Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 9 (1979)
Sammelheft der Arbeiten der Naturwissenschaftlich—Matematischen Fakultät Universität Novi Sad, Band 9 (1979)

Dragoslav Herceg

EIN DIFFERENZENVERFAHREN ZUR LÖSUNG VON RANDWERTAUFGABEN

Wir betrachten Randwertaufgaben der Form

$$-x''=f(t,x) \quad \text{auf} \quad I=[0,1],$$

(RWA) $$x(0)=z_0, \quad x(1)=z_1$$

und seine diskrete Analoga

(DRWA) $$A_h x = B_h F_h x + r_h \quad \text{in} \quad R^{N_h},$$

die durch Diskretisierung von (RWA) auf irregulären Gitter $I_h \subset I$ ensteht. Die auffretenden Zahlen und Funktionen sind stets reell. Ist N_h die Mächtigkeit von I_h, dann sind A_h und B_h (N_h, N_h) — Matrizen, d.h. A_h, $B_h \in R^{N_h, N_h}$. Weiter ist $r_h=(z_0, 0, \ldots, 0, z_1) \in R^{N_h}$ und F_h ist nichtlineare Abbildung des R^{N_h} in sich mit

$$(F_h x)(x)=f(z, x(t)) \qquad (t \in I_h).$$

In § 1 betrachtet man eine sog. Mehrstellen — oder Hermiteformel für $-x''(t)$ aus [6] und ein entsprechendes Restglied. Im äquidistanten Fall, d.h. wenn I_h äquidistantes Gitter ist, stimmt diese Formel mit gut bekannter Hermiteformel für $-x''(t)$, [1*c*], [2], [3], [5], [8*a*], überein. Das Gitter $I_h=\{t_i \in I: i=0, 1, \ldots, n\}$, $n \in N$ mit der Eigenschaft $t_i-t_{i-1} \leqslant t_{i+1}-t_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ und die Diskretisierung der Form (DRAW) werden in § 2 beschrieben. Diese Diskretisierung ist für Randwertaufgaben der Form (RWA) geeignet, deren Lösung sich in $[0, a]$, $0<a<<1$, stark ändert und in $[a, 1]$ fast konstant ist. Die Randwertaufgaben mit dieser Eigenschaft findet man bei Grenzschichtdi fferentialgleichungen (boundary layer problems), hydrodinamischen Schmiertheorie, chemischen Reaktionen, in Biologie (enzyme kinetics) usw. (vgl. [1*f*], [4], [9], [10*a*, *b*]). In § 3 ist gezeigt, daß A_h aus § 2 M-Matrix ist. Die Konvergenz des Parallelverfahrens für die Lösung (DRWA) mit einfachen Voraussetzungen ist wie in [2] bewiesen. Die Stabilitätsungleichung für diskrete Analoga (DRWA) von (RWA) kann man völlig analog wie in [2], Eigenschaft $P7$, beweisen. Ein numerisches Beispiel ist in § 4 gegeben, das ein lineares Model von Katalisys ist.

1. Differenzenformel

Sei $n \in N,\ k_j>0,\ k_j \in R\ (j=1, 2, \ldots, n)$,

(1) $$h^{-1}=\sum_{j=1}^{n} k_j, \qquad I_h=\{t_0=0, \qquad t_j=t_{j-1}+k_jh : j=1, 2, \ldots, n\}$$

I_h ist i.a. ein nichtäquidistantes Gitter, und für $k_j=1\ (j=1, 2, \ldots, n)$ ist es äguidistant. Es gelte weiter

$$S_j \in R\,(j=1, 2, 3),\ S_0=0,\ S_i \neq S_j \quad \text{für} \quad i \neq j, \qquad (2)$$
$$i, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$
$$t+S_jh \in I_h \quad \text{für} \quad t \in I_h \quad \text{und} \quad j=1, 2, 3. \qquad (3)$$

Mit diesen Varaussetzungen ist in [6] nach dem Verfahren aus [5] folgende Formel bewiesen:

$$P=\sum_{j=0}^{n} (h^2 a_j x\,(t+S_jh)+b_j x''\,(t+S_jh))=0(h^4) \quad \text{für} \quad x \in C^6(I) \qquad (4)$$

mit

(5) $$a_0=\frac{-2\,(S_1+S_2+S_3)}{S_1S_2S_3}, \qquad a_1=\frac{2\,(S_2+S_3)}{S_1\,(S_1-S_2)\,(S_1-S_3)}.$$
$$a_2=\frac{2\,(S_1+S_3)}{S_2\,(S_2-S_1)\,(S_2-S_3)}, \qquad a_3=\frac{2\,(S_1+S_2)}{S_3\,(S_3-S_1)\,(S_3-S_2)}.$$

