Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

O NEEKVIDISTANTNOJ DISKRETIZACIJI POASONOVE JEDNAČINE

Zorica Uzelac, Dragoslav Herceg

Fakultet tehničkih nauka, Institut za primenjene osnovne discipline, 21000 Novi Sad, V. Vlahovića 2, Jugoslavija

Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

1. Uvod

U radu se posmatra diskretni analogon

$$(DGZ) \qquad A_{h,k}U_{h,k}(x,y)=Y_{h,k} \quad \text{u} \quad R^{\bar{G}_{h,k}}$$

graničnog zadatka prve vrste za eliptičnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(GZ) \qquad \begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{za} \quad (x,y)\in G \\ u(x,y) &= q(x,y) \quad \text{za} \quad (x,y)\in E \end{aligned}$$

dobijen primenom neekvidistantne diskretizacije. Pri tome je

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \bar{G}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leq 1\}, \quad G=\bar{G}\setminus E \text{ gde je } E$$

granica oblasti $\bar{G}$, a $\bar{G}_{h\ k}$ je konačan podskup od $\bar{G}$. Vektorski parametri h i k okarakterisani su izborom skupa $\bar{G}_{h,k}$. Pretpostavlja se da za $f(x,y)\in C(G)$ i $q(x,y)\in \in C(E)$ postoji jedinstveno rešenje $u(x,y)$ problem (GZ). Ako skup linearnih preslikavanja skupa $R^{\bar{G}_{h,k}}$ u samog sebe označimo sa $L[R^{\bar{G}_{h,k}}]$ onda je $A_{h,k}\in L[R^{\bar{G}_{h,k}}]$. Vektor $Y_{h,k}$ je elemenat skupa $R^{\bar{G}_{h,k}}$.

Pri formiranju diskretnog analogona (DGZ) skup $\bar{G}_{h,k}$ se bira najčešće na sledeći način:

$$(1) \qquad \bar{G}_{h,k}=\{(x_i,y_i)\mid x_i=ih, \quad i=0,1,\ldots,n+1, \quad y_i=jk, \quad j=0,1,\ldots,m+1\}$$

gde su m i n prirodni brojevi, a $h=(n+1)^{-1}$, $k=(m+1)^{-1}$. U tom slučaju su tačke skupa $\bar{G}_{h,k}$ ravnomerno raspoređene duž koordinatnih osa. Ukoliko se rešenje u

problema (GZ) u pojedinačnim veoma malim podskupovima oblasti $\bar{G}$ naglo menja, navedena ekvidistantna mreža najčešće je nepodesna. Naime, da bi se u takvim slučajevima dobio dovoljan broj informacija o rešenju u i u navedenim malim podskupovima od $\bar{G}$, potrebno je da m i n budu veoma veliki brojevi, što znači da sistem linearnih jednačina (DGZ) postaje glomazan i neupotrebljiv. Da bi se ovo izbeglo, a da se dobiju željene aproksimacije za u poterbno je $\bar{G}_{h,k}$ formirati tako da ima prihvatljiv broj tačaka koje, u što većem broju, pripadaju onim podskupovima od $\bar{G}$ koji nas posebno interesuju. U ovom slučaju kažemo da radimo sa neekvidistantnom mrežom.

Neekvidistantnu diskretizaciju eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina nalazimo u [4], [8], [7].

U ovom radu se izlaže jedan način formiranja diskretnog analogona (DGZ) pomoću neekvidistantne mreže. Tako dobijeni diskretni analogon u specijalnom slučaju dobija dobro poznati oblik [2], [3], [5], [6], [7].

Uslovi koji se postavljaju pri izboru mreže $\bar{G}_{h,k}$ dozvoljavaju širok izbor različitih mreža, lako prilagodljivih ponašanju rešenja u (ukoliko se o tome nešto zna!).

Problem rešivosti diskretnog analogona (DGZ) i konvergencije njegovog rešenja ka rešenju u rešava se dokazivanjem inverzne monotonije matrice $A_{h,k}$ analogno postupku iz [1], [10], [11].

