Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)

Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 9 (1979)

Svetozar Milić

O n-ANTI-INVERZNIM SEMIGRUPAMA

(Saopšteno 12. aprila 1979.)

1. Uređenu dvojku (S, ω) nepraznog skupa S i n-arne operacije ω tog skupa tj. $\omega: S^n \to S$, zovemo n-arna semigrupa, ako je ispunjeno

$$\omega(\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) =$$

$$= \omega(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ \omega(x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}), x_{i+n+1}, \ldots, x_{2n-1})$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$ i proizvoljne $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1} \in S$.

Označavaćemo (x_1^n) ili kraće x_1^n umesto $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, onda ćemo $\omega(x, x, \ldots, x)$ označavati $\overset{n}{x}$. Oznaku $\overset{0}{x}$ smatramo praznim slovom.

n-arna semigrupa S je komutativna, ako je

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(n)})$$

za svaku permutaciju φ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, i svako $x_1, \ldots, x_n \in S$.

Za n-arnu semigrupu $(S, (\,))$ kažemo da je izvodljiva iz m-arne semigrupe $(S, (\,))$, ako je $n = k(m-1)+1$. n-semigrupu tada zovemo n-arnim produženjem m-semigrupe, ako je izvodljiva i za sve $x_1, \ldots, x_n \in S$ je

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\ldots((x_1, x_2, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1}), x_{2m}, \ldots, x_n)$$

U tom slučaju kažemo, takođe, da je n-semigrupa određena m-semigrupom.

Neka je A podsemigrupa n-arne semigrupe S. Ako je

$$\overset{i}{S}A\overset{n-i}{S} \subset A$$

tada podsemigrupa A zovemo i-ti ideal n-arne semigrupe S. Ako je $i=1$, onda 1-ideal zovemo i desni ideal za S. Za $i=n$ tada A zovemo levi ideal. Ako je A i ti ideal za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda A zovemo ideal n-semigrupe S.

2. U ovom radu razmatramo n-anti-inverzne semigrupe. O anti-inverznim (2-anti-inverznim, binarnim) videti [1].

Definicija 2.1. *Elementu $a \in S$ n-arne semigrupe S je elemenat $b \in S$ anti-inverzalni ako je ispunjeno*

$$\overset{n-1}{a}\,b\,\overset{n-1}{a} = b \qquad \text{i} \qquad b\,\overset{2n-3}{a}\,b = a.$$

Definicija 2.2. *n-arnu semingrupu S zovemo n-anti-inverzna ako za svaki elemenat iz S postoji njegov anti-inverzan elemenat iz S.*

Primer. Sledećim tablicama

1)

aaa	a
aab	b
aba	b
abb	a
baa	b
bab	a
bba	a
bbb	b

2)

aaa	a
aab	b
aba	b
abb	b
baa	b
bab	b
bba	b
bbb	b

date su dve 3-anti-inverzne semigrupe na skupu $S=\{a, b\}$. Za 1) imamo, da su elementu a anti-inverzni elementi a i b; elementu b su anti-inverzni, takođe, a i b. Zaista,

$$\overset{2}{a}a\overset{2}{a}=(\overset{2}{a}a)\overset{2}{a}=a\overset{2}{a}=a \quad , \quad a\overset{3}{a}a=a(\overset{3}{a})a=aaa=a$$

$$\overset{2}{a}b\overset{2}{a}=(\overset{2}{a}b)\overset{2}{a}=b\overset{2}{a}=b \quad , \quad b\overset{3}{a}b=b(\overset{3}{a})b=bab=a$$

Slično izvodimo i za elemenat b. Za 2) elementu a je anti-inverzan a, dok je elementu b anti-inverzan b.

Označimo sa $\mathcal{A}_n$ klasu n-anti-inverznih semigrupa.