und

(6) $$b_1=a_1\,(2y-3S_1^2)/60, \quad b_2=a_2\,(2y-3\ S_2^2)/60,$$
$$b_3=a_3\,(2y-3S_3^2)/60, \quad b_0=a_0y\,/30+9/10.$$

mit

$$y=S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3.$$

Für P gilt

$$P=\frac{h^4}{720}\sum_{j=1}^{3} (a_jS_j^6 x^{\mathrm{VI}}(\alpha_j)+30\,b_j\,S_j^4\,x^{\mathrm{VI}}\,(\beta_j)),$$
$$\alpha_j,\ \beta_j \in I \quad (j=1, 2, 3).$$

Ist $a_j \geqslant 0$ oder $a_j \leqslant 0$ $(j=1, 2, 3)$ und $b_j \geqslant 0$ oder $b_j \leqslant 0$ $(j=1, 2, 3)$ dann gibt $\alpha, \beta \in I$ mit

$$P=\frac{h^4}{720}\ (x^{\mathrm{VI}}(\alpha)\sum_{j=1}^{3} a_j\,S_j^6+x^{\mathrm{VI}}\,(\beta)\cdot\sum_{j=0}^{3} 30b_j\,S_j^4)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$a_1<0,\ a_2 \leqslant 0,\ a_3 \leqslant 0,\ b_1>0,\ b_2 \geqslant 0,\ b_3 \geqslant 0$$

falls

$$0 < S_2 \leqslant -S_1 \leqslant S_3, \quad S_2 \neq S_3 \tag{7}$$

gilt. Debei ist $y = S_1 S_2 + S_3 (S_1 + S_2) < 0$.

Um $|P|$ abzushätzen stezen wir (7) voraus. Es gilt offenbar

$$|P| < \frac{h^4}{720} Q \max_{t \in I.} |x^{IV}(t)|$$

mit

$$Q: = \sum_{j=1}^{3} (30 b_j S_j^4 - a_j S_j^6) = y (a_1 S_1^4 a_2 S_2^4 + a_3 S_3^4) - \frac{5}{2} (a_1 S_1^6 + a_2 S_2^6 + a_3 S_3^6).$$

Es ist, $a_1 S_1^4 + a_2 S_2^4 + a_3 S_3^4 = 2y$, [6]. Weiter haben wir

$$a_1 S_1^6 + a_2 S_2^6 + a_3 S_3^6 = \frac{2T}{(S_1 - S_2)(S_1 - S_3)(S_2 - S_3)}$$

mit

$$T: = (S_2^2 - S_3^3) S_1^5 + (S_3^2 - S_1^2) S_2^5 + (S_1^2 - S_2^2) S_3^5.$$

Da

$$T = (S_1 - S_2)(S_1 - S_3)(S_2 - S_3)(y^2 + S_1 S_2 (S_1^2 + S_2^2) + S_1 S_3 (S_1^2 + S_3^2) + S_2 S_3 (S_2^2 + S_3^2))$$

ist, haben wir

$$Q = -5 (S_1 S_2 (S_1^2 + S_2^2) + S_1 S_3 (S_1^2 + S_2^2) + S_2 S_3 (S_2^2 + S_3^2)) - 3y^2.$$

Wegen $0 < S_2 \leqslant -S_1 \leqslant S_3$ gilt $0 > (S_1 + S_3)(S_1 + S_2) = y + S_1^2$, $y^2 > S_1^2$ und

$$S_1 S_2 (S_1^2 + S_2^2) + S_1 S_3 (S_1^2 + S_3^2) + S_2 S_3 (S_2^2 + S_3^2) < 0$$

Es ist

$$0 < -S_1 S_2 (S_1^2 + S_2^2) - S_1 S_3 (S_1^2 + S_3^2) \leqslant S_2 S_3 (S_3^2 + S_2^2) + 2 S_3^4,$$

$$Q < 10 S_3^4 - 3 S_1^4 < 7 S_3^4$$

und

$$|P| < \frac{7 (S_3 h)^4}{720} \max_{t \in \mathrm{I}} | x^{\mathrm{VI}} | (t) | .$$

