Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Ncvom Sadu, knjiga 9 (1979)
Ежегодник Естественно-математического факультета — Универзитет в Новом Саде, Том 9 (1979)

Янез Ушан, Зоран Стоякович

D-ПОЛНЫЕ ОРТОГОНАЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНЫХ КВАЗИГРУПП

В настоящей работе рассматриваются D-полные ортогональные системы частичных квазигрупп (определение 1) и соответствующие коды фиксированного кодного расстояния, RD-полные регулярно ортогональные системы регулярных частичных квазигрупп ([1], определение 3) и соответствующие к-семисети [1].

Пусть Q непустое множество и $D \subseteq Q \times Q$, $D \neq \emptyset$. (Q, A) называется частичным группоидом тогда и только тогда, когда $A: D \to Q$. Частичный группоид (Q, A) называется частичной квазигруппой тогда и только тогда, когда уравнения $A(a, x) = b$ и $A(y, a) = b$, если обладают решениями, то обладают единственными.

Частичная квазигруппа (Q, A) является регуляной ([1]) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$1° \ (\forall (i, j)) \ ((i, j) \in D \Rightarrow [(\exists j') \ (j \neq j' \wedge (i, j') \in D)] \wedge [(\exists i') \ (i \neq i' \wedge (i', j) \in D)]), \text{ и}$$

$$2° \ (\forall (i, j)) \ [A(i, j) = t \Rightarrow ([\{(i, j)\} = (\{i\} \times Q) \cap D] \wedge [\{(i, j)\} = (Q \times \{j\}) \cap D] \Rightarrow (\exists (i', j')) \ ((i, j) \neq (i', j') \wedge A(i', j') = t))].$$

Пусть (Q, A) и (Q, B)-частичные группоиды, имеющие одну и ту же область определения $D = \mathcal{D}A = \mathcal{D}B$, $D \subseteq Q \times Q$, $D \neq \emptyset$. A и B являются ортогональными тогда и только тогда, когда система уравнений

$$A(x, y) = a, \qquad A(x, y) = b,$$

если обладает решением, то обладает единственным.

Если обозначим

$$0_{AB}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (A(x, y), B(x, y)).$$

то A и B будут ортогональные тогда и только тогда, когда O_{AB} является биекцией множества D на множество $\mathcal{R}O_{AB}$ (-область значений отображения O_{AB}).

Ортогональные частичные операции A и B являются регулярно ортогональными ([1]) тогда и только тогда, когда для любого $(i, j) \in O_{AB}$ существует $j' \in Q, j' \neq j$, так что $(i, j') \in \mathcal{R}O_{AB}$ или существует $i' \in Q, i' \neq i$, так что $(i', j) \in \mathcal{R}O_{AB}$.

Множество $\sum$, между собой неравных, частичных операций, обладаыщиц одной и той же областью определения, является ортогональной системой частичных операций ($ОСЧО$) тогда и только тогда, когда каждая пара операций из $\sum$ является ортогональной. $ОСЧО$ $\sum$ называется [1] регулярной ($РОСЧО$) тогда и только тогда, когда каждая пара операций является регулярно ортогональной.

$$ОСЧО \sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}, \quad \text{где} \quad A_i, \ i=1, \ldots, k-2,$$

являются частичными квазигруппами, а F и E, в том же порядке, левая и правая единичная операция[1]), называется ортогональной системой частичных квазигрупп (ОСЧК).

$ОСЧК \sum=\{E, F, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ называется регуляной ортогональной системой регулярных частичных квазигрупп ($РОСРЧК$) тогда и только тогда, когда A_i, $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ — регулярные частичные квазигруппы, являющиеся попарно регулярно ортогональными. Справедливо: если в $\sum=\{E, F, A\}$ A является регуляной частичной квазигруппой, то $\sum$ является $РОСРЧК$.)

В настоящей работе рассматриваются только частичные операции, определенные на некотором конечном множестве.