Teorema 2.1. *Neka je S n-arna semigrupu. Tada*

$$S \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(\overset{n}{x}=y\overset{n-2}{x}y,\ \overset{n-1}{x}y=y\overset{3n-3}{x},\ y\overset{4n-4}{x}=y,\ \overset{4n-3}{x}=x)$$

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{A}_n$. Neka je elementu $x \in S$ njegov anti-inverzni $y \in S$. Tada

$$\overset{n}{x}=x\overset{n-1}{x}=(y\overset{2n-3}{x}y)\overset{n-1}{x}=y\overset{n-2}{x}(\overset{n-1}{x}y\overset{n-1}{x})=y\overset{n-2}{x}y$$

$$\overset{n-1}{x}y = x\overset{n-2}{x}y=(y\overset{2n-3}{x}y)\overset{n-2}{x}y=y\overset{2n-3}{x}(y\overset{n-2}{x}y)=y\overset{2n-3}{x}\overset{n}{x}=y\overset{3n-3}{x}$$

$$y\overset{4n-4}{x} = y\overset{3n-3}{x}\overset{n-1}{x} = \overset{n-1}{x}y\overset{n-1}{x} = y$$

$$\overset{4n-3}{x} = \overset{n}{x}\overset{3n-3}{x} = (y\overset{n-2}{x}y)\overset{3n-3}{x}=y\overset{n-2}{x}(y\overset{3n-3}{x})=y\overset{n-2}{x}\overset{n-1}{x}y=x.$$

Obratno, neka je za $x \in S$ postojeći $y \in S$, za koje su ispunjene formule na desnoj strani ekvivalencije u teoremi. Tada

$$x^{n-1}\,y\,x^{n-1} = y\,x^{3n-3}\,x^{n-1} = y\,x^{4n-4} = y$$

$$y\,x^{2n-3}\,y = y\,x^{n-2}\,(\,x^{n-1}\,y\,) = y\,x^{n-2}\,y\,x^{3n-3} = x^{n}\,x^{3n-3} = x^{4n-3} = x.$$

Dakle, elementu x je anti-inverzan y. Time je teorema dokazana.

Posledica 2.1. *Neka je elemenatu $x \in S$ anti-inverzni elemenat $y \in S$. Tada*

$$\text{(i)} \qquad y\,x^{n-1} = x^{3n-3}\,y$$

$$\text{(ii)} \qquad x^{4n-4}\,y = y.$$

Dokaz:

(i): $$y\,x^{n-1} = y\,x^{n-2}\,x = y\,x^{n-2}\,y\,x^{2n-3} = y\,x^{n}\,{xy}^{2n-3} = x^{3n-3}\,y.$$

(ii): $$x^{4n-4}\,y = x^{n-1}\,(\,x^{3n-3}\,y\,) = x^{n-1}\,y\,(\,x^{n-1}\,) = y\,.$$

Lema 2.1. *Neka je elementu $a \in S$ anti-inverzni elemenat $b \in S$. Tada su i elementi $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b$, $a^{n-3}b$, anti-inverzni elementu a.*

Dokaz. Neka je $s \in \{n-1, 2n-2, 3n-3\}$. Tada za elemenat a i njegov anti-inverzan elemenat b imamo:

$$a^{s}\,b = b\,a^{3s} \qquad \text{i} \qquad a^{4s+1} = a$$

što se neposredno proverava. Koristeći ove jednakosti dobijamo

$$a^{n-1}\,(\,a^{s}\,b\,)\,a^{n-1} = a^{s}\,(\,a^{n-1}\,b\,a^{n-1}\,) = a^{s}\,b$$

$$(a^{s}\,b\,)\,a^{2n-3}\,(\,a^{s}\,b\,) = a^{s}\,(\,b\,a^{2n-3}\,b\,)\,a^{3s} = a^{s}\,a\,a^{3s} = a^{4s+1} = a\,.$$

Dakle, elementu a su anti-inverzni i elementi $a^{s}b$.

Time je lema dokazana.

Neka je S n-anti-inverzna semigrupa i $a \in S$. Označimo sa S_a sledeći skup

$$S_a = \{x \in S \mid a^{4n-4}\,x = x\}.$$

Lema 2.2.

(*i*) *S_a je podsemigrupa n-anti-inverzne semigrupe S.*

(*ii*) *S_a je desni ideal n-anti-inverzne semigrupe S.*

Dokaz. (i): Kako je $\overset{4n-4}{a}\ a = \overset{4n-3}{a} = a$, to imamo $a \in S_a$ pa je $S_a \neq \varnothing$. Neka je $x_1, \dots, x_n \in S_a$, tada

$$\overset{4n-4}{a}\ (x_1^n) = (\overset{4n-4}{a}\ x_1)\, x_2^n = x_1 x_2^n = (x_1^n)$$

Dakle, $(x_1^n) \in S_a$.

