Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

O JEDNOJ DIFERENCNOJ SHEMI ZA SINGULARNI PERTURBACIONI PROBLEM

Dragoslav Herceg

Saopšteno 27. 10. 1980.

Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

1. Uvod

U radu se posmatra linearni konturni problem

$$(KP) \qquad -x''-\lambda(p(t)x'+f(t))=0, \quad t\in[0,1], \quad x(0)=u, \quad x=(1)=v$$
$$\lambda>>1, \quad \lambda, \ u, \ v\in R,$$

pod pretpostavkama

$$(P1) \qquad p, \ f\in C[0,1], \qquad (P2) \quad p(t)\leqslant -1, \quad t\in[0,1],$$

i njegovo numeričko rešavanje diferencnim postupkom. Pretpostavka $(P1)$ obezbeđuje jedinstvenost rešenja $x(t,\lambda)$ problema (KP), [10], a pretpostavka $(P2)$ ima za posledicu da $x(t,\lambda)$ ima fenomen graničnog sloja kod $t=1$, [3], [5], [11], [13], [14]. To znači da rešenje $x(t,\lambda)$ problema (KP) za $0\leqslant t<1$ teži ka rešenju $y(t)$ redukovanog problema

$$(RP) \qquad p(t)y'+f(t)=0, \quad y(0)=u,$$

kada $\lambda\to\infty$, dok se u graničnom sloju debljine $0(\lambda^{-1})$ kod tačke $t=1$ jako menja. Pri numeričkom rešavanju (KP) javlja se problem određivanja približnih vrednosti rešenja $x(t,\lambda)$ u graničnom sloju kod tačke $t=1$. Korišćenje standardnih diferencnih shema za numeričko rešavanje (KP) zahteva veoma veliki broj $(\approx\lambda)$ tačaka da bi se dobila informacija o rešenju $x(t,\lambda)$ u graničnom sloju, [1], [3], [9], [21], [22]. Formiranje diskretnog analogona za (KP) sa prihvatljivim brojem tačaka, koji će dati dovoljan broj dobrih približnih vrednosti rešenja $x(t,\lambda)$ u graničnom sloju, može se postići na više načina.

Jedna mogućnost je koriščenje ekvidistantne mreže i posebnih formula za obrazovanje diskretnog analogona, pri čemu se koriste one osobine rešenja $x(t,\lambda)$ problema (KP) koje se mogu unapred odrediti. Primere takvih shema nalazimo u [1], [9], [11], [15], [16], [17], [21], [22]. Druga mogućnost je zamena problema (KP) van graničnog sloja redukovanim problemom (RP) koji se rešava nekim od numeričkih postupaka, a zatim se u graničnom sloju rešava (KP) uz korišćenje rezultata prethodnog računanja. Mreže za diskretizaciju (RP) i (KP) su ekvidistantne ali različitog koraka. Primere za ovakve postupke nalazimo u [13] i [14].

Treća mogućnost je formiranje diskretnog analogona za (KP) pomoću neekvidistantne mreže, pri čemu se teži da od malog ukupnog broja tačaka što veći broj tačaka pripada graničnom sloju. Ovakav postupak pojavljuje se u [19], [20]. Izbor neekvidistantne mreže može se obaviti tako da raspored njenih tačaka omogućava primenu simetričnih diferencnih formula, zasnovanih na ekvidistantnom rasporedu korišćenih tačaka, [3] i tamo navedena literatura. Neekvidistantne mreže mogu se birati i sa više slobode, ali tada diskretni analogon za (KP) ima nešto složeniji oblik i teže ga je proučavati. Primere shema sa takvim mrežama nalazimo u [5], [6], [7], [8], [19], [20].

Linearni konturni problem (KP) sa pretpostavkama ($P1$) i ($P2$) posmatra se i u [3], a njegova diskretizacija izvodi se na neekvidistantnoj mreži sa tako raspoređenim tačkama da se mogu koristiti simetrične diferencne formule.

U ovom radu se prikazuje jedna neekvidistantna dikskretizacija problema (KP), zasnovana na diskretizacii iz [6], i numeričko rešavanje diskretnog analogona

$$(DKP) \qquad Ax=F$$

za (KP). Pri tom se neekvidistantna mreža bira tako da se inverzna monotonost matrice A može dokazati pomoću kriterijuma iz [2], [4], [12]. Koristeći se inverznom monotonijom matrice A i rezultatima iz [12] dokazuje se konvergencija jednog iterativnog postupka za rešavanje (DKP).