Aus (4) folgt jetzt die nichtäquidistante Hermiteformel für $-x'' = f(t, x)$:

$$h^{-2} (a_1 x_1 + a_0 x_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4 \tag{8}$$

mit

$$x_k = x(t + S_k h), \quad f_k = f(t + S_k h, x_k) \ (k = 0, 1, 2, 3).$$

Im äquidistanten Fall $-S_1 = S_2 = 1$; $S_3 \neq 1$, ist $a_3 = b_3 = 0$, $a_1 = a_2 = -1$ $a_0 = 2$, $b_1 = b_2 = 1/12$, $b_0 = 5/6$, d.h. die Formel (8) ist die bekannte Formel (vgl. [1c], [2], [3], [5])

$$h^{-2} (-x_1 + 2x_0 - x_2) = \frac{1}{12} (f_1 + 10 f_0 + f_2). \tag{9}$$

2. Diskretisierung von (RWA)

Das Gitter I_h formieren wir so, daß $t_i - t_{i-1} \leqslant t_{i+1} - t_i$ $(i=1, 2, \dots, n-1)$ gilt. Weiter bilden wir $S_j(i)$ $(j=1, 2, 3)$ so, daß (2), (3) und (7) für jedes $i=1, 2, \dots, n$ gelten, und diskretisieren (RWA) mit der Formel (8). Dabei rechnen wir Koeffiziente a_j, b_j $(j=0, 1, 2, 3)$ für jedes $t_j \in I_h \diagdown \{0, 1\}$ nach (5) und (6) mit $S_1 = S_1(i)$, $S_2 = S_2(i)$, $S_3 = S_3(i)$

Es gelte für $k_j \in R$ $(j=1, 2, \dots, n)$

$$k_1 = 1, \quad k_{i-1} \leqslant k_i \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} k_{i-j} \qquad (i=2, 3, \dots, n-1) \tag{11.1}$$

$$k_n = \sum_{j=0}^{p_{n-1}} k_{n-1-j}, \quad \text{für eines} \tag{11.2}$$

$$p_{n-1} \in \{0, 1, \dots, n-2\}$$

Sei I_h und h mit (1) erklärt. Weiter sei

$$S_2(i) = k_{i+1}, \qquad S_3(i) = S_2(i) + k_{i+2}, \tag{12}$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1); \qquad k_{n+1} := k_n),$$

$$S_1(i) = -\sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \qquad (i=1, 2, \dots, n-1), \tag{13}$$

wobei p_{n-1} in (11.2) bestimmt ist und $p_i \in \{0, 1, \dots, i-1\}$ $(i=1, 2, \dots, n-2)$ soll man so wählen, daß

$$0 < S_2(i) \leqslant -S_1(i) \leqslant S_3(i), \qquad (i=1, 2, \dots, n-2) \tag{14}$$

gilt. Aus (11), (12) und (14) folgt $k_1 = k_2 = 1$, und aus (11), (12) und (13) folgt. $s_2(n-1) = k_n = -S_1(n-1)$. Das heißt, wir können für $t = t_{n-1}$ die Formel (9) mit $h_1 = k_n h$ anwenden.

Gilt (11) für k_i, dann kann man (14) mit $S_j(i)$ $(j=1, 2, 3)$ erfüllen. Zum Beispiel, sei p für beliebige aber festes $i \in \{1, \dots, n-2\}$ die kleinste Zahl aus der Menge $\{0, 1, \dots, i-1\}$ für welches $-S_1(i) \geqslant S_2(i)$ gilt. Dann haben wir

$$\sum_{j=0}^{p-1} k_{i-j} < S_2(i) = k_{i+1} \leqslant \sum_{j=0}^{p} k_{i-j},$$

$$\sum_{j=0}^{p} k_{i-j} = \sum_{j=0}^{p-1} k_{i-j} + k_{i=p} \leqslant k_{i+1} + k_{i+2} = S_3(i),$$

weil $k_{i-p} \leqslant k_{i+2}$ ist. Die Bedingung (11) kann man z. B. mit $k_1 = 1$, $k_i = q^{i-2}$ $(i= =2, 3, \dots, n)$, $q \in [1,2]$ erfüllen.

Aus (12), (13) und (14) folgt für jedes $t_i \in I_h \diagdown \{0, 1\}$

$$t_i + S_j(i) \in I_h, \qquad (j=1, 2, 3)$$

$$t_{n-1} + S_j(n-1)\, h \in I_h \; (j=1, 2)$$

und

(15) $$2S_2(i) \leqslant S_3(i), \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

In $t_i \in I_h \setminus \{0, 1, t_{n-1}\}$ diskretisieren wir (RWA) mit der Formel (8) und in $t_{n=1}$ mit der Formel (9). Das diskrete System lautet $A_n x = B_h x + r_h$ mit $r_h = (z_0, 0, \ldots, 0, z_1) \in R^{N_h}$ und

