Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

O KORIŠĆENJU NEEKVIDISTANTNE MREŽE KOD DIFERENCNIH POSTUPAKA

Dragoslav Herceg

Saopšteno 27. 10. 1980.

Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

1. Uvod

U radu se posmatra diskretizacija konturnog problema (KP) $-x''=f(t, x)$, $t\in I=[0, 1]$, $x(0)=\gamma_0, x(1)=\gamma_1$ na neekvidistantoj mreži

$$I_h=\{t_0=0,\ t_i=t_{i-1}+hk_i,\ i=1, 2, \dots, n\}$$

pri čemu je $n>3, n\in N, k_i\in R\,(i=1, 2, \dots, n)$, $h^{-1}=\sum_{i=1}^{n} k_i$. Pretpostavlja se da rešenje $x(t)$ problem (KP) postoji, da se u intervalu $[0, \varepsilon]$, $0<\varepsilon<<1$, naglo menja i da je u intervalu $[\varepsilon, 1]$ skoro konstantno. Primere problema oblika (KP) sa ovim osobinama nalazimo u [1], [4], [5], [8], [10], [11]. Da bi što veći broj tačaka mreže I_h pripadao intervalu $[0, \varepsilon]$ brojeva k_i biramo tako da važi:

$$1\leqslant k_i\leqslant k_{i+1}\quad (i=1, 2, \dots, n-1). \tag{1}$$

Kao i u [5] pretpostavljamo da je

$$k_n=\sum_{j=1}^{p_{n-1}} k_{n-1-j}\quad \text{za neko } p_{n-1}\in\{0, 1, \dots, n-2\},$$

$$k_{n+1}=k_n$$

i koristimo diferencnu formulu

$$-x''(t_i)=L_h x(t_i)+0(h^2),\quad t_i\in I_h\diagdown\{0, 1\}, \tag{2}$$

sa

$$L_h x(t_i)=h^2\,(a_i x(t_i+\alpha_1 h)+b_i x(t_i)+c_i x(t_i+\alpha_2 h)+d_i x(t_i+\alpha_3 h)) \tag{3}$$

Pri tom je za određeno $i\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$

$$\alpha_1=-\sum_{j=1}^{p_i} k_{i-j} \quad \text{za neko } p_i\in\{0, 1, \ldots, i-1\},$$

(4) $$\alpha_2=k_{i+1}, \quad \alpha_3=\alpha_2+k_{i+2},$$

$$a_i=\frac{2(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}, \quad b_i=\frac{-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

(5) $$c_i=\frac{2(\alpha_1+\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}, \quad d_i=\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}.$$

U diferencnoj formuli (2) koriste se četiri tačke, t_i, $t_i+\alpha_j h$ $(j=1, 2, 3)$, te red konzistencije u opštem slučaju ne može biti veći od 2, [12] . Neka je

(DKP) $$A_h x=B_h F_h x+r_h$$

diskretni analogon za (KP), dobijen primenom formule (2). Tada je matrica A_h oblika, [5] ,

$$A_h=h^{-2}\left|\begin{array}{llllll} h^2 & & & & & \\ a_{10} & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ a_{21} & a_{20} & b_2 & c_2 & d_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n-2,\,n-3}\,a_{n-2,\,n-4} & \cdots & a_{n-2,\,0} & b_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ a_{n-1,\,n-2}\,a_{n-1,\,n-3} & \cdots & & a_{n-1,\,0} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & h^2 \end{array}\right|$$

gde je za $i=1, 2, \ldots, n-1$; $j=0, 1, 2, \ldots, i-1$

$$a_{i\,j}=\begin{cases} a_i & \text{ako je } j=p_i, \\ 0 & \text{ako je } j\neq p_i. \end{cases}$$

Dalje je $B_h=\text{diag}\,(0, 1, \ldots, 1, 0)$, $(F_h x)(t)=f(t, x(t))$, $t\in I_h$, $r_h=(\gamma_0, 0, \ldots, 0, \gamma_1)$, [5].

U daljem radu pojmove inverzno-monotona matrica, L-matrica i M-matrica koristimo u uobičajenom smislu, [2], [5], [9].