U ekvidistantnom slučaju navedena neekvidistantna diskretizacija daje dobro poznatu shemu [4], [12], [21]. Kao ilustracija mogućnosti primene prikazane diskretizacije numerički je rešavan problem

$$(NP) \qquad -x''+\lambda x'=0, \quad x(0)=1, \quad x(1)=0,$$

koji je rešavan i u [3], [14], [18].

2. Numeričko rešavanje (KP)

2.1. *Oznake.* Neka je $m \in N$ i $T=\{1, 2, \ldots, m\}$. Za $x, y \in R^m$ neka je $x \leqslant y$ odnosno $x<y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$ odnosno $x_i<y_i$ za svako $i \in T$. Analogno definišemo relacije $\leqslant$ i $<$ za matrice, tj. za matrice $A, B \in R^{m,m}$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ je $A \leqslant (<)\, B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_{ij} \leqslant (<)\, b_{ij}$ za svako $i, j \in T$. Za $x \in R^m$ neka je $T^\circ(x)=\{i \in T : x_i=0\}$ i $T^+(x)=$ $=\{i \in T : x_i>0\}$. Matrica $A=(a_{ij})$ naziva se

— nenegativna, ako je $a_{ij} \geqslant 0 \quad (i, j \in T)$,

— L-matrica, ako je $a_{ii}>0$, $a_{ij} \leqslant 0$, $i \neq j \quad (i, j \in T)$,

— M-matrica, ako je L-matrica sa nenegativnom inverznom matricom A^{-1}.

Za $A=(a_{ij})$ definišemo matrice A_d, A_o, A^+, $A^- \in R^{m,m}$ na sledeći način.:

$$(A_d)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{za } i=j \\ 0 & \text{za } i\neq j \end{cases}, \qquad A=A_d+A_o,$$

$$(A^+)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{ako je } a_{ij}>0 \\ 0 & \text{ako je } a_{ij}\leqslant 0 \end{cases}, \qquad A=A^+ + A^-.$$

Neka su T_1 i T_2 podskupovi od T i neka je $A \in R^{m,m}$. Kažemo da A povezuje skup T_1 sa T_2 ako za svako $i \in T_1$ postoji konačno mnogo indeksa $i_0, i_1, \ldots, i_r \in N$ $(r=r(i) \in N)$ sa osobinom $a_{i_{k-1} i_k} \neq 0$, $i_0=i$, $i_r \in T_2$.

2.2. *Diskretizacija* (*KP*). Neka je $I=[0, 1]$, $x \in C^4(I)$, $h>0$, $h \in R$, $s_j \in R\setminus\{0\}$ $(j=1, 2, 3)$, $s_i\neq s_j$ za $i\neq j$ $(i, j=1, 2, 3)$ i $t, t+s_j h \in I$. Tada je, [6],

$$\text{(1)} \qquad -x''(t)=h^{-2}(dx(t+s_3h)+cx(t+s_2h)+bx(t)+ax(t+s_1h))+0(h^2),$$

$$\text{(2)} \qquad x'(t)=h^{-1}(\hat{c}x(t+s_2h)+\hat{b}x(t)+\hat{a}x(t+s_1h))+0(h^2),$$

sa

$$\text{(3)} \qquad a=\frac{2(s_2+s_3)}{s_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)}, \quad b=\frac{-2(s_1+s_2+s_3)}{s_1 s_2 s_3},$$

$$c=\frac{2(s_1+s_3)}{s_2(s_2-s_1)(s_2-s_3)}, \quad d=\frac{2(s_1+s_2)}{s_3(s_3-s_1)(s_3-s_2)},$$

$$\text{(4)} \qquad \hat{a}=\frac{-s_2}{s_1(s_1-s_2)}, \quad \hat{b}=-\frac{s_1+s_2}{s_1 s_2}, \quad \hat{c}=\frac{-s_1}{s_2(s_2-s_1)}.$$