(16) $$A_h = h^{-2} \begin{bmatrix} h^2 & & & & & & \\ a_{10} & b_1 & c_1 & d_1 & & & \\ a_{21} & a_{20} & b_2 & c_2 & d_2 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2,n-3} a_{n-2,n-4} \ldots & & a_{n-2,0} b_{n-2} & & c_{n-2} d_{n-2} & & \\ a_{n-1,n-2} a_{n-1,n-3} \ldots & & & & a_{n-1,0} b_{n-1} c_{n-1} & & \\ & & & & & & h^2 \end{bmatrix}$$

wobei die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ nach (5), (6) mit $S_j = S_j(i)$ ($j=$ ($j=1, 2, 3$) und a_i wie a_1, b_i wie a_0, c_i wie a_2, d_i wie a_3, α_i wie b_1 β_i wie b_0, γ_i wie b_2 und δ_i wie b_3 bestimmen sind. In (16) ist

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{falls} \quad j = p_i, \\ 0 & \text{falls} \quad j \neq p_i. \end{cases}$$

Aus (14) folgt $a_i, c_i, d_i \leqslant 0$, $\alpha_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ was in § 1 für a_1, a_2, a_3 bzw, b_1, b_2, b_3 gezeigt ist.

Die Matrix B_h ist dieselbe Form wie A_h mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ an der Stelle a_i, b_i, c_i, d_i und mit $(B_h)_{11} = (B_h)_{n+1,n+1} = 0$ $(N_h = n+1)$.

3. Einige Eigenschaften von A_h und B_h

Sei $m \in N$ und $T = \{1, 2, \ldots, m\}$. Für $x, y \in R^m$ sei $x \leqslant y$ bzw. $x < y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$ bzw. $x < y$ für alle ibzw. $i \in T$. Entsprechend sind $\leqslant$ und $<$ bei Funktionen und Matrizen stets punktweise bzw. elementweise zu verstehen. Für $x \in R^m$ sei.

$$T^0(x) = \{i \in T : x_i = 0\} \quad \text{und} \quad T^+(x) = \{i \in T : x_i > 0\}.$$

Sind T_1 und T_2 Teilmengen von T, und ist $A = (a_{ij}) \in R^{m,m}$, so sagen wir, daß A die Menge T_1 mit T_2 verbindet, wenn es zu jedem $i \in T_1$ endlich viele Indizes gibt

$i_0, i_1, \ldots, i_r \in T$ $(r = r(i) \in N)$ mit $a_{i_{k-1} i_k} \neq 0$

und $$i_0 = i, \; i_r \in T_2 \qquad ([2], [8a, b]).$$

Satz 1. Die Matrix A_h aus § 2 ist M-Matrix, d. h. es gilt.

$$(A_h)_{ij} \begin{cases} > 0 & \text{falls} \quad i = j, \\ \leqslant 0 & \text{falls} \quad i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N_h)$$

und $A_h^{-1} \geqslant 0$.

Beweis. Offenbar gilt für $i=2, 3, \ldots, n$

$$(A_h)_{ij}=\begin{cases} a_{i-1,j}\leqslant 0 & j=0, 1, \ldots, i-1, \\ c_{i-1}\leqslant 0 & \text{falls } j=i+1, \\ d_{i-1}\leqslant 0 & \text{falls } j=i+2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach M-kriterium aus [2] (vgl. auch [1a], [8a, b]), wenn es gibt ein $e\in R^{n+1}$, $e\geqslant 0$ mit $A_h e\geqslant 0$ so daß A $T^0(A_h e)$ mit $T^+(A_h e)$ verbindet, folgt $(A_h)_{ii}>0$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ und $A_h^{-1}\geqslant 0$. Da $a_i+b_i+c_i+d_i=0$ gilt, haben wir $(A_h e)=(1, 0, \ldots, 0, 1)$ und damit $T^0(A_h e)=\{2, 3, \ldots, n\}$. Aus (5), (14), (15) folgt für $i=1, 2, \ldots, n-1$

$$-S_1(i)=S_2(i) \Rightarrow c_i<0, \qquad d_i=0,$$

$$-S_1(i)>S_2(i) \Rightarrow c_i\leqslant 0, \qquad d_i<0.$$

Für jedes $i\in T^0(A_h e)$ sei $i_0=i$,

$$i_{k+1}=i_k+\begin{cases} 1 & \text{falls} \quad -S_1(i_k-1)=S_2(i_k-1), \\ 2 & \text{falls} \quad -S_1(i_k-1)>S_2(i_k), \end{cases}$$

$k=0, 1, \ldots, r-1$, und $i_r=i_{n+1}$. Dann ist

$$(A_h)_{i_k\, i_{k+1}}=\begin{cases} c_{i_k-1}<0 & \text{falls} \quad -S_1(i_k-1)=S_2(i_k-1), \\ d_{i_k-1}<0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt, A verbindet $T^0(A_h e)$ mit $T^+(A_h e)$ und damit ist der Satz bewiesen.