2. Neke oznake i definicije

Realna matrica $A=(a_{ij})$ je inverzno monotona ako postoji inverzna matrica A^{-1} i ako je $A^{-1}\geq 0$.

Za svaku matricu $A=(a_{ij})$ definišimo matrice A_d, A_a, A^- i A^+ na sledeći način:

$$A_d=\begin{cases} a_{ij}, & \text{ako je } i=j \\ 0, & \text{ako je } i\neq j \end{cases} \qquad A=A_d+A_a,$$

$$A^+\begin{cases} a_{ij}, & \text{ako je } a_{ij}>0 \\ 0, & \text{ako je } a_{ij}\leq 0 \end{cases} \qquad A=A^++A^-$$

Za matricu $A=(a_{ij})$ reći ćemo da je L-matrica ako je $A_d>0$ i $A_a\leq 0$, a da je M matrica ako je L-matrica i ako je inverzno monotona.

$$\text{Za } x\in R^K \text{ neka je } \tau=\{1, 2, \ldots, K\}$$

$$\tau^\circ(x)=\{i\in\tau \mid x_i=0\}, \quad \tau^+(x)=\{i\in\tau \mid x_i>0\},$$

$$\tau^-(x)=\{i\in\tau \mid x_i<0\}$$

Neka su τ_1 i τ_2 disjunktni podskupovi skupa indeksa τ, tada kažemo da $A\in L\,[R^{G_{h,k}}]$ povezuje τ_1 sa τ_2 ako za svako $i\in\tau_1$ postoji konačno mnogo indeksa

$$i_0,\quad i_1, \ldots, i_r\in\tau\,(r=r(i)\in N)$$

sa $i_0=i$, $i_r\in\tau_2$ i $a_{i_{k-1}, i_k}\neq 0$ za $k=1, 2, \ldots, r$.

U daljem radu koristimo oznake $u_{ij}=u(x_i, y_i)$,

$$M_{\alpha,\beta}\ [u]:=\max_{(x,\,y)\in\overline{G}} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta}, \quad M_\alpha [u]:=\max\{M_{\alpha o}[u], \quad M_{o\alpha}[u]\}.$$

3. Konstrukcija mreže i diskretnog analogona

Neka su h_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$, $n\geqslant 2$, $n\in N$ i k_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$, $m\geqslant 2$, $m\in N$, pozitivni realni brojevi. Parametre h i k definišemo sa:

$$h^{-1}=\sum_{i=1}^{m+1} h_i \qquad k^{-1}=\sum_{j=1}^{m+1} k_j,$$

vektore $\Delta h=(\Delta h_1, \ldots, \Delta h_n)$ i $\Delta k=(\Delta k_1, \ldots, \Delta k_m)$ sa

$$\Delta h_i=h_{i+1}-h_i\ (i=1, 2, \ldots, n),\ \Delta k_j=k_{j+1}-k_j\ \ (j=1, 2, \ldots, m)$$

a neekvidistantnu mrežu sa

(2) $$\overline{G}_{h,k}=\{x_i, y_i) \mid x_0=0,\ x_i=x_{i-1}+h_i h,\ i=1, 2, \ldots, n+1;$$
$$y_0=0,\ y_j=y_{j-1}+k_j k,\ j=1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Za $h_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ i $k_j=1$ $(j=1, 2, \ldots, m+1)$ mreža $\overline{G}_{h,k}$ je ekvidistantna i oblika (1).

U daljem radu pretpostavljamo da su brojevi h_i izabrani tako da važi:

(3) $$h_i\geq\ (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

(4) $$h_1\leq h_2\leq h_3, \quad h_{n-1}\geq h_n\geq h_{n+1},$$

(5) $$h_{i+1}=h_i \text{ ako je } h_{i-1}\leq(\geq) h_i, \text{ i želimo da bude}$$
$$h_{i+1}>(<)\, h_{i+2}, \quad i\in\{2, 3, \ldots, n-2\}.$$

Isti uslovi postavljaju se i za izbor brojeva k_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$. Primetimo da jedino uslov (5) predstavlja pravo ograničenje na izbor brojeva h_i odnosno k_j

S obzirom na (4) i (5) važi:

