Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 9 (1979)

Gradimir D. Vojvodić

O II ε-TEOREMI ZA RAZNOVREDNOSNI PREDIKATSKI RAČUN

(saopšteno 29. 03 1979.)

U ovom radu dat je dokaz II ε-teoreme za raznovrednosni predikatski račun, kao što je sugerisano u [2].

*

Neka su L i L' dva jezika nad istom azbukom A (*H. Rasiowa*, *R. Sikorski*, [3]). Jezik L' naziva se *raširenje* (ekstenzija) [3] jezika L, ako je skup formula F jezika L podskup skupa F' formula jezika L'.

Neka je L' raširenje jezika L. Teorija $S'=(L', C', A')$ naziva se raširenje teorije $S=(L, C, A)$ [3], ako za svaku formulu α iz L, iz toga što je α teorema teorije S, sledi da je α teorema teorije S'. Ako je L' raširenje jezika L, onda je teorija (L', C, A) raširenje teorije (L, C, A).

Teorija $S'=(L', C', A')$ naziva se *nebitno raširenje teorije* [3] $S=(L, C, A)$ ako za svaku formulu α iz L, α je teorema teorije S akko je α teorema teorije S'.

Neka je L' raširenje jezika L. Realizacija R' jezika L' u $U\neq\phi$ naziva se *raširenje* (ekstenzija) *realizacija* R jezika L u $U\neq\phi$, akko

$f_R'=f_R$ za svako funkcijsko slovo f iz L, $f\in\overline{\Phi}$

$\rho_R'=\rho_R$ za svako predikatsko slovo ρ iz L,

$p_R'=p_R$ za svako iskazno slovo p iz L

Formula α je u *preneks normalnoj formi* [3] ako je oblika $Q\alpha$, gde je Q konačan niz simbola $\forall$, $\exists$, a α je slobodna od kvantifikatora.

Teorema 1 *Svaka formula* α *jezika* L *ima formulu* β *u preneks normalnoj formi, tako da je* $\alpha\Leftrightarrow\beta$ *teorema.*

Dokaz: Dokaz je indukcijom po dužini formule i analogan je dokazu za klasičan predikatski račun (*G. Kreisel*, *J. Krivine*, [1], *T.* 4., *str.* 20.). Ako je $D_i\alpha$ zatvorena formula, onda zbog T. 0.1.7. [2] važi razmena operacije D_i i kvantifikatora.

Teorija $S'=(L', C, A)$ naziva se *bogata* [3] ako za svaku egzistencijalnu formulu $\exists\,\xi\beta(\xi)$ jezika L', postoji term τ jezika L' takav da je formula

$$\exists\,\xi\beta(\xi)\Rightarrow\beta(\tau)$$

teorema teorije S'.

Pokazaćemo prvo da svaka neprotivurčena teorija $S=(L, C, A)$ ima nebitno bogato raširenje $S'=(L', C, A')$.

Jezik L' konstruišemo na sledeći način: Prvo definišimo po indukciji prebrojiv niz formalizovanih jezika $L_n=(A_n, T_n, F_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ i prebrojiv niz funkcija ψ^n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ na sledeći način:

1) L_1 se poklapa sa L

2) L_{n+1} je raširenje jezika L_n, dobijen dodavanjem nekog skupa ψ_n funkcijskih znakova, i $\psi_n \cap A_n=\phi$, gde je A_n azbuka za L_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$

3) ψ^n je uzajamno jednoznačno preslikavanje skupa E_n (skup svih egzistencijalnih formula jezika L_n koje nisu u L_{n-1}) na skup ψ_n, takvo, da ako je $\alpha \in E_n$ egzistencijalna formula sa m slobodnih promenljivih, slika $\psi^n\alpha$ formule α je m-arna funkcija.

Jezik $L'=(A', T', F')$ dobija se iz L dodavanjem skupu $\overline{\Phi}$ skup

$$\psi=\bigcup_{n=1}^{\infty}\psi_n.$$

Skup E' svih egzistencijalnih formula je unija E_n, $n=1, 2, 3, \ldots,$

$$(E'=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n),$$

iz zbog 3) sva preslikavanja ψ^n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ zajedno određuju uzajamno-jednoznačno preslikavanje ψ skupa E' na ψ, pri čemu

4) ψ je preslikavanje E_n na ψ_n,

5) ako je α egzistencijalna formula jezika L' sa m slobodnih promenljivih, tj. α je oblika

(1) $$\exists\, \xi\beta\, (\xi, x_1, \ldots, x_m)$$

to slika ψ formule α je m-arni funkciski znak iz ψ koji se ne pojavljuje u α. Jezik L' dobijen na gore opisani način zove se *bogato raširenje jezika* L, [3].