Da $\alpha_i>0$, $\gamma_i\geqslant 0$, $\delta_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ gilt, was aus (14) und (15) folgt, aus $\beta_i\geqslant 0$ folgt $B_h\geqslant 0$

Wir setzen jetzt

$$(17) \qquad k_1=1, \quad k_{i-1}\leqslant k_i\leqslant \min\Big(12.5k_{i-1}, \sum_{j=1}^{i-1} k_{i-j}\Big) \; (i=2, 3, \ldots, n-1)$$

voraus und zeigen daß $\beta_i>0$ ist.

Sei für beliebiges aber festes $i\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$ $S_j=S_j(i)$ $(i=1, 2, 3)$. Dann ist

$$\beta_i=-\frac{S_1+S_2+S_3}{15S_1S_2S_3}(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)+\frac{9}{10}$$

und gilt

$$(S_1+S_2+S_3)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)<13.5 \Rightarrow \beta_i>0.$$

Es ist

$$0<S_1+S_2+S_3\begin{cases} =S_3 & \text{falls} \quad -S_1=S_2, \\ <S_3 & \text{falls} \quad -S_1>S_2, \end{cases}$$

$$0<\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\begin{cases} =\dfrac{1}{S_2} & \text{falls} \quad -S_1=S_3, \\ <\dfrac{1}{S_2} & \text{falls} \quad -S_1<S_3 \end{cases}$$

und daraus folgt

$$(S_1+S_2+S_3)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)<\frac{S_3}{S_2}=1+\frac{k_{i+2}}{k_{i+1}}.$$

Jetzt aus (17) folgt $k_{i+2}\leqslant 12.5k_{i+1}$ und $S_3\leqslant 13.5S_2$ bzw. $\beta_i>0$.

Satz 2. Seien A_h, B_h Matrizen aus § 2 mit (17). Dann

a) es gibt den kleinsten positiven Eigenwert λ_h von $A_hx=\lambda B_hx$,

b) Matrizen $A_h-B_hD_h$ sind inversmonoton für jede Matrix $D_j=\operatorname{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_n)\in R^{n+1}$, für welche mit $S=S_3(n-1)=2k_n$ gilt

$$d_i\in[-12(hS)^{-2}, \lambda_h) \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. a) Es ist $A_h^{-1}\geqslant 0$ (Satz 1) und $B_h\geqslant 0$. Daraus folgt $A_h^{-1}B_h\geqslant 0$ und der Spektralradius $\rho=\rho(A_h^{-1}B_h)>0$ ist ein Eigenwert der Matrix $A_h^{-1}B_h$. Daraus folgt daß $\lambda_h=\rho^{-1}$ der kleinste positive Eigenwert von $A_hx=\lambda B_hx$ ist, [1a] [2].

b) Für $q\in[0, \lambda_h)$ haben wir

$$A_h-qB_h=A_h(E-qA_h^{-1}B_h), \qquad \rho(qA_h^{-1}B_h)<1$$

und daraus $(A_h-qB_h)^{-1}\geqslant 0$.

Sei jetzt $D_1=\operatorname{diag}(d_0, -12(hS)^{-2}, \ldots, -12(hS)^{-2}, d_n)$. Dann gilt $(A_h-B_hD_1)_{ij}\leqslant 0$ falls $i\neq j$. Diest ist richtig, wenn

$$a_i+12S^{-2}d_i\leqslant 0, \qquad c_i+12S^{-2}\gamma_i\leqslant 0 \ (i=1, 2, \ldots, n)$$
$$d_i+12S^{-2}\delta_i\leqslant 0 \ (i=1, 2, \ldots. n-1)$$

gilt. Wegen $a_i<0$ und

$$d_i=\frac{a_i}{60}(2y-3S_1^2)$$

mit $S_1=S_1(i)$ gibt

(18) $$1+\frac{2y-3S_1^2}{5S^2}\geqslant 0 \Rightarrow a_i+12S^{-2}\alpha_i\leqslant 0.$$

Nach (14) gilt $S\geqslant S_3(i)\geqslant -S_1(i)\geqslant S_2(i)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$

$$S^2+y\geqslant(S_3(i))^2+y=(S_3(i)+S_2(i))(S_3(i)+S_1(i))\geqslant 0$$

und

$$5S^2+2y-3S_1^2\geqslant 2(S^2+y)\geqslant 0.$$

Damit (18) ist bewiesen. Analog beweist man $c_i+12S^{-2}\gamma_i\leqslant 0$ und $d_i+12S^2\delta_i\leqslant 0$.