(6) $$\begin{aligned} \Delta h_i>0 &=>\Delta h_{i+1}\geqslant 0 \\ \Delta h_i<0 &=>\Delta h_{i+1}\leqslant 0. \end{aligned}$$

Relacija (6) su tačne i za $\Delta k_j=k_{j+1}-k_j$. Za diskretizaciju problema (GZ) koristimo se formulama

$$-\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2}=L_h u_{ij}+0(h^2), \quad -\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2}=L_k u_{ij}+0\,(k^2), \text{ gde je}$$

$$L_h u_{ij}=h^{-2}\,((1-\delta)d_i\, u_{i-2,\,j}+(\delta a_i+(1-\delta)\, c_i)\, u_{i-1,\,j}+b_i u_{ij}+$$
$$+(\delta c_i+(1-\delta)\, a_i)\, u_{i+1,\,j}+\delta d_i u_{i+2,\,j})$$

$$L_k u_{ij}=k^{-2}\left((1-\varepsilon)\,d_j' u_{i,j-2}+(\varepsilon a_j'+(1-\varepsilon)c_j')u_{i,j-1}+b_i' u_{ij}+\right.$$
$$\left.+(\varepsilon c_j'+(1-\varepsilon)\,a_j')\,u_{i,j+1}+\varepsilon d_j' u_{i,j+2}\right) \tag{7}$$

koje su izvedene u [9] i [15] na osnovu [16]. Pri tom je za svako $i=1, 2, \ldots, n$

$$\delta=\begin{cases} 1 & \text{ako} \quad i \notin \tau^-(\Delta h), \\ 0 & \text{ako} \quad i \in \tau^-(\Delta h), \end{cases}$$

$$a_i=\frac{2(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}, \qquad b_i=\frac{-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$
$$c_i=\frac{2(\alpha_1+\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} \quad d_i=\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} \tag{8}$$

$$\alpha_1=-\delta h_i+(1-\delta)h_{i+1},$$
$$\alpha_2=(\delta-1)h_i+\delta h_{i+1}, \tag{9}$$
$$\alpha_3=\alpha_2+\delta h_{i+2}+(\delta-1)h_{i-1}.$$

Parametar ε se definiše kao i δ, ali u zavisnosti od Δk. Koeficijenti a_j', b_j', c_j', d_j' određuju se prema (8) sa α_1, α_2, α_3 iz (9), pri čemu se δ zamenjuje sa ε, a h_i sa k_j. Za koeficijente a_i, b_i, c_i, d_i važi, prema [9].

$$a_i<0,\ b_i>0,\ c_i<0,\ d_i\geqslant 0 \quad (d_i=0 \Leftrightarrow \Delta h_i=0),$$
$$a_i+b_i+c_i+d_i=0. \tag{10}$$

Iste osobine imaju i koeficijenti a_j', b_j', c_j' d_j', sa $d_j'=0 \Leftrightarrow \Delta k_j=0$.

Ako je

$$R_{ij}(u)=-\Delta u_{ij}-L_h u_{ij}-L_k u_{ij}$$

tada je prema [14]

$$|R_{ij}(u)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\,M_4[u]\,|\,[(\delta\, h_{i+1}+h_{i+2})+(\delta-1)\,(h_i+h_{i-1}))^2 h^2+$$
$$+(\varepsilon\,(k_{i+1}+k_i+{}_2)+(\varepsilon-1)\,(k_i+k_{i-1}))^2 k^2] \tag{11}$$

Diskretni analogon (DGZ) formira se tako što se u svakoj tački skupa $\bar{G}_{h,k}\setminus E$ zamenjuje $-\Delta u_{ij}$ sa $L_h u_{ij}+L_k u_{ij}$, a $Y_{h,k}$ se dobija iz $f(x_i, y_j)$ i $q(x_i, y_j)$. Preciznije, sve vrednosti $u_{o,j}=q(o, y_j)$, $u_{n+1,j}=q(1, y_j)$ $(j=0, 1, \ldots, m+1)$, $u_{i,o}=q(x_i, o)$, $u_{i,m+1}=q(x_i, 1)$ $(i=0, 1, \ldots, n+1)$ zajedno sa koeficijentima uz njih koriste se za formiranje vektora $Y_{h,k}$. Tačke skupa $\bar{G}_{h,k}\setminus E$ možemo numerisati tako da umesto u_{ij} pišemo u_α gde je

$$\alpha=i+(j-1)\,n, \quad j=1, 2, \ldots, m; \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

