

b) Neka je za prekid računanja po formulama (2) korišćen kriterijum II. Tada važi ocena:

$$I(f)-S_{m_3}(f)=\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_3}(f)-S_{m_1}(f)}\,\frac{\lambda^l}{\lambda^l-1}+o(m_2^{-l}) \tag{7}$$

Dokaz. Prvi deo tvrđenja je dokazan u [1] str. 168. Dokazaćemo drugi deo. Prema (4) je

$$P_l=(S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)+o(m_2^{-l}))/(m_1^{-l}-m_2^{-l})$$

$$P_l=(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)+o(m_3^{-l}))/(m_2^{-l}-m_3^{-l})$$

Izjednačavanjem ovih izraza dobijamo

$$S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)+o(m_2^{-l})=\lambda^l(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))+o(m_3^{-l}) \tag{8}$$

Dalje je prema (8) i (6)

$$\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)}=\frac{(I(f)-S_{m_3}(f)+o(m_3^{-l}))(\lambda^l-1)}{\lambda^l+o((\lambda^{2l}m_1^l(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)))^{-1})} \tag{9}$$

Prema (4) i (9) je

$$(I(f)-S_{m_3}(f))(\lambda^l-1)=\lambda^l\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)}+(\lambda^l-1)\,o(m_3^{-l})+$$

$$+o\left(\frac{S_{m_2}(f)-S_{m_3}(f)}{\lambda^{2l}m_1^l(S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f))}\right)=\lambda^l\frac{(S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f))^2}{S_{m_3}(f)-S_{m_1}(f)}+o(m_3^{-l})$$

jer je
$$\frac{S_{m_3}(f)-S_{m_2}(f)}{S_{m_2}(f)-S_{m_1}(f)}\sim\lambda^{-l}.$$

Kriterijum II ima izvesne prednosti u odnosu na kriterijum I (vidi [2]), iako su za njegovu primenu potrebne tri aproksimacije integrala. Uslov a) nam pri tom pokazuje kada je veličina $o(m_3^{-l})$ toliko mala da asimptotska formula daje dobru aproksimaciju, a uslov b) zahteva da asimptotska procena greške ne prelazi veličinu $\varepsilon\cdot\lambda^l(\lambda^l-1)^{-1}$. U praksi se obično uzima $\lambda^l\approx\lambda^l-1$.

LITERATURA

[1] Bahvalov N. S., *Čislenye metody I*, Moskva, 1975.

[2] Rowland J. H. and Varol Y. L., *Exit criteria for Simpson's compound rule*, Math. of comp. vol 26. No. 119. July 1972.

[3] Rowland J. H. and Miel G. J., *Exit criteria for Newton-Cotes quadrature rules*, Siam J. Numer. Anal. Vol. 14. No 6. December 1977.

Katarina Surla

ON THE EXIT CRITERIA FOR THE INTERPOLATION QUADRATURE FORMULAE

Summary

The exit criteria for Simpson's equation [2] have been extended to any interpolation quadrature formula and the asymptotic estimation of error has been given.