Ортогональная система квазигрупп ($ОСК$) $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ на Q называется полной тогда и только тогда, когда для любой $ОСЧК$ $\sum'$ на Q справедливо

$$\sum \subseteq \sum' \Rightarrow \sum = \sum'.$$

Таким же образом может быть определена полная $ОСЧК$. В настоящей работе мы рассматриваем другой вид „полности" — „полность", относящуюся к мощности области определения частичных операций, образующих $ОСЧК$. Именно:

Определение 1. $ОСЧК \sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ на (конечном) множестве Q является *D-полной* тогда и только тогда, когда для любой $ОСЧК$ $\overline{\sum}=\{\overline{F}, \overline{E}, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{k-2}\}$ на Q справедливо

$$(1) \quad A_1 \subseteq \overline{A}_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-2} \subseteq \overline{A}_{k-2} \Rightarrow A_1 = \overline{A}_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-2} = \overline{A}_{k-2}.$$

Если $\sum=\{F, E, A\}$, то (1) имеет вид

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A = \overline{A}.$$

[1]) $F(x, y) \overset{\text{def}}{=} x$, $E(x, y) \overset{\text{def}}{=} y$ дая любого $(x, y) \in \mathcal{D} F = \mathcal{D} E$.

Определение 1'. Частичная квазигруппа (Q, A) является *полной* тогда и только тогда, когда, для любой частичной квазигруппы $(Q, \bar{A})$ справедливо

$$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}.$$

Очевидно справедлива:

Лемма 1. *ОСЧК* $\{F, E, A\}$ является D-полной тогда и только тогда, когда A-полная частичния квазигруппа и $F \neq E$.

Примечание 1.

Если (Q, A) - частичный группоид и $\mathcal{D}A \leq$ Сард Q, то может случиться, что „A ортогональна A". Частичные операции в *ОСЧО* (по определению -[2]) попарно между собой неравные. Справедливо ([2]): $\{F, E, A\}$ является *ОСЧК* тогда и только тогда, когда A-частичная квазигруппа, $\mathcal{D}A = \mathcal{D}F = \mathcal{D}E$ и $A \neq F \neq E$. В лемме 1. достаточно требовать $E \neq F$. Частичная квазигруппа $(\{1, 2\}, A)$, определенная через $A(1, 1)=1$ и $A(2,2)=2$, является полной, но $E=F\,(=A)$.

Если (Q, A)-регулярная, то $E \neq F$, $E \neq A$ и $F \neq A$.

Если (Q, A) и (Q, B)-частичные квазигруппы, $\mathcal{D}A = \mathcal{D}B$ и Card $\mathcal{D}A >$ $<$Card Q, то $A \neq B$.

В [3] доказано, что справедлива:

Лемма 2. Если (Q, A)-полная частичная квазигруппа и Сард $Q=q$ >2, то Card $\mathcal{D}A > 2q$-2.

Для частичных группоидов (Q, A) принято считать, что справедливо $A_x \cup A_y \cup \mathcal{R}A = Q$, где A_x- множество всех первых координат упорядоченных пар из $\mathcal{D}A$, A_y-множество всех вторых координат этих же упорядоченных пар, а $\mathcal{R}A$-множество всех A-произведений.[1])

Определение 2. Частичная квазигруппа (Q, A) является *сжимающейся* тогда и только тогда, когда справедливо

(2) $$A_x \neq Q \wedge A_y \neq Q \wedge \mathcal{R}A \neq Q.$$

Частичная квазигруппа (Q, A) является несжимающейся тогда и только тогда, когда справедливо

(3) $$A_x = Q \vee A_y = Q \wedge \mathcal{R}A = Q.$$

Частичные квазигруппы $(\{1, 2, 3, 4\}, A)$ и $(\{1, 2, 3, 4\}, B)$, определенные таблицами 1 и 2, являются сжимающейся и несжимающейся частичными квазигруппами (в том же порядке).

Только что упомянутые частичные квазигруппы являются регулярными. Частичная квазигруппа $(\{a, b\}, \bar{A})$, определенная табл. 3, является несжимающейся. Регулярным частичным квазигруппам $(\{1, 2, 3, 4\}, A)$ и $(\{a, b\}, \bar{A})$ соответстует ([1]) одна и та же 3-семисеть, изображенная на рис.

---

[1]) Об этом см. и [3].

1. (Таким образом, для частичной квазигруппы $(\{a, b\}, \bar{A})$ можно было бы сказать, что она является „сжатием" частичной квазигруппы $(\{1, 2, 3, 4\}, A)$. [3].)

A	1	2	3	4
1		1		2
2				
3				1
4				

Табл. 1.

B	1	2	3	4
1		1	4	2
2				
3		2	1	3
4				

Табл. 2.

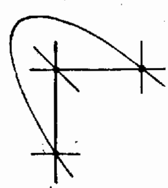

Рис. 1.