U tom slučaju matrica $A_{h,k}$ iz (DGZ) je formata $m \times n$ i njena α-ta vrsta $(A_{h,k})$ ima sledeći izgled (dijagonalni elemenat je podvučen a svi elementi jednaki nuli su izostavljeni)

$$(A_{h,k})_\alpha = \underbrace{(1-\varepsilon)\, k^{-2} d'_j, \dots,}_{n} \underbrace{((1-\varepsilon)\, c'_j + a'_j) k^{-2}, \dots,}_{n-2} (1-\delta) d'_i h^{-2},$$

$$((1-\delta) c_i + \delta a_i) h^{-2},\ \underline{h^{-2} b_i + b'_j k^{-2}},\ (\delta c_i + (1-\delta) a_i) h^{-2},$$

$$d_i h^{-2}, \underbrace{\dots, (\varepsilon c'_j + (1-\varepsilon) a'_j) k^{-2},}_{n-2} \underbrace{\dots, \varepsilon d'_j k^{-2}}_{n})$$

Prema konstrukciji mreže $\bar{G}_{h,k}$ i načinu formiranja matrice $A_{h,k}$ imamo

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{ako je } j = m, \\ 1 & \text{ako je } j = 1, \end{cases} \qquad a'_1 = a'_m = 0,$$

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{ako je } i = n, \\ 1 & \text{ako je } i = 1, \end{cases} \qquad a_1 = a_n = 0.$$

4. Rešivost diskretnog analogona

Sada ćemo dokazati da diskretni analogon ima jedinstveno rešenje i da to rešenje teži ka rešenju problema (GZ) kada $m \to \infty$ i $n \to \infty$ a $h_i \leqslant h_0$, $k_j < k_0$, $(i = 1, 2, \dots, n+1; j = 1, 2, \dots, m+1)$, pri čemu su h_0 i k_0 proizvoljni fiksni brojevi.

TEOREMA 1. *Matrica $A_{h,k}$, definisana u prethodnom paragrafu je inverzno monotona ako su ispunjeni uslovi:*

(i) $$\frac{3\,(\delta h_i^2 + (1-\delta) h_{i+1}^2)}{((1-\delta) h_i^2 + \delta h_{i+1}^2)\, |h_{i+1}^2 - h_i^2|} \geqslant 4 h^2 k^{-2}, \quad i \notin \tau^\circ(\Delta h),$$

(ii) $$\frac{3\,(\varepsilon k_j^2 + (1-\varepsilon) k_{j+1}^2)}{((1-\varepsilon) k_j^2 + \varepsilon k_{j+1}^2)\, |k_{j+1}^2 - k_j^2|} \geqslant 4 h^{-2} k^2, \quad j \notin \tau^\circ(\Delta k),$$

pri čemu su δ i ε za svako i, odnosno j određeni kao u prethodnom paragrafu.

Dokaz. Neka je $A = A_{h,k}$. Inverznu monotoniju matrice A dokazaćemo koristeći se teoremom 3 iz [11]. U tu svrhu, kao prvo, potrebno je da dokažemo da za A_a^- postoji takvo razlaganje $A_a^- = A^z + A^s$, $A^z \leqslant 0$ i $A^s \leqslant 0$ da je $Ad + A^z$ M-matrica i da važi

(12) $$A_a^+ \leqslant A^z A_d^{-1} A^s$$

Zatim treba naći takvo $e \in R^{n \cdot m}$ da je $e \geqslant 0$, $Ae \geqslant 0$ i da A^z ili A^s povezuje skup $\tau^\circ(Ae)$ sa $\tau^+(Ae)$. Neka je $A^z = A^s = \dfrac{1}{2} A_a^-$. Prema M-kriterijumu iz [1] sa