Die Inversmonotonie von $A_h-B_hD_1$ folgt nach M-Kriterium [2] mit $e=(1, 1, \ldots, 1)\in R^{n+1}$, $A_he=(1, 12S^{-2}, \ldots, 12S^{-2}, 1)>0$. Da $D_1\leqslant D_h\leqslant qE$ für $q\in[0, \lambda_h)$ ist, haben wir

$$A_h-qB_h\leqslant A_h-B_hD_h\leqslant A_h-B_hD_1.$$

und nach Satz 3 aus [2] folgt $(A_h-B_hD_h)^{-1}\geqslant 0$.

Auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$A_h x = B_h F_h x + r_h$$

kann man das Parallelverfahren anwenden, falls

(19) $$-q\,(v-w) \leqslant f(t, v) - f(t, w) \leqslant \mu\,(v, w),\quad v,\ w \in R,\quad w \leqslant v$$

für q, $\mu \in R$ gilt, wobei

$$-3\,(hk_n)^{-2} \leqslant \mu < \lambda_h$$

(λ_h der kleinste Eigenwert von $A_h x = \lambda B_h x$) ist, und

$$3\,(h\,k_n)^{-2} < 0.5\,(\lambda_h + q).$$

Nämlich, als Folgerung der Sätze 1 und 2 gilt mit

$$T_h = A_h - B_h F_h:$$

a) $| T_h^{-1} x - T_h^{-1} y | \leqslant (A_h - \mu B_h)^{-1} | x - y |$,

b) für jede Matrix $D_h = \mathrm{diag}\,(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_i \in [-3\,(hk_n)^{-2}, \lambda_h)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ das Parallelverfahren

(20) $$x^0 \in R^{n+1},\ (A_h - B_h D_h)\, x^{k+1} = B_h\,(F_h - D_h)\, x^k + r_h,\ k \in N$$

konvergiert für jedes x^0 gegen eindeutiger Lösung von $T_h x = r_h$.

Der Beweis dieser Behauptungen ist völlig analog mit dem Beweis von $P2$ und $P3$ aus [2].

Sei $\bar{x}_h$ Lösung von $T_h x = r_h$. Dann für x^k aus (20) gilt ([2])

$$|\bar{x}_h - x^k| \leqslant (A_h - \mu B_h)^{-1}\, | r_h - T_h x^k |.$$

Ist z Lösung von $(A_h - \mu B_h)\, z = | r_h - T_h x^k |$ dann gilt ([2])

$$| \bar{x}_h - x^k | \leqslant z.$$

Als weitere Folgerungen der Sätze 1 und 2 haben wir folgende Behauptungen, die man ganz analog wie $P7$ und $P8$ aus [2] beweisen kann.

Sei k_h (14.2) erfüllt und $hk_n \to 0$ wenn $n \to \infty$. Sei (19) richtig und $\mu < \pi^2$ (π^2 ist der kleinste Eigenwert von $-x'' = \lambda x$ in I, $x(0) = x(1) = 0$) dann ist für hinreichend grosses n $\| (A_h - \mu B_h)^{-1} \|_\infty$ gleichmässig beschränkt und es gilt die Stabilitätsungleichung

$$\|x - y\|_\infty \leqslant \delta \|T_h x - T_h y\|_\infty \text{ für}$$

$x, y \in R^{n+1}$, wobei $\delta \geqslant 0$ unabhängig von h und n ist. Bemerken wir nur, daß $| P | \to 0$ gilt, wenn $n \to \infty$. Es ist $S_3(i) \leq 2k_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ und

$| P | < \dfrac{28}{720}\,(k_n\,h)^4 \cdot \max\limits_{t \in I} |e^{\mathrm{IV}}(t)|$ für $e \in c^6(\mathrm{I})$. Offenbar folgt aus $hk_n \to 0$ $| P | \to 0$.