$\bar{A}$	a	b
a	a	b
b		a

Табл. 3.

Из определения 2. следует, что справедлива:

Лемма 3. Если частичная квазигруппа (Q, A) является несжимающейся, то Card $\mathcal{D}A \geqslant$ Card Q.

Обратное положение не является справедливым.

Примечание 2.

3-семисети $(\mathcal{T}, L_1, L_2, L_3)$, ввиду построения из [1], соответствует регулярная частичная квазигруппа (Q, A) являющаяся несжимающейся, а Card Q равен L-порядку ([1]) 3-семисети $(\mathcal{T}, L_1, L_2, L_3)$. Обратное положение справедливо: если регуляная частичная квазигруппа (Q, A) является несжимающейся, то L-порядок, соответствующий 3-семисети $(\mathcal{T}, L_1, L_2, L_3)$, равен Card Q. Регулярная частичная квазигруппа, определенная таблицей 1, являетстя сжимающейся и L-порядок, соответствующий 3-семисети-, меньше Card Q.

Без трудностей доказываются следующие положения.

Теорема 1. Если $\sum=\{F, E, A_1, \ldots A_{k-2}\}$ является D-полной ОСЧК, то, по меньшей мере, существует одна A_i, $(\in\sum\setminus\{F, E\})$ являющаяся несжимающейся.

Теорема 2. Если частичная квазигруппа (Q, A) является полной, то (Q, A) является несжимающейся.

Для построения одного класса D-полных *ОСЧК* важно следующее положение:

Теорема 3. Если $\sum=\{E, F, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ *ОСЧК* и если существует по меньшей мере одна полная $A_i \in \sum \setminus \{F, F\}$, то $\sum$ является D-полной *ОСЧК*.

Теорема 4. Существует D-полная *ОСЧК* $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$, в которой каждая A_i $(\in \sum \setminus \{F, E\})$-неполная частичная квазигруппа.

Положение доказывает ОСЧК $\sum=\{F, E, A_1, A_2\}$ на $Q=\{1, 2, 3, 4\}$, где A_1 и A_2 определены таблицами 4a и 4b[1])

A_1	1	2	3	4
1	1	2	3	
2	4	1	2	
3	3		1	4
4	2	3		1

Табл. 4a

A_2	1	2	3	4
1	1	3	2	
2	3	2	4	
3	4		3	2
4	2	1		4

Табл. 4b

Определение 3. *РОСРЧК* $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ на Q является RD-полной тогда и только тогда, когда для любой *РОСРЧК* $\bar{\sum}=\{\bar{F}, \bar{E}, \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_{k-2}\}$ на Q справедливо

$$A_1 \subseteq \bar{A}_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-2} \subseteq \bar{A}_{k-2} \Rightarrow A_1 = \bar{A}_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-2} = \bar{A}_{k-2}.$$

Так как каждая *РОСРЧК* является *ОСЧК*, то, учитывая теорему 1, находим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 5. Если в RD-полной *РОСЧК* $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ каждая A_i $(\in \sum \setminus \{F, E\})$- сжимающаяся, то $\sum$ не является D-полной *ОСЧК*.

Частичные квазигруппы A_1 и A_2, определенные таблицами 5a и 5b, являются сжимающимися, регулярными и регулярно ортогоналными. $\{F, E, A_1, A_2\}$ является RD-полной *РОСЧК*. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Существуют RD-полные *РОСЧК* в которых все частичные квазигруппы являются сжимающимися.

1) Положение доказывает и ОСЧК из Примера 1. в [4].

A_1	1	2	3	4
1	1	4	3	
2	4	3	1	
3	3	1	4	
4				

Табл. 5a

A_2	1	2	3	4
1	1	2	4	
2	4	1	2	
3	2	4	1	
4				

Табл. 5b

Теорема 7. Если $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ является D-полной ОСЧК на Q, $k\leq q+1$, где $q=\text{Card } Q$, то $\text{Card } \mathcal{D}A_i>q$.

Доказательство

Пусть справедливо противоположное — $\text{Card } \mathcal{D}A_i\leq q$. Тогда в каждой таблице частичных квазигрупп, принадлежащих системе Σ, существует, по меньшей мере, одна строка, скажем m-тая, в которой не существует больше одного злемента, и, по меньшей мере, один столбец, скажем n-той, в котором не существует больше одного злемента, так что A_i (m, n) не определенные, $i=1, \ldots, k$-2.