Ako je

$$\text{(5)} \qquad s_1>0, \quad 0>s_2>s_3, \quad s_1+s_3\leq 0,$$

onda je

$$\text{(6)} \qquad a<0, \quad b>0, \quad c\leq 0, \quad d \begin{cases} \leq 0 & \text{ako je } s_1+s_2\geqslant 0, \\ >0 & \text{ako je } s_1+s_2<0 \end{cases}$$

$$\text{(7)} \qquad \hat{a}>0, \quad \hat{b}\leq 0, \quad \hat{c}<0.$$

Iz (3) i (4) dobijamo

$$\text{(8)} \qquad s_1+s_2=0 \Rightarrow -a=-c=\frac{b}{2}=s_2^{-2}, \quad \hat{b}=0, \quad -\hat{a}=\hat{c}=(2s_2)^{-1}.$$

U daljem radu pretpostavljamo da je $n\geqslant 3$, $n \in N$, $k_j>0$, $k_j \in R$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Neka je

$$\text{(9)} \qquad h^{-1}=\sum_{j=1}^{n} k_j, \quad I_h=\{t_0=0, \quad t_j=t_{j-1}+hk_j : j=1, 2, \ldots, n\}.$$

Mreža $I_h \subset I$ je u opštem slučaju neekvidistantna, a za $k_j=1$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ je ekvidistantna.

Kako posmatramo problem (KP) koji ima fenomen graničnog sloja kod $t=1$, to ćemo mrežu I_h formirati tako da što više njenih tačaka pripada intervalu $[1-\lambda^{-1}, 1]$. To postižemo podesnim biranjem parametra k_j. Neka je $n=2m$, $m \in N$ i

$$
(10) \qquad \begin{aligned} & k_{2i-1} \geqslant k_{2i+1} \geqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, m-1), \\ & k_{2i} = k_{2i-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \end{aligned}
$$

U svakoj tački $t_i \in I_h$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ diskretizujemo (KP) pomoću formula (1) i (2) sa koeficijentima (3) i (4), pri čemu je

$$
(11) \qquad s_1 = k_{i+1}, \qquad s_2 = -k_i, \qquad s_3 = -(k_i + k_{i-1}) \; (k_0 = k_1).
$$

Ako sa indeksom i obeležimo koeficijente (3), (4) dobijene sa s_1, s_2, s_3 iz (11), diskretni analogon za (KP) je

$$
(12) \qquad \begin{aligned} & h^{-2} (d_i x (t_i - (k_i + k_{i-1})h) + c_i x (t_i - k_i h) + b_i x (t_i) + a_i x (t_i + k_{i+1} h)) \\ & -\lambda (p (t_i) h^{-1} (\hat{c}_i x (t_i - k_i h) + \hat{b}_i x (t_i) + \hat{a}_i x (t_i + k_{i+1} h)) - f (t_i)) = 0, \\ & (i=1, 2, \ldots, n-1), \qquad x(t_0) = u, \qquad x(t_n) = v, \end{aligned}
$$

ili, kraće zapisano, $Ax=F$, gde je $A \in R^{n+1, n+1}$ matrica sa elementima

$$
(13) \qquad A_{ij} = \begin{cases} h_2 & \text{ako je } i=j=0, n, \\ a_i - \lambda h p (t_i) \hat{a}_i & \text{ako je } j=i+1, \; i=1, 2, \ldots, n-1, \\ b_i & \text{ako je } j=i, \; i=1, 3, \ldots, n-1, \\ b_i - \lambda h p (t_i) \hat{b}_i & \text{ako je } j=i, \; i=2, 4, \ldots, n-2, \\ c_i - \lambda h p (t_i) \hat{c}_i & \text{ako je } j=i-1, \; i=1, 2, \ldots, n-1, \\ d_i & \text{ako je } j=i-2, \; i=2, 4, \ldots, n-2, \\ 0 & \text{za ostale vrednosti } i, j \end{cases}
$$

a $F=h^2 (u, \lambda f(t_1), \lambda f(t_2), \ldots, \lambda f(t_{n-1}), v) \in R^{n+1}$.

Da je $A_{ii}=b_i$ za $i=1, 3, \ldots, n-1$ sledi iz (8), jer je tada $s_1+s_2=0$ i otuda je $\hat{b}_i=0$.