(ii): Neka je $x_1 \in S_a, x_2, \dots, x_n \in S$, tada kopirajući dokaz pod (i), je $(x_1^n) \in S_a$. Dakle,

$$S_a \overset{n-1}{S} \subset S_a$$

tj. S_a je desni ideal za S.

Time je lema dokazana.

Na osnovu Leme 2.2. imamo da je S unija svojih desnih ideala S_a tj.

$$S = \bigcup_{a \in S} S_a$$

Teorema 2.2. *Neka je S n-anti-inverzna semigrupa. Tada za svaki desn ideal S_a n-semigrupe S postoji binarna operacija $\circ$ takva da je $(S_a, \circ)$ grupoid sa levom jedinicom i pri tome je*

$$(x_1^n) = \overset{n}{a} \circ (\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_n)$$

za sve $x_1, \dots, x_n \in S_a$.

Dokaz. Definišimo operaciju $\circ$ na n-arnoj podsemigrupi S_a na sledeći način:

$$x \circ y = \overset{4n-5}{a}\ xy.$$

Dokažimo zatvorenost operacije $\circ$ u skupu S_a. Neka su $x, y \in S_a$, tada

$$\overset{4n-4}{a}\ (x \circ y) = \overset{4n-4}{a}\ \overset{4n-5}{a}\ xy = \overset{4n-5}{a}\ (\overset{4n-4}{a}\ x)y = \overset{4n-5}{a}\ xy = x \circ y$$

odakle $x \circ y \in S_a$.

Kako je $a \circ x = \overset{4n-5}{a}\ ax = \overset{4n-4}{a}\ x = x$, to je a leva jedinica grupoida $(S_a, \circ)$

Neka je $x_1, \dots, x_n \in S_a$, tada imamo

$$(x_1^n) = x_1 x_2^n = (\overset{4n-4}{a} x_1)\, x_2^n = \overset{4n-5}{a} (a x_1 x_2)\, x_3^n = (a, x_1 \circ x_2, x_3^n) =$$

$$= (\overset{4n-4}{a}, a\,(x_1 \circ x_2), x_3^n) = (\overset{2}{a}, \overset{4n-5}{a}\,(x_1 \circ x_2)\, x_3, x_4^n) = \overset{2}{a}\,((x_1 \circ x_2) \circ x_3)\, x_4^n =$$

$$= \dots = \overset{n-1}{a}\ (\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_n).$$

Dakle,

$$(x_1^n) = \overset{n-1}{a}\ (\dots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \dots) \circ x_n) \tag{1}$$

Kako je za $x \in S_a$

$$(2)\qquad \overset{n-1}{a}\,x = \overset{n-1}{a}\,\overset{4n-4}{a}\,x = \overset{4n-5}{a}\,\overset{n}{a}x = \overset{n}{a} \circ x$$

to iz (1) i (2) dobijamo

$$(x_1^n) = \overset{n}{a} \circ (\ldots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \ldots) \circ x_n)$$

Time je teorema dokazana.

Lema 2.3. *U grupoidu* $(S_a, \circ)$ *važi*

(i) $\overset{n}{a} \circ x = \overset{n}{a} \circ y \Rightarrow x = y$

(ii) $(\overset{n}{a} \circ x) \circ y = \overset{n}{a} \circ (x \circ y)$

Dokaz. Koristeći relaciju (2) i definiciju operacije $\circ$, imamo

$$\text{(i)}:\quad \overset{n}{a} \circ x = \overset{n}{a} \circ y \Rightarrow \overset{n-1}{a}\,x = \overset{n-1}{a}\,y$$
$$\Rightarrow \overset{3n-3}{a}\,\overset{n-1}{a}\,x = \overset{3n-3}{a}\,\overset{n-1}{a}\,y$$
$$\Rightarrow x = y.$$

$$\text{(ii)}:\quad (\overset{n}{a} \circ x) \circ y = \overset{n-1}{a}\,x \circ y = \overset{4n-5}{a}\,(\overset{n-1}{a}\,xy) = \overset{n-1}{a}\,(\overset{4n-5}{a}\,xy) = \overset{n-1}{a}\,(x \circ y) = \overset{n}{a} \circ (x \circ y).$$

Time je lema dokazana.

