Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 9 (1979)

M. Stojaković

O JEDNOM FORMALNO JEZIČKOM TRETIRANJU TEORIJE GRUPA

1. — Ima više sistema aksioma kojima se karakteriše grupa. U upotrebi je ponajviše sistem u kojem se zahteva egzistencija neutralnog elementa jedne binarne asocijativne operacije kao i postojanje inverznog elementa za svaki elemenat grupe.

Od interesa je međutim i takav sistem aksioma u kojem se ništa ne pretpostavlja o egzistenciji neutralnog i inverznog elementa kao ni o asocijativnosti. Ove se osobine u tom slučaju moraju izvesti iz osobina jezika kojim se o grupama govori kao i iz pravila izvođenja kojima se takav jezik služi.

Ovde ćemo opisati jedan takav jezik koji se u osnovi svodi na sistem aksioma koji je dao Lorenzen [1] (takođe Geodstein, [2]) ali koji ovde ne izlazi iz okvira teorije formalnih jezika odnosno teorije modela.

2. — Jezik, koji ćemo deinisati, operiše nad azbukom slobodnih promenljivih $A, B, C, \ldots a, b, c, \ldots, x, y, z$. Pravilno formirane reči u ovom jeziku $\mathcal{L}$ su one koje su

a) jednoslovne $a, b, c \ldots, x, y, z$,

b) oblika $A\, w_1 w_2$ gde su w_1, w_2 već ranije formirane reči)

c) nema drugačijih reči sem onih pomenutih pod *a*), *b*).

Pravilo izvođenja je

supstitucija, koja je sastoji u zamenjivanju jednakih reči jednakim rečima a početne jednakosti između reči zadate su aksiomima

A_1. — $AAxzAyz=Axy$

A_2. — $AAxxAAyyy=y$

Ovim akisomima omogućuje se eliminacija nekih slova odnosno uvođenje slova u navedenim slučajevima.

3. — Uvedimo, radi lakšeg manipulisanja sa rečima, skraćenice:

$AAxxx=Bx$,

$Aaa=e$ (za proizvoljno ali fiksno a).

$AxBy=Cxy$.

Cilj nam je da dokažemo da je jezik o kojem je reč u stvari model grupe u kojoj je C binarna asocijativna operacija sa neutralnim elementom e i inverznim elementom za svaki elemenat grupe. Dokazaćemo znači da je

$CCxyz = CxCyz$ za svako x, y, z.

$Cxy = z$ je jednačina jednoznačno rešiva po kojoj bilo nepoznatoj ako su druge dve zadate.

U tom cilju utvrđujemo sledeće činjenice:

4. — $Aee = e$. Dokaz:

U prvom aksiomu umesto x, y, z stavimo svuda a. Biće

$AAaaAaa = Aee = Aaa = e$

5. — $Cex = x$. Dokaz:

U drugom aksiomu zamenimo x sa a, y sa x pa će biti

$AAaaAAxxx = x = AeBx = Cex$.

5. — $Axx = e$. Dokaz

U prvom aksiomu stavimo e umesto x, y, Bx umesto z pa će biti

$AAeBxAeBx = A\ Cex\ Cex = Axx = Aee = e$

gde smo koristili činjenicu $Cex = x$, kao i $Aee = e$.

Sada se vidi da je ne samo $Aaa = e$ nego i za svako drugo x važi $Axx = e$.

6. — Posledica: $Bx = Aex$. Zbilja, važi

$Bx = AAxxx = Aex$ na osnovu uvedene skraćenice.

Za dalje izvođenje imamo dakle sledeće veze

$Bx = Aex$, $x = AeBx = Cex$

7. — Posledica: $BBx = x$. Zbilja,

$BBx = AeBx = Cex = x$. Tako se dva znaka B jedan uz drugi mogu jednostavno izostaviti iz teksta. Posebno za e važi

$Be = Aee = e$ pa se i samo jedno slovo B može izostaviti kad stoji ispred e.

8. Imali smo već vezu $Cex = x$. Važi međutim i obrnuto

$Cxe = x$. Dokaz:

$Cxe = AxBe = AAeBxA\ Bx\ Bx = A\ AeBx\ e = A\ Cex\ e = Axe = AeBx = Cex = x$

gde smo koristili prvi aksiom (u koji je uneto e umesto x, Bx umesto y i Bx umesto z) kao i uvedenu skraćenicu za C.

Tako sad imamo $x = Cxe = Cex$. Slovo e je desni i levi neutralni elemenat za svako slovo x za „operator" C

9. — Kako je $CxBx = AxBBx = Axx = e$ to je Bx „inverzni" elemenat za elemenat x operatora C.