TEOREMA. Matrica A je inverzno monotona ako važi

$$
(14) \qquad -\lambda p(t) < 2 (k_1 h)^{-1}, \quad t \in [0, 1].
$$

Dokaz. Koristićemo se ML-kriterijumom iz [4]. Prema tom kriterijumu ako je $A \leq ML$, gde je M M-matrica i $L_0 \leq 0$, i ako postoji $e > 0$ takvo da je $Ae \geqslant 0$ i da M ili L povezuje $T^{\circ}(Ae)$ sa $T^{+}(Ae)$ matrice A je inverzno monotona. Matrice M i L koje ipunjavaju uslove ML-kriterijuma formiramo na sledeći način [4]:

$$M=A_d+B, \qquad L=E+A^{-1}C, \tag{15}$$

pri čemu je E jedinična matrica, a matrice $B\leq 0$ i $C\leq 0$ određene su tako da važi $A^{-}=B+C$. Prema [4] uslov $A\leq ML$ ekvivalentan je sa

$$A_0^{+}\leq BA_d^{-1}C. \tag{16}$$

Pre nego što definišemo matrice B i C, a time i matrice M i L, odredićemo A^{-} i dokazati da je $A_d>0$.

Da bismo dokazali da je $A_{i,\,i+1}\leq 0$ posmatrajmo prvo slučaj kada je i neparno. Tada je $s_1+s_2=0$ i zbog (8) imamo $A_{i,\,i+1}=-k_i^{-2}-\lambda p\,(t_i)\,h\cdot 0.5k_i^{-1}\leq$ $\leq -0.5hk_i^{-1}(2k_i^{-1}h^{-1}+\lambda p\,(t_i))\leq 0$,

jer je $k_1\geqslant k_i$, $2k_1^{-1}h^{-1}+\lambda p\,(t_i)\geqslant 0$ prema pretpostavkama teoreme. Za parno i imamo

$$A_{i,\,i+1}=\frac{-6k_i}{k_{i+1}\,(k_{i+1}+k_i)\,(k_{i+1}+2k_i)}-\lambda hp\,(t_i)\,\frac{k_i}{k_{i+1}\,(k_{i+1}+k_i)}$$

$$A_{i,\,i+1}\leq\frac{2k_i}{k_{i+1}\,(k_{i+1}+k_i)}\,(-3\,(k_{i+1}+2k_i)^{-1}+k_1^{-1})\leq 0$$

er je $k_1\geqslant k_i\geqslant k_{i+1}$.

Kako je $A_{i,\,i-1}=c_i-\lambda hp\,(t_i)\,c_i$, a zbog (6) i (7)

$c_i\leq 0$, $\hat{c}_i<0$, to je $A_{i,\,i-1}<0$ $(p\,(t)\leq -1,\ \lambda>0)$.

Zbog (6) je očigledno $A_{ii}=b_i>0$ $(i=1,\ 3,\ldots,n-1)$.

Za svako $i=2,\ 4,\ldots,n-2$ imamo

$$A_{ii}=b_i-\lambda hp\,(t_i)\,\hat{b}_i=\frac{3k_i-k_{i+1}}{k_i}+\lambda hp\,(t_i)\,(k_i-k_{i+1})$$

$$\geqslant\frac{3k_i-k_{i+1}}{k_i}-2\,(k_i-k_{i+1})\,k_1^{-1}$$

$$\geqslant 2\,(k_i-k_i+k_{i+1})\,k_1^{-1}>0.$$

Prema tome matrica A može imati pozitivne elemente van glavne dijagonale samo ako je $d_i>0$ za neko $i\in\{2,4,\ldots,n-2\}$. Uslov $A\leq ML$, odnosno relaciju (16), treba ispitivati samo u slučajevima kada je $d_i>0$, tj. kada je $k_{i+1}-k_i<0$. Neka su elementi matrica B i C dati sa

$$B_{ij}=\begin{cases} A_{ij} & \text{za } j=i+1,\ i=1,2,\ldots,n-1,\\ 0.5A_{ij} & \text{za } j=i-1,\ i=2,4,\ldots,n-2,\\ 0 & \text{u ostalim slučajevima,}\end{cases}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{za } j=i-1,\ i=1, 3, \ldots, n-1, \\ 0.5A_{ij} & \text{za } j=i-1,\ i=2, 4, \ldots, n-2, \\ 0 & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Znači, imamo $B \leq 0$, $C \leq 0$ i $A^- = B + C$. Neka su matrice M i L određene prema (15). Uslov (16) sada glasi