Teorema 2.3. *Neka je S komutativna n-anti-inverzna semigrupa. Tada je* $(S_a, \circ)$ *komutativna (binarna) semigrupa sa jedinicom.*

Dokaz. Neka je S komutativna n-anti-inverzna semigrupa. Tada za $x \in S_a$ imamo

$$x = a \circ x = \overset{4n-5}{a}\,ax = \overset{4n-5}{a}\,xa = x \circ a$$

tj. a je jedinica grupoida S_a.

Neka je $x_1, \ldots, x_{2n-1} \in S_a$, tada na osnovu asocijativnosti u S imamo

$$((x_1^n)\, x_{n+1}^{2n-1}) = (x_1^{n-1}\, (x_n^{2n-1}))$$

odakle, za $x_1 = \ldots = x_{n-2} = a$, $x_{n+2} = \ldots = x_{2n-1} = a$, kao i $x_{n-1} = x$, $x_n = y$, $x_{n+1} = z$ dobijamo

$$(4)\qquad ((\overset{n-2}{a}\,xy)z\,\overset{n-2}{a}) = (\overset{n-2}{a}\,x\,(yz\,\overset{n-2}{a})).$$

Na osnovu (4) i komutativnosti za S imamo

$$(5)\qquad ((\overset{n-2}{a}\,xy)z\,\overset{n-2}{a}) = (\overset{n-2}{a}\,(yz\,\overset{n-2}{a})\,x)$$

pa na osnovu Teorema 2.2. i relacije (5) dobijamo

$$\overset{n}{a} \circ (\ldots((\overset{n-2}{a}\ xy) \circ z) \circ a) \circ \ldots) \circ a) = \overset{n}{a} \circ (\ldots((a \circ a) \circ a) \ldots \circ a) \circ (yz\ \overset{n-2}{a}\ )) \circ x)$$

Odakle, koristeći Lemu 2.3. kao i to da je a jedinica grupoida S_a, dobijemo

$$((\overset{n-2}{a}\ xy) \circ z) = ((yz\ \overset{n-2}{a}\ ) \circ x) \tag{6}$$

Slično, koristeći Teoremu 2.2. iz (6) dobijamo

$$(\overset{n}{a} \circ (\ldots((a \circ a) \circ a) \circ \ldots) \circ a) \circ x) \circ y)) \circ z =$$
$$(\overset{n}{a} \circ (\ldots((y \circ z) \circ a) \circ a) \circ \ldots) \circ a)) \circ x$$

odakle (a je jedinica grupoida S_a)

$$(\overset{n}{a} \circ (x \circ y)) \circ z = (\overset{n}{a} \circ (y \circ z)) \circ x \tag{7}$$

Na osnovu Leme 2.3. iz (7) dobijamo

$$(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x \tag{8}$$

Iz (8) za $z = a$ dobijamo

$$x \circ y = y \circ x \tag{9}$$

Dakle, grupoid S_a je komutativan.

Iz (8) i (9) imamo

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

tj. grupoid S_a je semigrupa.

Time je teorema dokazana.

LITERATURA

[1] Bogdanović S., Milić S., Pavlović V., *Anti-inverse semigroups*, Publ. Inst. Math. 24 (38) (1978), 19–28.

Svetozar Milić

ON n-ANTI-INVERSE SEMIGROUPS

Summary

In this paper, the notion of n-anti-inverse semigroups is introduced (for binary anti-in verse semigroups see [1]).

A n-ary semigroup $(S, (\ ))$ is an n-anti-inverse semigroup iff the following condition is satisfied

$$(\forall\, a \in S)(\exists\, b \in S)\ (\overset{n-1}{a}\ b\ \overset{n-1}{a} = b \wedge b\ \overset{2n-3}{a}\ b = a)$$

where x_1^n is $(x_1, x_2, \dots .\, x_n)$ and $\overset{n}{x}$ is $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.

Theorem 2.1. gives a characterization of the above semigroups. It is also proved that a semigroup S is the union of its right ideal S_a, where $S_a = \{x \in S \mid \overset{4n-4}{a}\, x = x\}$. For all right ideal S_a there is a binary operation $\circ$ such that $(S_a, \circ)$ is a groupoid having a left unit such that

$$(x_1^n) = \overset{n}{a} \circ (\dots ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \dots) \circ x_n)$$

(Theorem 2.2.).

If S is a commutative n-anti-inverse semigroup, then groupoids $(S, \circ)$, for $a \in S$, are semigroups with a unit. (Theorem 2.3.).