Dokazi egzistencije rešenja x_h diskretnog analogona (DKP), konvergencije postupka paralelne sečice, [2], [5], za rešavanje (DKP) i konvergencije diskretnog rešenja za kontinualnom kada $n\to\infty$ mogu se uspešno sprovesti ako se dokaže inverzna monotonija matrica A_h i odrede uslovi za matricu $D=\text{diag}\,(d_0, d_1, \ldots, d_{n+1})$ pod kojima važi $(A_h-DB_h)^{-1}\geqslant 0$, [2], [5]. Ako je matrica A_h L-matrica, tj. ako su svi njeni elementi van glavne dijagonale nepozitivni, a elementi na glavnoj dijagonali su pozitivni, ispitivanje inverzne monotonije se znatno pojednostavljuje. Za matricu A_h je poznato [5], [6] da je pod navedenim uslovima L-matrica ako važi:

$$\alpha_2\leq-\alpha_1\leq\alpha_3, \quad \text{za svako } i=1, 2, \ldots, n-1.$$

S obzirom na (1) to će biti slučaj ako je

$$k_1=k_2,\quad k_{i+1}\leq\sum_{j=0}^{p_i}k_{i-j},\quad p_i\geqslant 1,\quad i=2,3,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Pri korišćenju računara za numeričko rešavanje (DKP) pogodno je da matrica A_h bude takva da ne zahteva veliki memorijski prostor, naročito za velike vrednosti n. S obzirom na njen oblik, postavićemo zahtev da bude trakasta sa širinom trake 2, tj. da bude $p_i\leq 1, i=2,3,\ldots,n-1$. Ako želimo da je A_h trakasta L-matrica sa širinom trake 2, uslov (6) se svodi na

$$k_1=k_2,\quad k_{i+1}\leq k_i+k_{i-1},\quad p_i=1\quad (i=2,3,\ldots,n-1). \tag{7}$$

U radu se posmatra izbor neekvidistantne mreže I_h i formiranje matrice A_h na osnovu formule (2), tako da A_h bude trakasta matrica sa širinom trake 2. Pri tom se postavlja još dva uslova koje ćemo posebno poučavati. Prvi se odnosi na izbor tačaka t_i neekvidistantne mreže I_h, tj. na određivanje brojeva k_i, tako da red konzistencije formule (2) bude za 1 veći, odnosno 3. Drugi uslov se odnosi na određivanje brojeva k_i tako da A_h bude L-matrica.

Proučavanje lokalne greške odsecanje kod diferencnih postupaka sa neekvidistantnom mrežom nalazimo u [3] i [13] , gde se traži funkcija rasporeda tačaka mreže da lokalna greška odsecanja bude što manja. U [3], [13] koristi se diferencna formula sa tri tačke i red konzistencije povećan je sa 1 na 2.

Formiranje matrice A_h koje je L-matrica izvedeno je za slučaj neekvidistantne diskretizacije u [5], [6]. Takođe, u [1] imamo jedan primer formiranja L-matrice A_h, gde se koriste diferencne formule zasnovane na ekvidistantnom rasporedu tačaka koje se koriste. U navedenim slučajevima matrice A_h nije trakasta.

2. Povećanje reda konzistencije formule (2)

U ovom paragrafu posmatra se izbor mreže I_h tako da formula (2) ima red konzistencije 3 i da matrica A_h bude trakasta sa širinom trake 2. Pri tom brojevi k_i treba da zadovoljavaju uslov (1).

TEOREMA 1. *Neka je* $k_i=\sqrt{2}^{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $p_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n-2)$, $p_{n-1}=1$ *i neka je* $L_h x(t_i)$ *definisano sa* (3), (4), (5) *pri čemu je za* $i=n-1$, $\alpha_2=-k_{n-1}$, $\alpha_3=k_n$. *Tada za* $x\in C^5(I)$ *važi*

$$-x''(t_i)-L_h x(t_i)=\begin{cases}O(h^3) & za\ i=1,2,\ldots n-2\\ O(h^2) & za\ i=n-1,\end{cases}$$

a matrica A_h *je inverzno monotona.*

Dokaz. Koristeći se formulama iz [12], [5] dobijamo:

$$-x''(t_i)-L_h x(t_i)=-\frac{h^2}{12}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\,x^{IV}(t_i)+O(h^3),\quad t_i\in I_h\setminus\{0,1\}.$$

Otuda vidimo da je tvrđenje teoreme tačno ako za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ važi

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = 0 \tag{8}$$

odnosno

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_{i+1}} + \frac{1}{k_{i+1} + k_{i+2}} \tag{9}$$

Jedinstveno rešenje za (9) je $k_i = c\sqrt{2}^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $c \in R$, što nije teško dokazati. Za $c=1$ sledi tvrđenje teoreme.