Сначала рассмотрим случай $\text{Card } \mathcal{D}A_i=q$.

Пусть $\sum'=\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}\}$ — множество всех частичных квазигрупп, удовлетворящих условию $\mathcal{R}A_{i_l}=Q$, $l=1, \ldots$, р. Это значит, что каждый элемент множества Q находится точно по одному в каждой из таблиц A_{i_l}, $l=1, \ldots$,р.

В m-той строке таблиц частичных квазигрупп A_{i_l} находится элемент, обозначим его через a_{mi_l}, или эта строка является пустой, а в n-том столбце находится элемент a_{ni_l} или этот столбец является пустым, $l=1$,. . . ,р.

В пересечение m-той строки и n-того столбца (являющимся пустым) таблицы частичной квазигруппы A_{i_1} положим элемент a_{ji_1}, удовлетворяющий условиям $a_{ji_l}\neq a_{mi_1}$, $a_{ji_1}\neq a_{ni_1}$ (если m-тая строка и n-той столбец не являются пустыми; в противоположном случае соответствующее условие не учитывается).

Таким образом мы получили частичную квазигруппу $\bar{A}_{i_1}$, удовлетворяющую условиям $\bar{A}_{i_1}\supseteq A_{i_1}$ и $\bar{A}_{i_1}\neq A_{i_1}$.

Пусть элемент a_{ji_1} находится в пересечении s-той строки и t-того столбца таблицы частичной квазигруппы A_{i_1}.

В пересечение m-той строки и n-того столбца таблицы частичной квазигруппы A_{i_2} положим элемент a_{ji_2}, удовлетворяющий условиям $a_{ji_2}\neq a_{mi_2}$, $a_{ji_2}\neq a_{ni_2}$, $a_{ji_2}\neq a_{ui_2}$, где a_{ui_2} элемент из пересечения s-той строки и т-того столбца частичной квазигруппы A_{i_2}.

Таким образом получена частичная квазигруппа $\bar{A}_{t_2}$, удовлетворяющая рсловиям $\bar{A}_{t_2} \supseteq A_{t_2}$ и $\bar{A}_{t_2} \neq A_{t_2}$.

$\bar{A}_{t_1}$ и $\bar{A}_{t_2}$ являются ортогональными. В самом деле, система

$$\bar{A}_{t_1}(x, y) = a_{jt_1}, \qquad \bar{A}_{t_2}(x, y) = a_{jt_2}$$

обладает единственным решением (m, n), так как справедливо

$$A_{t_1}(m, n) = A_{t_1}(s, t) = a_{jt_1} \qquad \text{и}$$

$$a_{jt_2} = A_{t_2}(m, n) \neq A_{t_2}(s, t) = a_{ut_2}.$$

Пусть элемент a_{jt_2} находится в пересечении h-той строки и g-того столбца таблицы частичной квазигруппы A_{t_2}.

В пересечение m-той строки и n-того столбца таблицы частичной квазигруппы A_{t_3} положим элемент a_{jt_3}, удовлетворяющияи условиям

$$a_{jt_3} \neq a_{mt_3}, \qquad a_{jt_3} \neq a_{nt_3}, \qquad a_{jt_3} \neq a_{ut_3}, \qquad a_{jt_3} \neq a_{vt_3},$$

где a_{ut_3}— элемент из пересечения s-той строки и t-того столбца частичной квазигруппы A_{t_3}, а a_{vt_3} — элемент из пересечения h-той строки и g-того столбца частичной квазигруппы A_{t_3}.

Таким образом мы получили частичную квазигруппу $\bar{A}_{t_3}$, удовлетворяющую условиям $\bar{A}_{t_3} \supseteq A_{t_3}$ и $\bar{A}_{t_3} \neq A_{t_3}$.

На основании предшествующего получаем, что частичные квазигруппы $\bar{A}_{t_3}$, $\bar{A}_{t_2}$ и $\bar{A}_{t_1}$ попарно ортогональны.

Продолжая эту процедуру, наконец, можно выбрать элемент $a_{jt_{q-2}}$ (если $p = к—2 = p—1$), удовлетворяющий системе из q-1 неравенств (построенной способом из подробно описанной части доказательства).