Sei jetzt x_h^- die eindeutige Lösung von $T_h x = r_h$ und u die Lösung von (RWA). Sei u_h Restriktion von u auf I_h. Dann gilt für $u \in c^6(\mathrm{I})$ wegen (11)

$$c_h := | T_h u_h - r_h | \leqslant \text{const.}\ (hk_n)^4$$

$$| x_h^- - u_h | \leqslant (A_h - \mu B_h)^{-1} c_h \leqslant \text{const.}\ (hk_n)^4,$$

weil $(A_h - \mu B_h)^{-1}$ gleichmässig beschränkt ist, und daraus folgt

$$\| x_h^- - u_h \| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

4. Numerisches Beispiel

Wir betrachten die Randwertaufgabe

(21) $$-x'' = 4\lambda^2 (1-x) \quad \text{in} \quad I \quad x(0) = x(1) = 0,$$

mit der Lösung

$$x(t) = 1 - \frac{e^{\lambda(2t-1)} + e^{\lambda(1-2t)}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

hat. Sei x_h Restriktion von $x(t)$ auf I_h, und x_h die Lösung der diskrete Analoga von (21). Sei $2n+1$ Anzzahl der Punkte von I_h und $k = (k_1, k_2 \ldots, k_n) \in R^n$. Weiter bezeichnen wir $\| x_h^h - x_h \|_\infty$ mit ε.

Wagen $x(0.5+t) = x(0.5-t)$, $t \in [0{,}0.5]$, betrachten wir x_h^h und x_h nur für $t \in [0, 0.5]$.

Für $x(t)$ gilt

$$\lambda = 40, \ t \in [0.1, 0.5] \Rightarrow x(t) \in (0.99966, 1).$$

In der Tabelle I sind 13 Vektoren k_j gegeben. Mit diesen Vektoren haben wir 13 diskrete Analoga gemacht. Für jedes k_j ist n_j die Anzahl der Punkte der Menge $I_h \cap [0, 0.5]$ bezeichnet und mit m_j die Anzahl der Punkte aus $I_h \cap [0, 0.1]$. Weiter ist $\varepsilon_j = \| x_j^h - x_h \|_\infty$.

Tabelle I

n	j	k_j
30	1	$(1, \ldots, 1)$
	2	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{6}, 2, 2, 5, \ldots, 5)$
	3	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{6}, 4, 20, \ldots, 20)$
	4	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{10}, 3, \ldots, 3)$
	5	$(\underbrace{1, \ldots 1}_{20}, 1.5, \ldots, 1.5)$

40	6	$(1, \dots, 1)$
	7	$(\underbrace{1, \dots, 1}_{10}, 2, 2, 2, 6, 10, 10, 10, 12, 18, 18, \dots, 18)$
	8	$(\underbrace{1, \dots, 1}_{12}, 2, 2, 4, 4, 8, 16, 24, 28, \dots, 28)$
	9	$(\underbrace{1, \dots, 1}_{8}, 2, 5, 5, 5, 5, 15, 30, 50, 105, 210, 260, 300, \dots, 300)$
50	10	(1, 1, 1. 5, 2. 5, 4. 5, 8. 5, 15, 27, 40, 70, 120, 210, 300, 500, 700, 800, 1000, . . . , 1000)
	11	(1, 1, 1. 9, 3. 6, 6. 8, 12. 8, 24, 24. 9, 25, 46, 54, 98, 102, 150, 250, 300, 400, 500, 600, 600, 800, 1200, . . . , 1200)
	12	$(\underbrace{1, \dots, 1}_{10}$, 1. 9, 3. 3, 5. 5, 8. 9, 14, 21. 4, 25, 25, 35, 40, 58, 82, 115, 145, 190, 250, 260, 300, 350, 450, 560, . . . , 560)
100	13	$(1, \dots, 1)$

Tabelle II

j	n_j	$m_j(\%)$	ε_j
1	31	7 (22.58)	$2.283 \cdot 10^{-2}$
2	31	12 (38.71)	$1.586 \cdot 10^{-3}$
3	31	12 (38.71)	$3.820 \cdot 10^{-3}$
4	31	12 (38.71)	$4.820 \cdot 10^{-3}$
5	31	8 (25.81)	$1.787 \cdot 10^{-2}$
6	41	9 (21.95)	$1.409 \cdot 10^{-2}$
7	41	21 (51.22)	$1.853 \cdot 10^{-3}$
8	41	22 (53.66)	$1.560 \cdot 10^{-3}$
9	41	22 (53.66)	$4.282 \cdot 10^{-3}$
10	51	22 (43.14)	$2.726 \cdot 10^{-3}$
11	51	25 (49.02)	$1.398 \cdot 10^{-3}$
12	51	32 (62.75)	$1.396 \cdot 10^{-3}$
13	101	23 (22.77)	$2.377 \cdot 10^{-3}$

Aus der Tabelle II kann man sehen, daß k_j so wählen kann daß m_j groß und ε_j klein ist. Im äquidistanten Fall ($j=1$) von 31 Punkte aus $I_h \cap$ [0, 0.5] nur 7 Punkte liegen in [0, 0,1]. Für $j=4$ von 31 Punkten aus $I_h \cap$ [0, 0.5] 12 (38.71%) Punkte liegen in [0, 0.1]. Mit 41 Punkten aus $I_h \cap$ [0, 0.5] im äquidistanteu Fall $j=6$ nur 9 (21.95%) Punkte liegen in [0, 0.1], d.h. weniger als im Fall $j=4$.