$e=1, 1, \ldots, 1) \in R^{n\cdot m}$ matrica A_d+A^z je M-matrica. Zbog (10) matrica A ima pozitivne elemente van glavne dijagonale samo u vrstama $\alpha=i+(j-1)n$ za koje važi $i \notin \tau^\circ(\Delta h)$ ili $j \notin \tau^\circ(\Delta k)$, $(i=1, 2, \ldots, n,\ j=1, 2, \ldots, m$. Uslov (12) biće ispunjen ako važi

$$\frac{c_i \cdot c_{i+1}}{4d_i} - b_{i+1} \geqslant h^2 k^{-2} \cdot b_j' \quad \text{za} \quad i \in \tau^+(\Delta h), \tag{13}$$

$$\frac{c_{i-1}\, c_i}{4d_i} - b_{i-1} \geqslant h^2 k^{-2} b_j' \quad \text{za} \quad i \in \tau^-(\Delta h), \tag{14}$$

$$\frac{c_j' \cdot c_{j+1}'}{4d_j'} - b_{j+1}' \geqslant k^2 h^{-2} b_i \quad \text{za} \quad j \in \tau^+(\Delta k) \tag{15}$$

$$\frac{c_j'^{-1} \cdot c_j'}{4d_j'} - b_{j-1}' \geqslant k^2 h^{-2} b_i \quad \text{za} \quad j \in \tau^-(\Delta k), \tag{16}$$

Dokazaćemo samo da je (13) ispunjeno pod pretpostavkama pod kojima je formirana matrica $A_{h,k}$, jer se preostale tri relacije (14), (15), (16) dokazuju potpuno analogno, [15].

U slučaju da je $i \in \tau^+(\Delta h)$ važi $h_{i+1} > h_i$ $\delta=1$ i $h_{i+2} \geqslant h_{i+1}$, (6). Ako uvedemo oznake

$$x=h_i, \qquad y=h_{i+1} \qquad z=h_{i+2}, \qquad s=h_{i+3},$$

mamo $x<y\leqslant z \leqslant s$, a (13) se svodi na

$$h^2 k^{-2} b_j' \leqslant \phi(x, y, z, s), \qquad j=1, 2, \ldots, m,$$

pri čemu je

$$\phi(x, y, z, s) = \frac{1}{yz}\left(\frac{(y+z)^2-x^2}{y^2-x^2} \cdot \frac{z+s-y}{2s} - \frac{2(2z+s-y)}{z+s}\right)$$

Lako se dokazuje da je $b_j' \leq 2, j=1, 2, \ldots, m$ [15]. Ako dokažemo da je $\phi(x, y, z, s) \geqslant$ $\geqslant \psi(x, y) = \dfrac{3x^2}{2y^2(y^2-x^2)}$ s obzirom na pretpostavku (i) teoreme, imaćemo

$$h^2 k^{-2}\ 2 \leq \frac{3x^2}{2y^2(y^2-x^2)} \leqslant \phi(x, y, z, s)$$

što je trebalo dokazati. Imamo

$$2yz\,[\phi(x, y, z, s) - \psi(x, y)] = \frac{z}{y^2-x^2}\left(\frac{(zy+2y^2-3x^2}{y} + \frac{(z-y)(z+2y)}{s}\right) - 3 +$$

$$+\frac{(z-y)(z-3s)}{s(s+z)} \geqslant \frac{z}{y^2-x^2} \cdot \frac{3(y^2-x^2)}{y} - 3 + \frac{z-y}{s} - 4\frac{z-y}{z+s} =$$

$$= 3\left(\frac{z}{y} - 1\right) + (z-y)\left(\frac{1}{s} - 4\right) \geqslant 3\frac{z-y}{y} + (z-y)\left(\frac{1}{s} - \frac{4}{z+s}\right).$$

Dalje je

$$2y^2z(z+s)s(\Phi(x,y,z,s)-\Psi(x,y))\geq(z-y)((3s+y)(z+s)-4sy).$$
$$\geq(z-y)((3s+y)(y+s)-4sy)$$
$$\geq(z-y)(y^2+3s^2)\geq 0.$$