Таким образом, можно получить $ОСЧК \sum = \{\bar{E}, \bar{F}, \bar{A}_{t_1}, \ldots, \bar{A}_{t_{q-2}}\}$, удовлетворяющую условиям $A_{t_1} \subseteq \bar{A}_{t_1}, \ldots, A_{t_{q-2}} \subseteq \bar{A}_{t_{q-2}}$, $A_{t_1} \neq \bar{A}_{t_1}, \ldots, A_{t_{q-2}} \neq \neq \bar{A}_{t_{p-2}}$.

Только что приведенные рассуждения справедливы для частичных квазигрупп A_t, удовлетворяющих условию $\mathcal{R}A_t = Q$. Если $\mathcal{R}A_t \neq Q$, то соответствующие рассуждения являются даже менее сложными. В самом деле, если в пересечение m-той строки и n-того столбца одной из A_t, удовлетворяющих условию $\mathcal{R}A_t \neq Q$, положим элемент $a_t \in Q \setminus \mathcal{R}A_t$, то сразу получаем расширение $\bar{A}_t$ частичной квазигруппы A_t, являющееся частичной квазигруппой ортогональной с $\bar{A}_{t_l}$ для любого $l \in \{1, \ldots, p\}$.

Отсюда, так как, по предположению, $\sum = \{E, F, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ D-полная $ОСЧК$ и $k \leq q+1$, находим что Card $\mathcal{D}A_t \neq q$.

Подобным способом (еще меньеше сложно) доказываестя, что справедливо и Card $\mathcal{D}A_t \nless q$.

Теорема 8. Если $\sum = \{F, E, A_1, A_2\}$ RD-полная $РОСЧК$, то A_1 и A_2 являются сразу или сжимающимися или несжимающимися.

Доказательство

Пусть A_1 — несжимающаяся, а A_2 — сжимающаяся.

1° Выберем любой непустой столбец и любую пустую строку частичной квазигруппы A_1. В пересечение выбранных столбца и строки положим элемент a, непоявляющийся в выбранном столбце.

2° Выберем, далее, строку в A_1, имеющую элемент а; такая строка в A_1 существует, так как A_1 — несжимающаяся. В пересечение этой строки и пустого столбца положим любой элемент, не являющийся в рассматриваемой строке.

3° В соответствующие клетки частичной (сжимающейся) квазигруппы A_2 положим любой элемент, не появляющийся в $\mathcal{R}A_2$.

Таким образом построена *РОСЧК* $\bar{\sum}=\{\bar{F}, \bar{E}, \bar{A}_1, \bar{A}_2\}$, удовлетворяющая условиям $\bar{A}_1 \supseteq A_1$, $\bar{A}_1 \neq A_1$, $\bar{A}_2 \supseteq A_2$ и $\bar{A}_2 \neq A_2$. Так как $\sum=\{F, E, A_1, A_2\}$ *RD*-полная *РОСРЧК*, теорема доказана.

Если *RD*-полная *РОСРЧК* имеет больше двух частичных квазигрупп, то положение может стать неверным. Например, регуярные частичные квазигруппы A_1 и A_2, определенные на табл. 6а и 6 , являются сжимающимися, регулярная частичная квазигруппа, определенная на табл. 6с — несжимающаяся, а система $\{F, E, A_1, A_2, A_3\}$ — *RD*-полная *РОСРЧК*.

A_1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	
2	2	3	4	5	1	
3	3	4	5	1	2	
4	4	5	1	2	3	
5	5	1	2	3	4	
6						

Табл. 6а

A_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	
2	3	4	5	1	2	
3	5	1	2	3	4	
4	2	3	4	5	1	
5	4	5	1	2	3	
6						

Табл. 6b

A_3	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	6	
2	4	6	1	2	3	
3	2	3	4	5	1	
4	5	1	2	3	4	
5	3	4	5	1	2	
6						

Табл. 6с

Определение 4. Код $\mathcal{K}$ k-последовательностей над алфавитом Q—кодного расстояния d является полным тогда и только тогда, когда для любого кода $\overline{\mathcal{K}}$ k-последовательностей над алфавитом Q — кодного расстояния d справедливо

$$\mathcal{K}\subseteq\overline{\mathcal{K}}\Rightarrow\mathcal{K}=\overline{\mathcal{K}}.$$

Теорема 10. Пусть $\sum=\{F, E, A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ D-полная $ОСЧК$ на Q и пусть $k\leq q+1$.[1]) Тогда, по построению из [2], соответствующий код κ-последовательностей над алфавитом Q—кодного расстояния $d=\kappa$-1 является полным.

