Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Bulletin des travaux de la Faculté des Sciences — Université de Novi Sad, Tome 9 (1979)

Koriolan Gilezan

ÉQUATIONS FUNCTIONNELLES PSEUDO-BOOLÉENNES GÉNÉRALISÉES DU DEUXIÈME ORDRE

Dans le travail [2] sont définies les derivées partielles de la fonction pseudo--booléenne généralisée $f:L^n \to P$, par raport aux variables $x_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, comme des fonctions pseudo-boléennes généralisées

$$\frac{\delta F_\alpha}{\delta x_i}: L^n \to P \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

ou

$$\frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(X) \tag{1}$$

$\alpha \in L, X = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n,\ 1 \leqslant i \leqslant n; L$ est un ensemble fini, tandis que $(P, +, \cdot, 1)$ l'anneau commutatie unitaire, sans le diviseur zéro $(L^n = L \times \ldots \times L)$.

De la définition (1) résulte directement que pour chaque $\alpha, \beta \in L$, pour chaque $c \in P$ ainsi que pour toutes les fonctions pseudo-booléennes généralisées f, g sont valables des propriétés suivantes

$$\frac{\delta c_\alpha}{\delta x_i} = 0; \qquad \frac{\delta (cf)_\alpha}{\delta x_i} = C \frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i}; \qquad \frac{\delta (f+g)_\alpha}{\delta x_i} = \frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i} + \frac{\delta g_\alpha}{\delta x_i};$$

$$\frac{\delta (f \cdot g)}{\delta x_i} = \frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i} \cdot q + f \cdot \frac{\delta g_\alpha}{\delta x_i} + \frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta g_\alpha}{\delta x_i}; \qquad \frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 f_{\beta\alpha}}{\delta x_j \delta x_i} (i \neq j);$$

$$\frac{\delta^m f_\alpha m}{\delta x_i^m} = (-1)^{m+1} \frac{\delta f_\alpha}{\delta x_i}\, 1 \leqslant m \leqslant n,$$

m — nombre naturel, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dans le travail [2] on a donné aussi la solution générale du système des équations fontionnelles

$$\frac{\delta f_{\alpha i}}{\delta x_i} = P_i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

oú $f: L^n \to P$, est une fonction pseudo-booleénne généralisée inconnue, trandis que $P_i: L^n \to P$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont des fonotions pseudo-booléennes généralisées connues. On a démontré le lemme suivant.

Lemme 1. Le sistéme des équations fonoctionnelles pseudo-booléennes généralisées

$$\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}=R(x,y)$$

$$\frac{\delta f_\beta}{\delta y}=Q(x,y)$$

a la résolution si et seulement si

$$(i) \qquad R(\alpha,y)=Q(x,\beta)$$

$$(ii) \qquad \frac{\delta R_\beta}{\delta y}=\frac{\delta Q_\alpha}{\delta x};$$

quand les conditions (i) et (ii) sont accomplies, toutes les fonctions f sont déterminéespar la formule

$$f(x,y)=C-R(x,y)-Q(x,y)-\frac{\delta R_\beta}{\delta y}.$$

oú C est une constante arbitraire de l'ensemble P.

La démonstration de ce lemme voir dans le travail [2].

Dans ce travail on va donner les équations fontionelles de la forme

$$(2) \qquad F: a(x,y)\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}+b(x,y)\frac{\delta f_\beta}{\delta y}+c(x,y)\frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x\delta y}=g(x,y),$$

ou $f:L^2\to P$ est une fonction pseudo-booléenne généralisée inconnue, tandis que $a:L^2\to P$, $b:L^2\to P$, $c:L^2\to P$, $g:L^2\to P$ sont des fonctions pseudo-booléennes généralisées connues.

Théorème 1. L'équation fonctionnelle (2) a sa solution si et seulement si

$$(i) \qquad \frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\delta y}+\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+\frac{\delta g_\beta}{\delta y}+g=0$$

(3)

$$(ii) \qquad \Delta=\left(\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a\right)\left(\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b\right)(a+b-c)=1;$$

quand les conditions 3 (i) es 3 (ii) sont accomplies toutes les fonctious f sont déterminées par la formule

$$(4) \qquad f(x,y)=C-X(x,y)-Y(x,y)-\frac{\delta X_\beta}{\delta y}$$

(*C'est une constante arbitraire de l'ensenble P*),

où

$$Y=g\left[\left(\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+a+b-c\right)\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a(a-c)\right]+(a-c)\left(\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a\right)\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}-a\left(\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b\right)\frac{\delta g_\beta}{\delta y}$$

(4')

$$X=g\left[\left(\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a+b-c\right)\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b\,(b-c)\right]+(b-c)\left(\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b\right)\frac{\delta g_\beta}{\delta y}-b\left(\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a\right)\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}.$$

Démonstration. Si l'on détermine les dérivées partielles $\frac{\delta F_\alpha}{\delta x}$, $\frac{\delta F_\beta}{\delta y}$, $\frac{\delta^2 F_{\alpha\beta}}{\delta x \delta y}$ de l'éguation fonctionnelle (2), on obtient le systéme suivant des équations fonctionnelles