Sa $e=(1,1,\ldots,1)\in R^{m\cdot n}$ je

$$(Ae)_k=\begin{cases}-a_k-a_1' & \text{za } k=1,n,\\ -a_k-a_m' & \text{za } k=(m-1)n+1,\ m\cdot n,\\ -a_k & \text{za } k=n+1,\ 2n,\ 2n+1,\ 3n,\ldots,(m-2)n+1,\ (m-1)n,\\ -a_k' & \text{za } k=2,3,\ldots,n-1,\ (m-1)n+2,\ldots,(m-1)n+n-1\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

$$\tau^+(Ae)=\{(j-1)n+i\mid j=1,m,\ i=1,2,\ldots,n\}\cup\{(j-1)n+i\mid i=1,n,\ j=2,3,\ldots,m-2\}$$
$$\tau^\circ(Ae)=\{1,2,\ldots,m\cdot n\}\setminus\tau^+(Ae).$$

Matrica A^z povezuje $\tau^\circ(Ae)$ sa $\tau^+(Ae)$, te je time teorema u potpunosti dokazana.

Kao posledica ove teoreme sledi egzistencija i jedinstvenost rešenja $U_{h,k}$ diskretnog analogona (DGZ).

Koristeći se teoremom 4.4 i lemom 7.3 iz [10] lako se dokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 2. *Ako su ipunjeni uslovi* (i) *i* (ii) *teoreme* 1 *onda je* $\|A_{h,k}^{-1}\|$ *uniformno ograničena za dovoljno malo* h *i* k.

Neka je $\bar{u}_{h,k}$ restrikcija rešenja u problema (GZ) na $\bar{G}_{h,k}\setminus E$. Koristeći se relacijom (11) i rezultatom prethodne teoreme može se dokazati sledeća teorema, [10], [13].

TEOREMA 3. *Neka je matrica* $A_{h,k}$ *formirana pod pretpostavkom da su uslovi* (i) *i* (ii) *iz teoreme* 1 *ispunjeni i da je* $h_i\leq h_0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $k_j\leq k_0$, $(j=1,2,\ldots,m)$, *gde su* h_0 *i* k_0 *konstante veće od* 1. *Ako je* $u\in C^4(\bar{G})$ *važi:*

$$\|U_{h,k}-\bar{u}_{h,k}\|=0(h^2+k^2).$$

Prema tome, ako $n\to\infty$ i $m\to\infty$, pod pretpostavkama predhode teoreme imamo

$$\|U_{h,k}-\bar{u}_{h,k}\|\to 0.$$

5. Numerički primer

Rešavan je konturni problem

$$-\Delta u(x,y)=-32e^{4(x+x)}\qquad \text{za}\quad (x,y)\in G,$$
$$u(x,y)=e^{4(x+y)}\qquad \text{za}\quad (x,y)\in E,$$

primenom neekvidistantne diskretizacije opisane u paragrafu 3 sa $n=m=15$, $h_i=k_i$ $(i=1, 2, \ldots, 15)$ i

$$h_i=\begin{cases} 10 & \text{za} \quad i=1, \ldots, 6, \\ 6 & \text{za} \quad i=7, \ldots, 11, \\ 2 & \text{za} \quad i=12, \ldots, 16, \end{cases} \qquad k^{-1}=h^{-1}=100.$$

Isti problem je rešavan i u slučaju ekvidistantne diskretizacije sa $m=n=15$, $h^{-1}=16$.

Za rešenje $u(x, y)$ posmatranog problema važi $u(x, y)=u(y, x)$. Oblast u kojoj se posmatraju numerička rešenja je $Q=\{(x, y) \mid 0.826 \leq x, y \leq 1\}$. Pri ekvidistantnoj diskretizaciji od ukupnog broja tačaka skupa $\bar{G}_{h,k} \setminus E$, (225), svega 4 tačke, odnosno 1,7% pripadaju skupu Q. Navedena neekvidistantna diskretizacija daje skup $\bar{G}_{h,k} \setminus E$ čijih 36 tačaka, odnosno 16%, pripadaju skupu Q. U sledećoj tabeli navedene su vrednosti tačnog rešenja, $u(x, y)$, približnog rešenja $U_{h,k}$ i odgovarajuća relativna greška u nekim tačkama skupa Q. Uokvireni podaci odnose se na ekvidistantnu diskretizaciju.