$$d_i b_{i-1} \leq 0.5\,(c_i - \lambda hp\,(t_i)\,\hat{c}_i)\,(\hat{c}_{i-1} - \lambda hp\,(t_{i-1})\,c_{i-1}),$$

odnosno

$$2d_i b_{i-1} \leqslant c_i c_{i-1} - \lambda\, h\,(c_i p\,(t_{i-1})\,\hat{c}_{i-1} + c_{i-1} p\,(t_i)\,\hat{c}_i) + \lambda^2 h^2 p\,(t_i)\,p\,(t_{i-1})\,\hat{c}_i \hat{c}_{i-1}$$

i kako je $\hat{c}_i \leqslant 0$, $c_i < 0$, $p\,(t_i) < 0$ za svako i, biće ispunjen ako je

(17) $$2d_i b_{i-1} \leqslant c_i c_{i-1}.$$

Tačnost ove relacije ispituje se samo ako je $k_{i-1} - k_i < 0$ za neko parni i. U tom slučaju (17) postaje

$$\frac{4\,(k_i - k_{i+1})}{2k_i + k_{i+1}} \leqslant \frac{2\,(2k_i - k_{i+1})}{k_i + k_{i+1}},$$

odnosno

$$2\,(k_i^2 - k_{i+1}^2) \leqslant 4k_i^2 - k_{i+1}^2,$$

te je očigledno da je to tačna relacija. Prema tome, dokazali smo da je $A \leqslant ML$.

Dokazaćemo sada da je M M-matrica. Pre svega po konstrukciji su matrice M i L L-matrice. Dalje, sa $\delta = (1, 1, \ldots, 1) \in R^{n+1}$ imamo

$$(M\,\delta)_i = \begin{cases} h^2 & \text{za } i=0, n, \\ a_i - \lambda\, hp\,(t_i)\,\hat{a}_i + b_i & \text{za } i=1, 3, \ldots n-1 \\ a_i + b_i + 0.5c_i - \lambda\, hp\,(t_i)\,(\hat{a}_i + \hat{b}_i + 0.5\hat{c}_i) & \text{za } i=2, 4, \ldots, n-2. \end{cases}$$

Kako je zbog (14) $-\lambda\, hp\,(t_i) < 2\,k_i^{-1}$ imamo

$$(M\,\delta)_i = k_i^{-2} - \lambda\, hp\,(t_i) \cdot 0.5k_i^{-2} > k_i^{-1}\,(1-1) = 0,\ i=1, 3, \ldots, n-1,$$

i

$$(M\,\delta)_i = a_i + b_i + c_i + d_i - 0.5c_i - d_i - \lambda\, hp\,(t_i)\,(\hat{a}_i + \hat{b}_i + \hat{c}_i) + \lambda\, hp\,(t_i) \cdot 0.5\hat{c}_i =$$

$$= \lambda\, hp\,(t_i) \cdot 0.5\hat{c}_i - 0.5c_i - d_i > 0, \quad i=2, 4, \ldots, n-2,$$

jer je $a_i + b_i + c_i + d_i = 0$, $\hat{a}_i + \hat{b}_i + \hat{c}_i = 0$, $\hat{c}_i < 0$, $p\,(t_i) < 0$ i $c_i + 2d_i < 0$. Znači, $T^\circ\,(M\,\delta) = \emptyset$, te je (prema M-kriterijumu [4]) matrica M M-matrica.

Kako je $(A\,\delta)_i = 0$ za $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ i $(A\,\delta)_i = h^2$ za $i = 0, n$, imamo $T^\circ\,(A\,\delta) = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ i $T^+\,(A\delta) = \{0, n\}$. Povezivanje skupa $T^\circ\,(A\,\delta)$ sa skupom $T^+\,(A\,\delta)$ pomoću matrice M ostvaruje se na sledeći način: za $i_0 \in T^\circ\,(A\,\delta)$ formira se niz

$$i_{j-1} = i_j + 1 \quad (j = 0, 1, \ldots, r-2)$$
$$i_r = 0$$

Na osnovu ML-kriterijuma sada sledi tvrđenje teoreme.

Kao posledica prethodne teoreme i teoreme 3.1 iz [12] sledi konvergencija iterativnog postupka

$$(A_d+B)x^{k+1}=-(C+\overset{+}{A_0})\,x^k+F\,(k=0,1,\ldots) \tag{18}$$

sa x^0, $F\in R^{n+1}$ ka jedinstvenom rešenju diskretnog analogona $Ax=F$.

