Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 9 (1979)

S. Pilipović

KONVOLUCIJA I LAPLACE-ova TRANSFORMACIJA U L'

1. U radu [4] je ispitivan prostor L' sa stanovišta sekvencijalne teorije uopštenih funkcija [3]. U ovom radu ćemo uvesti operaciju konvolucije u prostor L' i ispitaćemo vezu između te operacije i Laplace-ove transformacije.

Niz funkcija

$$\psi_n(x)=e^{-x/2}L_n(x); \qquad L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m-n}(-x)^m/m!, \qquad n\in N_0,$$

čini Laguerre-ovu kompletnu ortonormiranu bazu prostora $L_2(0,\infty)$. Te funkcije su sopstvene funkcije za operator

$$\mathcal{R}=e^{x/2}Dxe^{-x}De^{x/2} \quad (D \text{ je izvod})$$

odnosno važi

$$\mathcal{R}\psi_n=-n\psi_n, \qquad n\in N_0.$$

Niz parcialnih suma

$$(*) \qquad \{\sum_{n=0}^{\nu}a_n\psi_n\}, \qquad \nu\in N_0,$$

se naziva $\mathcal{R}$-fundamentalan ako postoji u kvadratnom smislu kovergentan niz

$$\{\sum_{n=0}^{\nu}c_n\psi_n\}, \qquad \nu\in N_0,$$

iz $L_2(0,\infty)$ i ako postoji $k\in N_0$ tako da je

$$\mathcal{R}^k\sum_{n=1}^{\nu}c_n\psi_n=\sum_{n=1}^{\nu}a_n\psi_n, \qquad \nu\in N.$$

Kažemo da su dva $\mathcal{R}$-fundamentalna niza

$$\{\sum_{n=0}^{\nu}a_n\psi_n\} \quad \text{i} \quad \{\sum_{n=0}^{\nu'}b_n\psi_n\}$$

ekvivalentna ako je $a_n=b_n$ za svako $n\in N_0$.

Dobijene klase ekvivalencije u odnosu na uobičajene operacije sabiranja i množenja sa skalarom čine prostor uopštenih funkcija L'. Elemenat f iz L' predstavljen $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom $(*)$ označavamo sa

$$\mathcal{R}^kF+c_0\psi_0 \quad \text{gde je} \quad F\overset{2}{=}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n.$$

Ako je $f \in L'$ predstavljen $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom (*), onda definišemo $\mathcal{R}f$ kao elemenat iz L' koji je reprenzetovan sa $\mathcal{R}$-fundamentalnim nizom

$$\{\mathcal{R} \sum_{n=0}^{\nu} a_n \psi_n\}, \qquad \nu \in N_0.$$

Kažemo da niz uopštenih funkcija f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$ ako postoji niz kvadrat integrabilnih funkcija F_n i kvadrat integrabilna funkcija F tako da za neko $k \in N_0$ važi

$$\mathcal{R}^k F_n + c_{n0}\psi_0 = f_n; \qquad \mathcal{R}^k F + c_0 \psi_0 = f$$

$$F_n \xrightarrow{2} F; \qquad c_{n0} \to c_0, \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

$\mathcal{R}$-fundamentalan niz (*) koji predstavlja uopštenu funkciju f konvergira ka f i pišemo

$$f \stackrel{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n.$$

Ako nema mesta pogrešnoj interpretaciji umesto $\stackrel{L'}{=}$ ćemo pisati $=$.

Na kraju ovog odeljka ćemo izložiti tvrđenja koja su dokazana u [4] a koja će nam koristiti u ovom radu.

Tvrđenje A *Ako za neko* $k \in N_0$ *i niz kompleksnih brojeva* a_n, $n \in N_0$,

(i) $$|a_n| < M\hat{n}^k \qquad (M>0, \hat{n}=n \text{ za } n \neq 0 \text{ i } \hat{n}=1 \text{ za } n=0)$$

onda postoji uopštena funkcija $f \in L'$ *tako da je*

(ii) $$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n$$

Obrnuto ako $f \in L'$ *onda postoji niz kompleksnih brojeva* a_n, $n \in N_0$, *koji za neko* $k \in N_0$ *zadovoljava* (i) *tako da važi* (ii).