Inverzna monotonija matrice A_h sledi na osnovu ML-kriterijuma, [1], [5]. U [5] je dokazan inverzna monotonija matrice A_h sa takvim izborima k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ koji sadrže kao specijalan slučaj u ovoj teoremi navedeni izbor k_i. Međutim potrebno je, s obzirom na izbor α_2 i α_3 za $i=n-1$, dokazati da važi

$$4d_{n-2}b_{n-1} \leq c_{n-2}d_{n-1}.$$

Kako je

$$d_{n-2} = 2^{2-n} \cdot \frac{13\sqrt{2}-18}{7}, \quad b_{n-1} = 2^{1-n} \cdot (10\sqrt{2}-12),$$

$$c_{n-2} = 3^{3-n}. \quad d_{n-1} = 2^{1-n} \cdot \frac{24-22\sqrt{2}}{7},$$

to se lako uveravamo da poslednja nejednakost važi. Time je teorema dokazana.

Red konzistencije formule (2) ne može biti 4. Naime, tada bi pored (8) trebalo da važi i $(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3)=0$, što je nemoguće.

Pošto su brojevi k_i određeni na specijalan način i matrica A_h ima jednostavniji oblik nego u opštem slučaju. Pre svega je za $i=1, 2, \ldots, n-2$

$$a_i = 2^{-i} \cdot a, \quad b_i = 2^{-i}b, \quad c_i = 2^{-i}c, \quad d_i = 2^{-i}d,$$

i

$$a_{n-1} = 2^{1-n}\bar{a}, \quad b_{n-1} = 2^{1-n}\bar{b}, \quad c_{n-1} = 2^{1-n}\bar{c}, \quad d_{n-1} = 2^{1-n}\bar{d},$$

sa

$$a = \frac{8}{7}(\sqrt{2}-3) > 0, \quad b = 6-\sqrt{2} > 0, \quad c = -\sqrt{2} < 0, \quad d = \frac{13\sqrt{2}-18}{7} < 0$$

$$\bar{a} = \frac{8}{7}(18-13\sqrt{2}) < 0, \quad \bar{b} = 10\sqrt{2}-12 > 0, \quad \bar{c} = 8\sqrt{2}-12 < 0, \quad \bar{d} = \frac{24-22\sqrt{2}}{7} < 0$$

Zatim, matrica A_h se može prikazati kao

$$A_h = h^{-2}D \cdot A$$

gdje je $h^{-1} = \sqrt{2^n}-1)(\sqrt{2}+1)$, $D = \text{daig}\ (1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-(n-1)}, 1)$

$$A=\begin{bmatrix} h^2 & & & & & & & \\ a & b & c & d & & & & \\ & a & b & c & d & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & a & b & c & d & \\ & & & & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ & & & & & & & h^2 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 2. *Neka je* $k_i=2^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $p_1=p_{n-1}=0$, $p_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n-2)$ *i neka je* $L_h x(t_i)$ *za* $i=1, 2, \ldots, n-2$ *definisano sa* (3), (4), (5), *a za* $i=n-1$ *sa*

$$L_h x(t_{n-1})=h^2 2^{2-2n}(\bar{a}x(t_{n-2})+\bar{b}x(t_{n-1})+\bar{c}x(t_n))$$

$$\bar{a}=8/3, \quad \bar{b}=4, \quad \bar{c}=-4/3.$$

Tada za $x\in C^5(I)$ *važi*

$$-x''(t_i)-L_h x(t_i)=\begin{cases} O(h^2) & \text{za } i=1, \\ O(h^3) & \text{za } i=2, 3, \ldots, n-2, \\ O(h) & \text{za } i=n-1, \end{cases}$$

a matrica A_h *je inverzno monotona.*

Dokaz ove teoreme je potpuno analogan dokazu prehodne teoreme, s tim da se jednačina (9) svodi na jednačinu

$$\frac{1}{k_i+k_{i-1}}=\frac{1}{k_{i+1}}+\frac{1}{k_{i+1}+k_{i+2}}$$

za svako $i\in\{2, 3, \ldots, n-2\}$. Da je $-x''(t_{n-1})=L_h x(t_{n-1})+0(h)$ nije teško utvrditi, [9].