0.9400	1236.98837 1236.4504 0.043%		1572.09399 1571.8366 0.017%	1702.96952 1702.7502 0.013%		1844.74234 1844.5673 0.009%
0.9375		1409.26748 1408.1048 0.083%			1808.91862 1808.0424 0.048%	
0.9200	1142.05267 1131.3876 0.058%		1451.32792 1450.9880 0.023%	1572.11884 1571.8366 0.018%		
0.9000			1339.84697 1339.4308 0.031%			
0.8750		1098.28927 1096.6332 0.15%				
0.8400						
y / x	0.8400	0.8750	0.9000	0.9200	0.9375	0.9400

Upoređujući relativne greške vidimo da neekvidistantna diskretizacija daje bolje aproksimacije tačnog rešenja od ekvidistantne diskretizacije sa istim brojem tačaka mreže $\bar{G}_{h,k}$.

LITERATURA

[1] Bohl, E., J. Lorenc, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes Higher Order*. A Summary for two Point Boundary Value Problems, Aequ. Math., 19, 1–36, (1979).

[2] Bramble, J. H., Hubbard, B. E., *New Monoton Type Approximations for Elliptic Problems*, Math. Comput., 18, 349–367, (1964).

[3] Bramble, J. H., *Error Estimates for Difference Methods in Forced Vibration Problems*, J. SIAM, Numer. Anal. 3, (1966).

[4] Ciarlet, P. H, S., *Discrete Maximum Principle for Finite-Difference Operators*, Aequ. Math. Math. 4, 338–352, (1970).

[5] Collatz, L., *The numerical treatment of differential equations* Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York (1964).

[6] Гавурин, И. Н., *Лекции по методам вычислений*, Наука, Москва, (1971).

[7] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., *Разностны схемы*, Наука, Москва, (1977).

[8] Greenspan. D., *Lectures on the Numerical Solution of Linear Singular and Nonlinear Differential Equations*, Prentice-Hall, (1968).

[9] Herceg, D., *Diferencni postupci na neekvidistantnim mrežama*, doktorska disertacija, Novi Sad, (1980).

[10] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren*, Disertation, Münster, (1975).

[11] Lorenz, J., *Zur Inversmonotonie diskreter Probleme*, Numer. Math. 27, 227–238, (1977).

[12] Марчук, Г. И., *Методы вычислитеной математики*, Наука, Москва, (1977).

[13] Самарскии, А. А., *Вьедение в теорию разностних схем*, Наука, Москва, (1971).

[14] Taub, A. H., *Studies in Applied Mathematics*, 7, The Mathematical Association of America, (1971).

[15] Uzelac, Z., *Numeričko rešavanje eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina primenom neekvidistantne diskretizacije*, magistarski rad, Beograd, (1980).

[16] Pflanz, E., *Allgemeine Differenzenausdrücke für die Ableitungen einer Funktion y (x)*, Z. angew. Math. Mech. 20, Nr. 11/12, 379–381, (1949).

[17] Stummel, F., K. Hainer, *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, (1971).

ON IRREGULAR DISCRETIZATION OF POISSON'S EQUATION

Zorica Uzelac, Dragoslav Herceg

SUMMARY

In this paper an irregular discretization of the boundary value problem (*GZ*) is given. An irregular mash $\bar{G}_{h,k}$ is given by (2), (3), (4) and (5).

Using formulas (7), (8) and (9) a discrete analogone (*DGZ*) for (*GZ*) is formed. The inverse monotonicity of matrix $A_{h,k}$ is proved under assumptions (i) and (ii), Theorem 1. From the preceding, it followed that there exists a unique solution of (*DGZ*) and that this solution converges to the solution of (*GZ*) when the number of points of mash $\bar{G}_{h,k}$ tends to infinity (i. e. $m \to \infty$ and $n \to \infty$). In § 5, a numerical example is given.