Tvrđenje B *Potrebon i dovoljan uslov da niz*

$$f_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \psi_p$$

iz L' *konvergira ka*

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p$$

jeste da za neko $k \in N_0$ *i* $M>0$ *važi*

$$|a_{np}| < M\hat{n}^k \text{ i } a_{np} \to a_p \text{ za svako } p \in N_0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Tvrđenje C *Ako za neprekidnu funkciju* G *definisanu u intervalu* $(0, \infty)$ *postoji* $k \in N_0$ i $M>0$ *tako da važi*

$$(1+x)^{-k} \, |G| < M$$

onda $G \in L'$.

Ako za niz neprekidnih funkcija G_n *i neprekidnu funkcijv* G *koje su definisane* u $(0, \infty)$ *postoji* $k \in N_0$ i $M>0$ *tako da je*

$$(1+x)^{-k} \mid G_n \mid <M \text{ } i \text{ } (1+x)^{-k}G_n \rightrightarrows (1+x)^{-k}G \text{ } kad \text{ } n \to \infty$$

onda $G_n \xrightarrow{L'} G$. ($\rightrightarrows$ označava uniformu konvergenciju).

2. Na osnovu formula

$$\frac{d}{dx}\int_0^x L_n(x-t)\, L_m(t)\, dt = L_{n+m}(x) \text{ i } \frac{d}{dx}(L_n - L_{n+1}) = L_n$$

koje važe za Laguerre-ove polinome ([2]), lako se pokazuje da važi

$$\int_0^x \psi_n(x-t)\, \psi_m(t)\, dt = \psi_{n+m} - \psi_{n+m+1}.$$

U prostoru L' ćemo operaciju konvolucije definisati na sledeći način: Ako je

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n \quad \text{i} \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n$$

onda je

$$f \odot g = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q - \sum_{p+q=n-1} a_p\, b_q \Big)\, \psi_n \qquad \Big(\sum_{p+q=-1} = 0 \Big).$$

Na osnovu tvrđenja A sledi da je konvolucija unutrašnja operacija. Ova operacija je komutativna i asocijativna.

Tvrđenje 1. *Ako nizovi* f_n *i* g_n *iz* L' *konvergiraju u smislu konvergencije u* L' *ka* f *odnosno* g *onda*

$$f_n \odot g_n \xrightarrow{L'} f \odot g \quad kad \quad n \to \infty.$$

Dokaz: Definicija konvolucije uopštenih funkcija iz L' je izvedena na osnovu konvolucije $\mathcal{R}$-fundamentalnih nizova koji određuju te uopštene funkcije jer

$$\sum_{p=0}^{n} a_p \psi_p \odot \sum_{p=0}^{n} b_p \psi_p \xrightarrow{L'} f \odot g \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

U slučaju proizvoljnih nizova f_n i g_n iz L', proveravanjem uslova iz tvrđenja B dobija se tvrđenje 1.

Lema 2. *Ako* $f,\, g \in L_2(0, \infty)$ *onda je*

$$\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

ograničena i neprekidna funkcija u intervalu $(0, \infty)$.

(ii) $$Ako\ f_n \xrightarrow{2} f \quad i \quad g_n \xrightarrow{2} g \quad onda$$

$$\int_0^x f_n(x-t)\, g_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt \ \textit{nad}\ (0, \infty)\ \textit{kad}\ n \to \infty.$$

Dokaz: (i) Ograničenost sledi iz nejednakosti

$$\left| \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \left(\int_0^x |f|^2\, dt \cdot \int_0^x |g|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Neprekidnost sledi iz nejednakosti

$$\left| \int_0^{x+h} f(x+h-t)\, g(t)\, dt - \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \left(\int_0^x |f(x+h-t) - f(x-t)|^2\, dt \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^x |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^{x+h} |f(x+h-t)|^2 dt \cdot \int_0^{x+h} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

(ii) Ovaj deo leme sledi iz nejednakosti

$$\int_0^x (f_n(x-t)\, g_n(t) - f(x-t)\, g(t))\, dt \leqslant \left(\int_0^x |f_n(x-t) - f(x-t)|^2 dt \cdot \int_0^x |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_0^x |f(x-t)|^2 dt \cdot \int_0^x |g_n(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Tvrđenje 3. *Ako su f i g iz $L_2(0, \infty)$ onda je*

$$\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt \overset{L'}{=} f \bigcirc g.$$