Matrica A_h u ovom slučaju ima oblik

$$A_h=h^{-2}D_1 A_1$$

sa $h^{-1}=2^n-1$, $D_1=\text{diag}(1, 2^{-2}, 2^{-4}, \ldots, 2^{-2(n-1)}, 1)$,

$$A_1=\begin{bmatrix} h^2 & & & & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & & & & \\ a & 0 & b & c & d & & & & \\ & a & 0 & b & c & d & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & a & 0 & b & c & d & \\ & & & & & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \\ & & & & & & & h^2 & \end{bmatrix}$$

$$a=-512/315, \quad b=26/9, \quad c=-9/7, \quad d=1/45,$$

$$a_1=-16/5, \quad b_1=5, \quad c_1=-2, \quad d_1=1/5.$$

Matrice A i A_1 očigledno nisu L-matrice, jer su d i d_1 pozitivni brojevi. Međutim, koristeći se ML-kriterijumom, [2], [5], lako se dokazuje da su A i A_1 inverzno monotone matrice. Naime, koje treba da zadovoljavaju b, c, d, c_1, d_1 specijalni su slučajevi uslova iz [5] (sa specijalno izabrane k_i), te su ispunjeni kao što je dokazano u [5]. Kako je $D^{-1} \geqslant 0$ i $D_1^{-1} \geqslant 0$, to je $A_h^{-1} \geqslant 0$ u oba posmatrana slučaja.

Kao posledica prethodnih teorema može se, koristeći se tehnikom iz [2], [9] pod odgovarajućim pretpostavkama za $f(t, x)$, [2], [5], dokazati da važi:

$$\| x_h - x^h \| = O(h^3)$$

Pri tome je x_h rešenje diskretnog analogona (DKP), a x^h je restrikcija na I_h rešenja x problema (KP).

U [1] je posmatrana mreža sa $k_i=1$, $(i=1, 2, \ldots, N_1)$, $k_i=2^i$ $(i=N_1+1, \ldots, N_2)$, $k_i=2^{N_2}$ $(i=N_2+1, \ldots, n)$, $N_1+N_2<n$, ali u tom slučaju red konzistencije nije u svim tačkama 3, niti je matrica A_h trakasta.

3. Neki dovoljni uslovi za L-oblik matrice A_h

Posmatramo izbor brojeva k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ tako da uslov (1) bude ispunjen, da matrica A_h iz (DKP) bude trakasta sa širinom trake 2 i da je L-matrica. Uslov koji u tom slučaju treba da ispunjavaju k_i je, kao što smo videli, (7). Ne umanjujući opštost razmatranja uzimamo da je $k_1=1$, prema (7) je tada i $k_2=1$. Sa $p_1=0$, $p_i=1$ $(i=2, 3, \ldots, n-1)$ razlikovaćemo dva slučaja.

Slučaj I. $k_{i+1}=k_i+k_{i-1}$ $(i=2, 3, \ldots, n-1)$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se određuju prema (4) za $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Slučaj II. $k_i=q^{i-2}$ $(i=3, 4, \ldots, n)$, $q \in \left(1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$,

α_1 se određuje kao u (4) za $i=1, 2, \ldots, n-1$,

$$\alpha_2=\begin{cases} k_2 & \text{za } i=1, \\ -k_i & \text{za } i=2, 3, \ldots, n-1 \end{cases} \qquad \alpha_3=\begin{cases} k_2+k_3 & \text{za } i=1, \\ k_{i+1} & \text{za } i=2, 3, \ldots n-1. \end{cases}$$

U prvom slučaju brojevi k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ jednaki su sa članovima u_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ Fibonačijevog niza

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right) \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Tada je

$$A_h=h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & 0 & b_2 & c_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & a_{n-1} & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & h^2 \end{bmatrix}.$$

gde je $h^{-1}=u_{n+2}-1$, $\frac{-b_i}{2}=a_i=c_i=-u_{i+1}^{-2}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$.

U slučaju II matrica A_h je oblika:

$$A_h=h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & \\ a_1 & b_1 & d_1 & & & \\ a_2 & c_2 & b_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & & h^2 \end{bmatrix}$$

sa $h^{-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$, a koeficijenti a_i, b_i, c_i, d_i određeni su prema (5) i važi $a_i<0$, $b_i>0$, $c_i\leqslant 0$, $d_i<0$. Ako je $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ biće $c_i=0$ $(i=2, 3, \ldots, n-1)$, te će A_h biti istog oblika kao u prvom slučaju, ali sa drugim vrednostima koeficijenata.