3. Numerički primer

Koristeći se diskretizacijom iz 2.2 numerički je rešavan problem (NP) čije je rešenje

$$x(t)=\frac{1-e^{-\lambda(1-t)}}{1-e^{-\lambda}}.$$

U ovom slučaju je $p(t)=-1$, te uslov (14) glasi $\lambda\, k_1 h<2$. Mreža I_h je u svakoj od navedenih varijanti formirana tako da je taj uslov ispunjen, kao i uslovi (10). Za $x(t)$ važi

$$\lambda=50, \quad t\in[0,\ 0.75]\Rightarrow x(t)\in(0.999\,996,\ 1],$$

$$\lambda=100, \quad t\in[0,\ 0.85]\Rightarrow x(t)\in(0.999\,999\,69,\ 1].$$

Prema tome, posebno su interesantne vrednosti numeričkog rešenja iz intervala [0.75, 1], odnosno [0.85 1]. Usledećim tabelama sa n_j označen je ukupan broj tačaka mreže I_n, definisan prema (9), a sa m_j broj tačaka skupa $I_h\cap[0.75,\ 1]$ za $\lambda=50$, odnosno skupa $I_h\cap[0.85,\ 1]$ za $\lambda=100$. Vrednosti k_i definisane su na sledeći način

$$k_i=1,\ i=1,2,\ldots,N_j,\quad k_i=q_j,\quad i=N_j+1,\ldots,n_j-1.$$

Neka je x^h rešenje diskretnog analogona za posmatrani problem, a x_h restrikcija od $x(t)$ na I_h. Sa ε_j označena je veličina $\| x^h-x_h \|_\infty$ u svakom od navedenih slučajeva.

TABELA I ($\lambda=50$)

j	n_j	N_j	q_j	m_j (%)	ε_j
1	41	40	—	10 (24.39)	$5.574.10^{-2}$
2	41	16	2	17 (41.46)	$1.964\cdot10^{-2}$
3	41	18	5	21 (51.22)	$4.990\cdot10^{-3}$
4	81	80	—	20 (24.69)	$1.211\cdot10^{-2}$
5	81	54	20	59 (72.84)	$3.110\cdot10^{-3}$
6	81	58	12	60 (74.07)	$7.692\cdot10^{-4}$
7	161	160	—	40 (24.84)	$3.001\cdot10^{-3}$
8	161	138	32	141 (87.58)	$1.872\cdot10^{-4}$
9	161	150	50	151 (93.79)	$2.096\cdot10^{-4}$
10	201	200	—	50 (24.88)	$1.865\cdot10^{-3}$

Tabela II ($\lambda=100$)

j	n_j	N_j	q_j	m_j (%)	ε_j
1	41	40	—	7 (17.07)	$1.932\ 10^{-1}$
2	41	12	9	16 (39.02)	$1.655\ 10^{-2}$
3	41	18	5	19 (46.34)	$1.964\ 10^{-2}$
4	81	80	—	13 (16.05)	$5.574\ 10^{-2}$
5	81	58	12	49 (60.49)	$2.985\ 10^{-3}$
6	81	54	20	56 (69.14)	$1.007\ 10^{-3}$
7	161	160	—	25 (15.53)	$1.208\ 10^{-2}$
8	161	100	100	92 (57.14)	$4.751\ 10^{-2}$
9	161	138	32	127 (78.88)	$4.080\ 10^{-4}$
10	201	200	—	31 (15.42)	$7.799\ 10^{-3}$

U tabelama I i II za $j=1, 4, 7, 10$ imamo ekvidistantne diskretizacije. Upoređujući m_j u navedenim tabelama vidimo da neekvidistantne mreže imaju više tačaka u posmatranim podintervalima [0.75, 1], odnosno [0.85, 1] od ekvidistantnih mreža sa većim brojem tačaka. Pored toga, vrednosti ε_j pokazuju da je sa malim brojem tačaka neekvidistantne mreže moguće dobiti dobra numerička rešenja, čak bolja od rešenja dobijenih ekvidistantnom mrežom sa znatno većim brojem tačaka.

LITERATURA

[1] Bahvalov, N. S., *Čislennye metody* I, Nauka, Moskva, 1973.