Dokaz: Neka su f_n i g_n nizovi parcijalnih suma koji u kvadratnom smislu konvergiraju ka tim funkcijama respektivno. Iz jednakosti

$$\int_0^x f_n(x-t)\, g_n(t)\, dt = f_n \bigcirc g_n$$

i činjenice da leva strana konvergira uniformno ka

$$\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

a desna u smislu konvergencije u L' ka $f \bigcirc g$, dobijamo tvrđenje. Treba još da pokažemo da iz uniformne konvergencije sledi L' konvergencija. Na osnovu leme 2. (i), sledi da su zadovoljeni uslovi drugog dela tvrđenja C, odnosno

$$\int_0^x f_n(x-t)\, g_n(t)\, dt \xrightarrow{L'} \int_0^x (x-t)\, g(t)\, dt.$$

3. Laplace-ova transformacija uopštene funkcije

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n$$

jeste ([5])

$$(^{**}) \qquad \mathcal{L}\, f=F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(s-1/2)^n/(s+1/2)^{n+1}, \quad Re\, s>0.$$

Važi i obrnuto, red na desnoj strani od (**) određuje jedinstvenu uopštenu funkciju iz L'.

Pošto je

$$\frac{F(s(z))}{1-z}=\sum a_n z^n$$

gde je

$$s=\frac{1+z}{2(1-z)}, \quad \mathrm{Re}\, s>0, \quad |z|<1,$$

na osnovu množenja stepenih redova dobija se

Tvrđenje 4. *Ako su uopštene funkcije f i g iz L' onda važi*

$$\mathcal{L}(f \odot g)=\mathcal{L}(f)\cdot \mathcal{L}(g).$$

Proveravanjem uslova tvrđenja B pokazuje se da je Laplace-ova transformacija neprekidna operacija odnosno da važi:

Tvrđenje 5. *Ako $f_n \to f$ u L' onda*

$$\mathcal{L}(f_n)\to\mathcal{L}(f) \qquad \text{(u običnom smislu)}.$$

U [4] smo definisali operacije $x\cdot f$ i $\mathcal{B} f$ gde je

$$\mathcal{B}=e^{-x/2} D x e^{x/2}.$$

Na osnovu množenja redova analitičkih funkcija pokazuje se da važi:

Tvrđenje 6. *Ako je $f\in L'$ i $F(s)$ njena Laplace-ova transformacija, onda važi*

(i) $$\mathcal{L}(x^p f)=(-1)^p F^{(p)}(s), \quad p\in N;$$

(ii) $$\mathcal{L}(\mathcal{R} f)=-(sF(s)) +sF(s)+\frac{1}{4} F \quad (s)+\frac{1}{2} F(s);$$

(iii) $$\mathcal{L}(\mathcal{B} f)=\left(s-\frac{1}{2}\right) F \quad (s).$$

Dokaz: Dokazaćemo samo (i) i to za $p=1$. Na sličan način se dokazuju i drugi delovi tvrđenja.

Pošto je

$$\mathcal{L}(xf)=\sum_{n=0}^{\infty}(-(n+1)\,a_{n+1}+(2n+1)\,a_n-na_{n-1})\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \qquad (a_{-1}=\theta)$$

treba da pokažemo da je izraz na desnoj strani jednak $-F'(s)$.

$$F'(s)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

odakle koristeći vezu

$$\frac{1}{s+\frac{1}{2}}=1-\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$$

dobijamo (i).

Pošto u prostoru L' nije definisana operacija diferenciranja, navedene formule su od interesa na primer za rešavanje određenih diferencijalnih jednačina sa ne konstantnim keficijentima.

BIBLIOGRAFIJA

[1] P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski, *Theory of distributions, The sequential approach*, Warszawa, 1973.

[2] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2., New York, 1953.

[3] E. Pap, S. Pilipović, *A Sequential Theory of Some Spaces of Generalized Functions*, Publ. Inst. Mat., Vol. 25 (37), Beograd 1977., 122 – 130.

[4] S. Pilipović, *Prostor uopštenih funkcija čiji elementi imaju Laguerre-ovu ekspanziju — sekvencijalni prilaz*, Zbor. rad PMF, Novi Sad, 8 (1978), 33 – 39.

[5] А.Г. Земаанман, *Интегральные преобразования обобщенных функции*, Москва, 1974.

S. Pilipović

CONVOLUTION AND LAPLACE TRANSFORMATION IN L′

(Abstract)

In [4] we investigated the L′ space of generalized functions. In this paper, we introdcue a convolution in the L′ and we investigate the connection between the convolution and the Laplace transformation. Elements from the L′ can be expanded into a series, and the statements in the paper are given in the form of a series.