Za svaku egzistencijalnu formulu α iz L' oblika (1) neka α' označava formulu

(2) $$\beta\, (\Psi\, (x_1, \ldots, x_m), \quad x_1, \ldots, x_m)$$

a α'' označava implikaciju

$$\alpha \Rightarrow \alpha'.$$

Neka je $\overline{B}$ skup svih formula α'', gde je α proizvoljna egzistencijalna formula iz L'. Tada važi:

Teorema 2. *Svaka realizacija R jezika L* u *$U\neq\phi$ može biji raširena do realizacije R' jezika L' u $U\neq\phi$ na takav način da je R' model za $\overline{B}$. Dalje, ako je R' model za egzistencijalnu formulu* α iz L, to je R' model i za α'.

Dokaz: Definišimo indukcijom takav niz da realizacija R_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, tako da:

6) R_n je realizacija jezika L_n u $U\neq\phi$ $(n=1, 2, \ldots)$ i R_1 se poklapa sa R;

7) R_{n+1} je raširenje realizacije R_n.

[1]) Φ je oznaka za prazan skup.

Pretpostavimo da je R_n definisano, zbog 2) i 7) za potpuno definisanje realizacije R_{n+1} dosta je definisati $f_{R_{n+1}}$ za svako funkcijsko slovo $f \in \psi_n$. Zbog 3) i 4) važi $f=\psi\alpha$, gde je α neka egzistencijalna formula oblika (1), dok formula

$$\beta(x, x_1, \ldots, x_m)$$

pripada jeziku L_n. Zato, po pretpostavci indukcije, β_{R_n} je preslikavanje skupa U^{m+1} u generalisanu Postovu algebru sa uslovom konačne reprezentacije Pw, zbog 5) f je m-arna funkcija. Ako za date elemente $j_1, \ldots, j_m \in U$ postoji $j \in U$ tako da $\beta_{R_n}(j, j_1, \ldots, j_m)=1$, onda uzmimo da je

$$f_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m)=j$$

U suprotnom slučaju element $f_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m)$ definišimo na proizvoljan način.

Odavde imamo da

$$\alpha_{R_n}(j_1, \ldots, j_m)=1 \quad \text{povlači} \quad \alpha'_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m)=1$$

Zato za ma koje $\alpha \in E_n$ imamo da je

(3) $$R_{n+1} \text{ model za } \alpha''.$$

Zbog 6) i 7) sve realizacije R_n—zajedno određuju realizaciju R' za L' datu sa:

$\rho_R = \rho_R$ za svaki predikat ρ iz L,

$p_R = p_R$ za svako iskazno slovo p iz L,

$f_R = f_{R_{n+1}}$ za svako funkcijsko slovo ϕ iz ψ_n, ($n=1, 2, \ldots$)

$f_R = f_R$ za svako funkcijsko slovo ϕ iz L.

Ako je formula α iz L_n to je

$$\alpha'_R = \alpha_{R_n}.$$

Zato, zbog (3), R' je model za α'', za ma koju egzistencijalnu fomulu α iz L'.

Teorema 3. *Ako formula α iz L nije teorema teorije $S=(L, C, A)$ to α nije teorema ni tearije $S'=(L', C, A \cup B)$.*

Dokaz: Neka je α teorema teorije S'. Tada postoje konačni skupovi $A_1 \subset A$ i $B_1 \subset B$ tako da je α posledica $A_1 \cup B_1$. (Dato u [2]). Kako α nije teorema teorije S, to α nije teorema teorije $S_1=(L, C, A_1)$. Zato zbog T. 0.5.8. [2] postoji model R za S, i valuacija v, tako da $\tau_R(v)=0$. Zbog T. 2. realizaciju R možemo raširiti do takve realizacije R' za L', tako da će R' biti model za $\overline{B}$. Zato je R' model za teoriju $S'=(L', C, A_1 \cup B_1)$. Iz T. 0.4.5. [2] sledi da je $\alpha_R(v)=1$. Sa druge strane je $\alpha_R(v)=\alpha_R(v)=0$, jer je R' raširenje za R, što je u suprotnosti sa prethodnim.

Neka je teorija $S'=(L', C, A \cup B)$.

Tada neposredno sledi da:

Teorema 4. *Svaka teorija $S=(L, C, A)$ ima bogato nebituo rešenje $S'=(L', C, A \cup B)$ i iz neprotivurečnosti tedrije S sledi neprotivrečnost teorije S'.*

Neka je α formula jezika L' koja počinje sa kvantorom. Ako je formula α oblika (1), onda formulu α' (tj. formulu oblika (2)) nazivamo formula dobijana iz α eliminacijom prvog kvantifikatora. Ako je formula α oblika $\forall \xi\beta(\xi, x_1, \ldots, x_m)$, onda se formula oblika $\beta(x, x_1, \ldots, x_m)$, gde je x slobodna promenljiva, koja se ne pojavljuje u α, naziva formula dobijena iz α eliminacijom prvog kvantifikatora.