Kao što smo videli matrica A_h je u oba slučaja L-matrica. Pored toga ona je specijalan slučaj matrice A_h iz [5] za koju je dokazano da je inverzno monotona. Znači, matrica A_h je u oba slučaja M-matrica.

Navedena dva primera izbora brojeva k_i, odnosno mreže I_h nisu jedina koja imaju za posledicu da je A_h M-matrica i trakasta matrica sa širinom trake 2. U slučaju II najveća vrednost za q je $(1+\sqrt{5})/2$ i pri korišćenju navedenih formula nije moguće odrediti veće q a da A_h ostane L-matrica. Ako bi se p_i biralo sa više slobode, tj. ako matrica A_h ne bi bila trakasta matrica, za $k_1=k_2=1$, $k_i=q^{i-2}$ $(i=3, 4, \ldots, n)$ već za $q>2$ matrica A_h ne bi bila L-matrica, što je dokazno u [5], [6].

Upoređujući dva navedena slučaja izbora brojeva k_i, vidimo da je u prvom slučaju moguće za fiksno $n\in N$ smestiti više tačaka mreže I_h u intervalu $[0, \varepsilon]$ nego u drugom slučaju. Naime, za $k_i=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i-2}$ i u_i važi

$$u_i-k_i=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(u_i-u_{i-1})=\frac{3-\sqrt{5}}{2}u_{i-2},\quad i=3, 4, \ldots$$

odnosno $u_i>k_i$.

4. Numerički primer

Rešavan je problem

$$-x''=4\cdot 10^4(1-x),\quad x(0)=x(1)=0$$

za čije rešenje $x(t)$ važi

$x(0.5+t)=x(0.5-t)$, $t\in[0, 0.5]$, $x(t)\in(0.99999999, 1]$, $t\in[0.1,\ 0.5]$.

Zbog toga se rešavanje datog problema može svesti na rešavanje problema

$$-x''=4\cdot 10^4(1-x), \quad x(0)=0, \quad x(0.5)=1,$$

odnosno

$$-x''=10^4(1-x), \quad x(0)=0, \quad x(1)=1. \tag{10}$$

U tabeli I navedeno je 8 izbora brojeva k_i pomoću kojih je formirana mreža I_h. U tabeli II za svaki od tih izbora prikazani su broj n tačaka mreže I_h, broj m tačaka skupa $I_h \cap [0, 0.2]$ (koji je posebno interesantan jer se u njemu rešenje $x(t)$ naglo menja) i ε_j definisano za svaku mrežu I_h kao $\|x^h - x_h\|_\infty$, gde je x_h rešenje diskretnog analogona za (10), a x^h restrikcija na I_h tačnog rešenja problema (10). Za $j=1$, $j=2$ imamo izbore brojeva k_i kao u teoremama 1 i 2. Vidimo da su u ta dva slučaja veličine ε_j manje od ostalih ε_j iz tabele II. Takođe vrednosti ε_j $(j=3, 4, \ldots, 8)$ su manje što su mreže I_h (za $j=3, 4, \ldots,$) „sličnije" mrežama za $j=1, 2$.

Tabela I

j	n_j	$(k_1, k_2, \ldots, k_{n_j})$
1	10 20 50	$k_i=\sqrt{2}^{\,i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n_j)$
2	20 20 50	$k_i=2^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n_j)$
3	10	(1, 1, 2, 3, 6, 13, 26, 52, 104, 192)
4	10	(1, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 105, 210)
5	20	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{12}, 2, 2, 4, 4, 8, 16, 24, 28)$
6	20	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{8}, 2, 5, 5, 5, 5, 15, 30, 50, 105, 210, 260, 300)$
7	50	(1, 1.5, 2.5, 4.5, 8.5, 15, 27, 40, 70, 120, 210, 300, 500, 700, 800, 1000, . . . , 1000)
8	50	(1, 1.9, 3.6, 6.8, 12.8, 24, 24.9, 25, 46, 54, 98, 102, 150, 250, 300, 400 500, 600, 600, 800, 1200, . . . , 1200)