[2] Bohl, E., Monotonie: *Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen, Springer Tracts in Natural Philosophy*, Bd. 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[3] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems*, To appear in Procedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30. — June 2., 1978., Academic Press, 1978.

[4] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes of Higher Order*. A Summary for Two Point Boundary Value Problems, Aequ. Math., 19, 1—36, 1979.

[5] Flaherty, J. E., R. E. O'Malley, Jr., *The Numerical Solution of Boundary Value Problems for Stiff Differential Equations*, Math. Comp., Vol. 31, No. 137, 66—93, 1977.

[6] Herceg, D., *Diferencni postupci sa neekvidistantnim mrežama*, doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.

[7] Herceg, D., *Ein Differenzenverhahren zur Lösung von Randwertaufgaben*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta univerziteta u Novom Sadu, knjiga 9, 1979.

[8] Herceg. D., *Nichtäquidistante Diskretisierung der Grenzschichtdifferentialgleichungen und einige Eigenschaften von diskreten Analoga*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta univerziteta u Novom Sadu, knjiga 9, 1979.

[9] Il'in, A. M., *Raznostnaja shema dlja differencial'nogo uravnenija s malym parametrom pri staršej proizvodnoj*, Mat. zametki, T. 6, No. 2, 237-248, 1969.

[10] Keller, H. B., *Numerical methods for tow-point boundary value problems*, Blaisdell, Waltham MA., 1968.

[11] Kellogg, R. B., A. Tsan, *Analyisis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem Without Turning Points*, Math. Comp., Vol. 32, No. 144, 1025-1039, 1978

[12] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren*, Dissertation, Münster, 1975.

[13] Lorenz, J., *Zur numerischen Lösung steifer Randwertaufgaben*, Kurzvortrag auf der GAMM — Tagung in Brüsesl 1978.

[14] Lorenz, J., *Combinations of initial and boundary value methods for a class of singular perturbation problems*, To appear in Procedings of the Conference on the numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30. — June 2, 1978., Academic Press, 1978.

[15] Miller, J. J. H., *Some finite difference schemes for a singular perturbation problem*, To appear in "Constructive Function Theory„. Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Blagoevgrad, 30 May — 4 June, Sofia, 1977.

[16] Miller, J. J. H., *Sufficient conditions for the convergence, uniformly in ε, of a three point difference scheme for a singular perturbation problem.* To appear in Proceedings of the Conference on „Praktische Behandlung von Differentialgleichungen in Anwendungsgebieten", Oberwolfach, 11—17 December, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag.

[17] Miller, J. J. H., *On the convergence, uniformly in ε, of difference schemes for a two point boundary singular perturbation problem.* To appear in Proceedings of the Conference on „The Numerical Analyisis of Singular Perturbation Problems", Nijmegen, 30 May — 2 June, 1978. Academic Press.

[18] Murray, J. D., *Lectures on nonlinear-differential-equation models in biology*, Clarendon Pre ss Oxford, 1977.

[19] Pearson, C. E., *On a Numerical Method for Ordinary Differential Equations of a Boundar Layer*, J. Math. Phys., 47, 134 — 154, 1968.

[20] Pearson, C. E., *On Non-linear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, J. Math. Phys., 47, 351-358, 1968.

[21] Samarskij, A. A., *Teorija raznostnyh shem*, Moskva, Nauka, 1977.

[22] Stoyan, G., *Monotone Difference Schemes for Diffusion-Convection Problems*, ZAMM 59, 361-372, 1979.

EIN DIFFERENZSCHEMA FÜR STEIFE RANDWERTAUFGABEN

Dragoslav Herceg

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir eine Diskretisierung von Randwertaufgaben der Form (KP) mit den Voraussetzungen $(P1)$, $(P2)$. Das irreguläre Gitter I_h ist druch (9) definiert. Diskrete Analoga $Ax=F$ von (KP) ist durch (12) und (13) erklärt. Dabei sin d a_i, b_i, c_i, d_i, b_i, c_i durch (3) und (4) mit s_1, s_2, s_3 aus (11) unter den Voraussetzungen (10) gegeben. Die Matrix A, (13), ist inversmonoton falls (14) gilt. Als die Folgerung dieses Satzes haben wir Konvergenze des Verfahrens (18) für numerische Losung von $Ax=F$. Das numerische Beispiel zeigt einige Vorteile nichtäqudistanter Diskretisierung.