Teorema 5. *Neka je γ formula, dobijena iz α eliminacijom prvog kvantora, to:*

(*i*) $\alpha \in C(\gamma)$

(*ii*) *ako je realizacija R' za L' model za $\bar{B}$ i α, to je i za γ.*

Dokaz: Ako je prvi kvantifikator u α kvantifikator $\forall$, to (i) sledi iz pravila generalizacije (datoj u [2]), a (ii) sledi iz induktivne definicije preslikavanja α_R (datog u [2]).

Ako je α egzistencijalna formula, onda je formula $(\gamma \Rightarrow \alpha)$ teorema. Pomoću modus ponens-a dobijamo (i).

Ako je $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in \bar{B}$, onda imamo

$$(\alpha_R\,(v) \Rightarrow \gamma'_R(v)) = (\alpha \Rightarrow \gamma)_R(v) = 1$$

za svaku valuaciju v. Ako je $\alpha_R'(v)=1$ za svaku valuaciju v, to je i $\gamma_R'(v)=1$ za svaku valuaciju v, tj. važi (ii).

Neka je α formula jezika L'. Otvorenu formulu α^* nazivamo formulom dobijenom iz α eliminacijom kvantifikatora, ako postoji niz formula

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

tako da

1° α_1 je u preneks normalnoj formi za α (T. 2)

2° α_{k+1} dobijena je iz α_k eliminacijom prvog kvantifikatora $(k=1, \ldots, n-1)$

3° α_n je formula α^*.

Za svaku formulu α iz L' postoji niz formula $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tako da su ispunjeni uslovi 1°, 2° i 3°.

Posledica 6. Ako je α^* dobijena iz α, eliminacijom kvantifikatora, onda

(i) $\alpha \in C\,L'(\alpha^*)$

(ii) ako je realizacija R' za L' model za $\bar{B}$ i α, to je i za α^*. •

Neka je A neki skup formula jezika L. Dodelimo svakoj formuli α iz A otvorenu formulu α^* (iz L'), dobijenu iz α eliminacijom kvantifikatora. Neka je A^* skup svih takvih formula α^*, dok je α iz A. Neka je L^* jezik dobijen iz L dodavanjem skupa ψ^* svih funkcijskih znakova iz ψ, koji se pojavljuju u formulama iz A^*.

Teorema 7. *Teorija $S^*=(L^*, C, A^*)$ je nebitno raširenje teorija $S=(L, C, A)$.*

Svaki model R za S može biti raširen do modela R^* za S^*. Obrnuto, za svaki model R^* terije S^*, suženje R realizacije R^* do jezika L je model za S.

Dokaz: Iz posledice 6. (*i*) i osobina zatvorenja C, sledi $C_L(A) \subset C_{L^*}(A)$, tj. teorija S^* je raširenje teorije S. Dalje, ako je R^* model za S^*, to suženje realizacije R^* do R za L je model za S.

Pretpostavimo da je R model za S. Neka je R' takvo raširenje za R, da je R' realizacija za L' i R' je model za $\bar{B}$. Suženje realizacije R' do R^* za jezik L^*

je raširenje realizacije R i model za S^*. To sledi iz P. 6., jer $\beta_{R'}(v)=\beta_{R^*}(v)$ za svaku formulu β iz L.

Ako formula β iz L nije teorema teorije S, to zbog T. 0.5.8. [2] postoji takav model R za S, i valuacija v, da $\beta_R(v)=0$. Na osnovu prethodnog dela dokaza T. 7. R može biti rašireno do modela R^* za S^*. Sledi da $\beta_{R^*}(v)=\beta_R(v)=0$. Dalje sledi da β nije teorema teorije S^*. Znači, S^* je nebitno raširenje teorije S. •

LITERATURA

[1] Kreisel, G., Krivine, J. L., *Elements of mathematical logic, model theory*, North-Holland, Amsterdam (1967).

[2] Rasinova, H., *Mixed valued predicate calculi*, Studia, Logica, 34 1975. pp 216—234.

[3] Rasiowa, H., Sikorski, R., *The mathematics of the metamathematics*, Warszawa (1963).

Gradimir D. Vojvodić

ON THE II ε-THEOREM FOR MIXED-VALUED PREDICATE CALCULI

Summary

In this paper, we give the proof of the II ε-theorem for mixed-valued predicate calculi as was suggested by H. Rasiowa in [2].