Tabela II

j	n_j	m_j	ε_j
1	11	6	$1.635 \cdot 10^{-2}$
1	21	16	$1.493 \cdot 10^{-3}$
1	51	46	$1.356 \cdot 10^{-3}$
2	11	6	$1.408 \cdot 10^{-2}$
2	21	16	$1.392 \cdot 10^{-3}$
2	51	46	$9.521 \cdot 10^{-4}$
3	11	8	$3.724 \cdot 10^{-2}$
4	11	9	$3.728 \cdot 10^{-2}$
5	21	16	$1.409 \cdot 10^{-2}$
6	21	17	$2.277 \cdot 10^{-3}$
7	51	21	$2.477 \cdot 10^{-3}$
8	51	24	$1.638 \cdot 10^{-3}$

LITERATURA

[1] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems*, To appear in Procedings of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30. — June 2, 1978, Academic Press, 1978.

[2] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes of Higher Order*. A Summary for Two Point Boundary Value Problems, Aequ. Math., 19, 1—36, 1979.

[3] Denny, V. E., *A New Method for Soloving Two Point Boundary Value Problems Using Optimal Node Distribution*, J. Comput. Phys. 9, 120—137, (1972).

[4] Flaherty, J. E., R. E. O'Malley, Jr., *The Numerical Solution of Boundary Value Problems for Stiff Differential Equations*, Mat., Comp,. Vol. 31, No. 137, 66—93, 1977.

[5] Herceg, D., *Diferencni postupci sa neekvidistantnim mrežama*, doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.

[6] Herceg, D., *Ein Differenzenverfahren zur Lösung von Randwertaufgaben*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta univerziteta u Novom Sadu, knjiga 9, 1979. (u štampi).

[7] Herceg, D., *Nichtäquidistante Diskretisierung der Grenzschichtdifferentialgleichungen und einige Eigenschaften von diskreten Analoga*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta univerziteta u Novom Sadu, knjiga 9, 1979.

[8] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren*. Dissertation, Münster, (1975).

[9] M. Lentini, V. Pereyra, *Boundary Problems Solvers for first Order Systems Based on Deffered Co: rections*, In: Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, edited by A. K. Aziz, Academic Press' New York—San Francisco—London 293—315, 1975.

[10] Pearson, C. E., *On a Numerical Method for Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, J. Math. Phys., 47, 134—154, (1968).

[11] Pearson, C. E., *On Non-linear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, J. Math. Phys. 47, 351—358, (1968).

[12] Pflanz, E., *Über die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech., Bd. 17, Nr. 5, 296–300, (1937).

[13] Rivas, E. K., *On the Use of Nonuniform Grids in Finite-Difference Equations*, J. Comput. Phys. 10, 202–210, (1972).

ÜBER DIE NUTZUNG DES NICHTÄQUIDISTANTEN GITTERS BEI DIFFERENZVERFAHREN

Dragoslav Herceg

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir eine Diskretisierung von Randwertaufgaben der Form (KP) mit nichtäquidistantem Gitter $I_h=\{t_0=0,\ t_i=t_{i-1}+hk_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}$, $h^{-1}=\sum_{i=1}^{n} k_i$. Wir setzen dabei voraus, dass die Lösung $x(t)$ von (KP) sich in $[0, \varepsilon]$, $0<\varepsilon<<1$, stark ändert und in $[\varepsilon, 1]$ nur wenig. Deshalb setzen wir auch voraus, dass (1) gilt. Die Differenzformell (2) hat im allgemeinen Fall die Konsistenzordnung 2, [12]. Ist $k_i=\sqrt{2}^{\,i-1}$ oder $k_i=2^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ die Konsistenzordnung dieser Differenzformell ist 3, was in Sätzen 1 und 2 bewiesen ist. Die Matrix A_h aus (DKP) (diskrete Analoga von (KP)) ist dann inversmonoton, was aus [5] folgt.

In § 3 sind zwei hinreichende Bedingungen für L-Gestallt der Matrix A_h gegeben:

I $k_1=k_2=1$, $k_{i+1}=k_i+k_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$,

II $k_1=k_2=1$, $k_i=q^{i-2}$ $(3, 4, \ldots, n)$ $q\in(1,\ 0.5\,(1+\sqrt{5})]$.

Dabei ist A_h eine Bandmatrix mit der Bandweite 2. Da A_h inversmonoton ist, [5], folgt dann, dass A_h M-Matrix ist. In § 4 ist ein numerisches Beispiel gegeben.