(5)

$$a\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}+b\frac{\delta f_\beta}{\delta y}+c\frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x\delta y}=g$$

$$-a\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}+\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}\frac{\delta f_\beta}{\delta y}+\left(b+\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}-c\right)\frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x\delta y}=\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}$$

$$\frac{\delta a_\beta}{\delta y}\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}-b\frac{\delta f_\beta}{\delta y}+\left(a+\frac{\delta a_\beta}{\delta y}-c\right)\frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x\delta y}=\frac{\delta g_\beta}{\delta y}$$

$$-\frac{\delta a_\beta}{\delta y}\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}-\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}\frac{\delta f_\beta}{\delta y}+\left(-a-b-\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}-\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+c\right)\frac{\delta^2 f_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}=\frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}$$

Le système (5) a sa soluton pour

$$\frac{\delta f_\alpha}{\delta x}, \frac{\delta f_\beta}{\delta y}$$

si la matrice élargie Δ du système (5) est du rang 3, tandis que $\Delta=1$.

La matrice élargie du système (5) est équivalente a la matrice

$$\Delta'=\begin{bmatrix} a & b & c-a-b & g \\ 0 & \frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b & 0 & \frac{\delta g_\alpha}{\delta k} \\ \frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a & 0 & 0 & \frac{\delta g_\beta}{\delta y}+g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+\frac{\delta g_\beta}{\delta y}+\frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}+g \end{bmatrix}$$

ou Rang Δ=Rang $\Delta'=3$, avec la restriction:

$$\Delta=\left(\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+a\right)\left(\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}+b\right)(c-a-b)\neq 0$$

$$\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+\frac{\delta g_\beta}{\delta y}+\frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}+g=0$$

Démonstration que la fonction f a la forme (4). D'abord on résout le système des équations (5). Si les conditions (3) (ii) sont satisfaites, le système des équations (5) a la solution (4'), ou

$$X=\frac{\delta f_\alpha}{\delta x},\qquad Y=\frac{\delta f_\beta}{\delta y},$$

De l'accomplissement de la condition (3) (i) résulte la condition (i).

En base du lemme 1., la solution génerale du système des équations fonc tionnelles (5) est

$$f(x,y)=C-X-Y-\frac{\delta X_\beta}{\delta y},\qquad C\in P$$

Ainsi, *a—t*-on démon'ré le théorème.

En continuation on va donner la solution générale du système des équations fonctionnelles (2), où a, b, c sont des constantes de l'ensemble P.

Théorème 2. *L'équation fonctionnelle* (2) $(a,\ b,\ c\in P)$ *a sa solution si et seulement si* 3 (i) *et* 3 (ii); *quand les conditons* 3 (i) *ii* 3 (ii) *sont acomplies, toutes les fonctions f sent déterminée par la formule*

$$f(x,y)=C-(a^2+b^2-ab-ac-bc)\,g$$

(6)
$$+(c-a)\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+b\,(c-b)\frac{\delta g_\beta}{\delta y},\qquad C\in P.$$

Démonstration. Puisque a, b, c sont des constantes de l'ensemble P, et en base des propriétés des derivées partielles, on arrive a

(7)
$$\frac{\delta a_\beta}{\delta y}+\frac{\delta b_\alpha}{\delta x}=0.$$

Par la substitution (7) dans (4) et (4') on obtient (6).

Démonstration de l'unicité de la fonction f.

Soit

(8)
$$f(x,y)=C+A_1 g\,(x,y)+A_2\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+A_3\frac{\delta g_\beta}{\delta y}+A_4\frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}.$$

En déterminant les dérivées partielles de la fonction (8) et en substituant dans (2) on obtient

$$
\text{(9)}\qquad \begin{aligned} &a\,(A_1-A_2)\,\frac{\delta g_\alpha}{\delta x}+b\,(A_1-A_3)\,\frac{\delta g_\beta}{\delta y}+[a\,(A_3-A_4)+b\,(A_2-A_4) \\ &\qquad +c\,(A_1-A_2-A_3+A_4)]\,\frac{\delta^2 g_{\alpha\beta}}{\delta x\,\delta y}=g. \end{aligned}
$$

En base de la condition (3), de l'égalite (3) résulte

$$
\text{(10)}\qquad \begin{aligned} &aA_2-aA_1=1 \\ &bA_3-bA_1=1 \\ &-cA_1+(c-b)\,A_2+(c-a)\,A_3+(a+b-c)\,A_4=1. \end{aligned}
$$

Le système (10) a sa solution de la matrice A_1, A_2, A_3, A_4, quand rang de la matrice du système est 3, tandis que $\Delta=1$.

Ainsi on a demontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Akers Ir., S. B., *On a theory of Boolean functions*, Siam J. 7, 487–498, 1959.

[2] C. Gilezan, *Certaines équations fonctionnelles pseudo-booléennes généralisées*, Publ. Inst. Math. Beograd, Tome 20 (34), 99–109, 1976.

[3] M. Stojaković, *Sur l'algébre distantielle*, Mat. vesnik, 2 (17) Sv. 3, 1965.

Koriolan Gilezan

GENERALISANE PSEUDO-BULOVE FUNKCIONALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

U ovom radu dat je potreban i dovoljan uslov za rešenje funkcionalne jednačine oblika

$$a\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}+b\,\frac{\partial f_\beta}{\partial y}+c\,\frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial x\,\partial y}=d$$

gde su a, b, c, d date generalisane pseuo-Bulove funkcije, a

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}=f\,(\alpha, y)-f\,(x, y).$$