Доказательство

Пусть Card $\mathcal{D}A_i=\overline{q}\ (\leq q^2)$. Соответствующий код к-последовательлностей над алфавитом Q—кодного расстояния κ-1 является

$$\mathcal{K}=\left\{\begin{array}{lll}(e^{(1)}, & f^{(1)}, & a_1^{(1)},\ldots,a_j^{(1)},\ldots,a_{k-2}^{(1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (e^{(\overline{q})}, & f^{(\overline{q})}, & a_1^{(\overline{q})},\ldots,a_j^{(\overline{q})},\ldots,a_{k-2}^{(\overline{q})})\end{array}\right\};$$

где упорядоченная пара $(e^{(t)}, f^{(t)})$, пусть будет получена от F и E, в том же порядке, для $(e^{(t)}, f^{(t)})\in\mathcal{D}A$.

Предположим, что $\mathcal{K}$ на является полным кодом, т.е. что существует код $\overline{\mathcal{K}}$ κ-последовательностей над алфавитом Q — кодного расстояния κ-1, удовлетворяющий условию

$$\overline{\mathcal{K}}=\mathcal{K}\cup\{(e^{(\overline{q}+1)}, \quad f^{(\overline{q}+1)}, \quad a_1^{(\overline{q}+1)},\ldots,a_j^{(\overline{q}+1)},\ldots,a_{k-2}^{(\overline{q}+1)})$$

и

$$\mathcal{K}\neq\overline{\mathcal{K}}.^{2)}$$

$$(e^{(\overline{q}+1)}, \quad f^{(\overline{q}+1)})\notin\mathcal{D}A_i.$$

Учитывая условие $3\leq k\leq q$ и теорему 7, на основании построения из [2], коду $\overline{\mathcal{K}}$ можно сопоставить в соответствие $ОСЧО$ $\overline{\sum}=\{\overline{E}, \overline{F}, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{k-2}\}$ такую что

$\overline{E}=E$ для $(e^{(t)}, f^{(t)})\in\mathcal{D}A_i$ и $\overline{E}\,(e^{(\overline{q}+1)}, f^{(\overline{q}+1)})=e^{(\overline{q}+1)}$,

$\overline{F}=F$ для $(e^{(t)}, f^{(t)})\in\mathcal{D}A_i$ и $\overline{F}\,(e^{(\overline{q}+1)}, f^{(\overline{q}+1)})=f^{(\overline{q}+1)}$,

$\overline{A}_i=A_i$ для $(e^{(t)}, f^{(t)})\in\mathcal{D}A_i$ и $\overline{A}_i\,(e^{(\overline{q}+1)}, f^{(\overline{q}+1)})=a_i^{(\overline{q}+1)})$,

для любого $i\in\{1, \ldots, \kappa\text{-}2\}$.

Так как $\overline{E}$ и $\overline{F}$ единичные операции, то $ОСЧО$ $\overline{\sum}$ является $ОСЧК$ [2].

Отсюда, учитывая предположение, что $\overline{\sum}$ D-полная $ОСЧК$, находим, что теорема доказана.

---

1) q = Card Q.

2) Если только $\overline{q}\leqslant q$.

Примечание

Каждой RD-полной $POCЧК$ не соответствует полный код, так как существуют RD-полные $POCЧК$ не являющиеся D-полными $OCЧК$ (теоремы 1 и 6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ušan J., *k-Seminets*, Mat. bilten, 1 (XXVII), 1977, 41–46

[2] Ušan J., Stojaković Z., *Orthogonal Systems of Partial Operations*, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, 8, 1978, 47–51

[3] Stojaković Z., Ušan J., *A Classification of Finite Partial Quasigroups*, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, 9, 1979

[4] Ушан Я., Топпич Р., Сурла Д., *Один способ построения ортогональных систем латинских прямоугольников; кодов и к-семисетей*, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, 9, 1979.

[5] Dénes J., Keedwell A. D., *Latin Squares and their Applications*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

Janez Ušan, Zoran Stojaković

D-PUNI ORTOGONALNI SISTEMI PARCIJALNIH KVAZIGRUPA

U radu se uvode pojmovi domenski pun ortogonalni sistem parcijalnih kvazigrupa, puna parcijalna kvazigrupa i RD-pun regularno ortogonalni sistem parcijalnih kvazigrupa, utvrđuje niz njihovih svojstava i nalaze veze sa kodovima fiksiranog kodovskog rastojanja i k-semirešetkama.