Für $j=13$ haben wir äquidistantes Fall. Vergleicht man m_{13} mit m_{12} und auch ε_{13} mit ε_{12}, dann sehen wir, daß Ergebnisse für $j=12$ ($n_j=51$) besser als Ergebnisse für $j=13$ ($n_j=101$) sind.

Literaturverzeichnis

[1a] Bohl, E., *Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer Tracts in Natural Philosophy, Bd.* 25, *Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York* (1974).

[1b] Bohl, E., *Stabilitätsungleichungen für diskrete Analoga nichtlinearer Randwertaufgaben. ISNM* 27, 9–28, *Birkhäuser – Verlag, Basel und Stuttgart* (1975).

[1c] Bohl, E., *On finite difference methods as applieid to boundary vaiue problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo (IAC), Publicazioni Serie III – N.* 100 (1975).

[1d] Bohl, E., *Iterative procedures in the study of discrete analoques for nonlinear boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo „Mauro Picone" (IAC), Pubb, S. III – N.* 107 (1975).

[1e] Bohl, E., *Zur Anwendung von Differenzchemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben. ISNM* 32, 25–47, *Birkhäuser – Verlag, Basel und Stutgart* (1976).

[1f] Bohl, E., *On a Stability lnequality for Nonlinear Operators. SIAM J. Num. Anal.*, 242–252 (1977).

[1g] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems. To appear in Procedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May* 30. – *June* 2., 1978. *Academic Press* (1978).

[2] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes of Higher Order. A Summary for Two Point Boundaty Value Problems Aequ. Math.*, 19, 1–36 (1976).

[3] Collatz, L., *The Numerical treatment of differential equations. Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York* (1964).

[4] Flaherty, J. E., R. E. O'Malley, Jr., *The Numerical Solution of Boundary Value Problems for Stiff Differential Equations, Math. Comp., Vol.* 31, *No.* 137, 66–93, (1977).

[5] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley, New York* (1962).

[6] D. Herceg, On Nonequidistant Difference Formulae of the Hermite Type, Review of Resarch Faculty of Science – University of Novi Sad, Vol. 8 (1978), 95–99 (in Serbo-Croation).

[7] Keller, H. B., *Numerical methods for two-point boundary value problems, Blaisdell, Waltham, MA.* (1968).

[8a] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren. Dissertation, Münster* (1975).

[8b] Lorenz, J., *Zur Inversmonotonie diskreter Probleme. Numer. Math.* 27, 227–238 (1977).

[9] M. Lentini, V. Pereyra, Boundary Problem Solvers First Order Systems Based on Deffered Corrections, In: Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, edited by A. K. Aziz, Academic Press, New York – San Francisco-London 293–315, 1975

[10a] Pearson, C. E., *On a Numerical Method for Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, *J. Math. Phys.*, 47, 134–154 (1968).

[10b] Pearson, C. E., *On Non-linear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, *J. Math. Phys.* 47, 351–358, (1968).

[11] Pflanz, E., *Uber die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichnungen* *Z. angew. Math. Mech.*, *Bd.* 17, *Nr.* 5, 296–300, (1937).

Dragoslav Herceg

JEDAN DIFERENCNI POSTUPAK ZA REŠAVANJE KONTURNIH PROBLEMA

Rezime

U radu se posmatra diskretizacija konturnog problema (*RWA*), za koji se pretpostavlja da ima fenomen graničnog sloja kod tačke $t=0$. Neekvidistantna mreža diskretizacije I_h formira se tako da interval $[0, \varepsilon]$, $0<\varepsilon\ll 1$, sadrži što veći broj tačaka mreže I_h. Diferencna formula (8), izvedena u [6], koristi se za obrazovanje diskretnog analogona (*DRWA*) početnog problema (*RWA*). Specijalan slučaj ove formule je poznata formula (9), (*v.* [1*c*], [2], [3], [5]). Dokazana je inverzna monotonuja matrica A_h (16), a kao posledica toga dobija se konvergencija postupka paralelne sečice za rešavanje (*DRWA*), nejednačina stabilnosti za $I_h=A_h-\mu B_h$ i konvergencija diskretnog ka kontinualnom rešenju za (*RWA*), kada broj tačaka mreže I_h teži beskonačnosti. Numerički primer pokazuje određene prednosti neekvidistantne diskretizacije u odnosu na ekvidistantnu.