10. — Možemo sad „rešiti po x" jednačinu"
$Axy = z$ kad su y i z zadati.

Pođimo od veze $z=A$ ze pa u aksiomu prvom uzmimo z umesto x, e umesto y i By umesto z. Biće tada

$$z=Aze=A\ AzBy\ AeBy=A\ AzBy\ y=A\ C\ zy\ y$$

pa se vidi da se umesto x u jednačini $Axy=z$ može uzeti Czy i to je traženo rešenje.

Na sličan način rešava se i jednačina $Axy=z$ po y. Posebno kad je $z=e$ rešenja daju inverzne elemente za x odnosno y.

11. Za operator C možemo sad pokazati da je asocijativan.

$CCxyz=CxCyz$. Dokaz: U t. 10 videli smo da jednačina

$Auv=t$ ima po u rešenje $u=Ctv$.

Ako je $u=CCxyz$ a $v=Cyz$ to rešenje bi i potvrdilo asocijativnost operatora C ako bi bilo $t=x$. Kako je

$$t=Auv=A\ CCxyz\ Cyz=A\ AAxByBz\ AyBz=A\ AxBy\ y=A\ Cxy\ y=x$$

gde smo u prvom aksiomu stavili $AxBy$ umesto x, Bx umesto z i y ostavili kao y i pri tom iskoristili izvedenu već ranije činjenicu da je Cxy rešenje jednačine $A\ sy=x$ po s.

U zaključku možemo ponoviti da je operator C asocijativan, da ima neutralni elemenat e s leva i s desna i da svaki elemenat ima levi i desni inverzni elemenat pa je opisani jezik jezik teorije grupa i on se pretvara u uobičajeni način zapisivanja kad se stavi $Cxy=y$ i $Bx=x^{-1}$.

Higman i Neuman [3] pokazali su da se aksiomi za teoriju grupa mogu kondenzovati i u samo jedan formalno jezički aksiom a Morgado [4] i Sholander [5] opisali su takođe jedinstven aksiom koji karakteriše komutativne grupe. Primetimo da smo drugi naš aksiom koristili u izvođenjima samo jednom, da pa „gotovo sve" sledi iz prvog aksioma. To ukazuje na principijelnu mogućnost da se prvi aksiom „popravi" do te mere da sadrži informaciju koju daje drugi aksiom posle čega bi se ovaj mogao izostaviti. Oni su međutim nezavisni kako pokazuju modeli:

$Axy=y$ za negaciju prvog i afirmaciju drugog

$Axy=x$ za afirmaciju prvog i negaciju drugog aksioma što se neposredno proverava u koliko ima bar dva različite promenljive.

LITERATURA

[1] Lorenzen P. „*Ein vereinfachtes Axiomsystem fur Gruppen-Journal fur reine und angewandte Mathematik*" str 50. No 182 (1940).

[2] Goodstein R. L. „*Free variables axioms for groups*" Math. Gaz. str 343—347, LII (1968).

[3] Higman G. „*Groups as groupoids with one law*" Publ. Math. Debrecen-str 215—231 — V. 2 (1951—1952).

[4] Morgado J. „*Another definition of a group by means of a single axiom*" Gaz. di Mat.—Lisboa-str, 11—13 (1968).

[5] Sholander M. „*Postulates for commutative groups*" Amer. Math. Monthly-str. 93—95, V. 66 (1959).

Mirko Stojaković

ON A FORMAL LANGUAGE FOR GROUP THEORY

Summary

Well formed words of the language $\mathcal{L}$ over the alphabet $A, B, C, \ldots a, b, c, \ldots, x, y, z$ are given in the following way: each letter x, y, z, is a word in $\mathcal{L}$ and if w_1, w_2 are words in $\mathcal{L}$ then $Aw_1 w_2$ is also the word in $\mathcal{L}$. Nothing else is in $\mathcal{L}$. If the conditions

$A_1. - AAxz\,Ayz = Axy,$

$A_2. - AAxxAAyyy = y \qquad AAxxx$

are valid in $\mathcal{L}$, and if, by definition, $Bx = AAxx$, $Cx = AxBy$, then $\mathcal{L}$ with respect to Cxy defines a group, Bx being the inverse of x and Cxy the group operation. The independence of A_1, A_2 can be proved by applying the two models:

$A_3. - Axy = x,$

$A_4. - Axy = y,$

over any alphabet with no less than two letters.