Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

APOSTERIORNA OCENA GREŠKE I UBRZANJE NESTACIONARNIH ITERATIVNIH POSTUPAKA U SLUČAJU KADA JE POZNATA JEDNA SOPSTVENA VREDNOST OPERATORA I ODGOVARAJUĆI SOPSTVENI ELEMENAT

Katarina Surla
Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

1. U radu se posmatra jednačina

(1) $$x = Tx + f$$

u Banahovom parcijalno uređenom prostoru B. Za približno određivanje rešenja jednačine (1) koristi se nestacionaran iterativni postupak

(2) $$z_n = T_n z_{n-1} + f, \qquad z_0 \in B$$
$$T_n x = Tx + \rho_n, \qquad \rho_n \in B \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Pri tome se pretpostavlja poznavanje sopstvene vrednosti ρ i odgovarajućeg sopstvenog elementa α sa osobinom

(3) $$T\alpha = \rho\alpha, \quad 0 < \rho < 1, \quad \alpha \geq 0$$

(Za egzistenciju ρ i α pogledati [2], [6], [7])

U [1] i [4] su određeni invarijantni intervali za operator T'

(4) $$T'x = Tx + f$$

preko stacionarnog iterativnog niza

(5) $$x_n = Tx_{n-1} + f, \quad x_0 \in B \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ovde su ti rezultati preneti na nestacionarne iterativne postupke oblika (2), koji se često sreću u matematičkoj i tehničkoj praksi (greške zaokrugljivanja brojeva, tolerancija mera u tehnici, zamena operatora približnim).

TEOREMA 1. Neka je u B definisan linearan i pozitivan operator T. Neka u nizu (2) za neko $k \geqslant 1$ postoje pozitivni linearni operatori A_k i B_k takvi da je

1.1 $$(T \mp A_k) z_{k-1} \leq T_k z_{k-1} \leq (T \pm B_k) z_{k-1}$$

1.2 $$\delta z_k > \pm B_k z_{k-1}, \quad \delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

1.3. q_k i Q_k su nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti

$$q_k\alpha \pm B_k z_{k-1} \leq \delta z_k \leq Q_k\alpha \mp A_k z_{k-1}$$

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval

(6) $$I_k(q, Q) = \left[x_1 + \frac{\rho}{1-\rho} q_k\alpha, \quad x_1 + \frac{\rho}{1-\rho} Q_k\alpha\right], \quad \text{gde je}$$

$$x_1 = Tx_o + f, \quad x_o = z_{k-1}, \quad \text{a } \rho \text{ i } \alpha \text{ zadovoljavaju (3).}$$

Dokaz

$$z_k \mp B_k z_{k-1} \leqslant x_1 = z_k - \rho_k \leqslant z_k \pm A_k z_{k-1}$$

$$\delta z_k \mp B_k z_{k-1} \leqslant \delta x_1 = x_1 - x_o \leqslant \delta z_k \pm A_k z_{k-1}$$

Prema 1.3

$$q_k\alpha \leqslant \delta z_k \mp B_k z_{k-1} \leqslant \delta x_1 \leqslant \delta z_k \pm A_k z_{k-1} \leqslant Q_k\alpha$$

a prema 1.2 je $\delta x_1 > 0$, pa primenom teoreme 1.1. [2] sledi tvrđenje.

TEOREMA 2. Neka su zadovoljene pretpostavke prethodne teoreme s tim što u uslovima 1.2 i 1.3 operatori A_k i B_k zamene mesta, a δz_k se definiše sa

$$\delta z_k = z_{k-1} - z_k$$

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval $I_k(-Q, -q)$ određen sa (6).

Dokaz. Dokazuje se na sličan način kao prethodna teorema. U [2] se pokazuje da teorema 1.1. [2] važi i za monotono opadajući niz iteracija, s tim što se interval zameni sa $I_k(-Q, -q)$.

Zahtev o egzistenciji ρ sa $0 < \rho < 1$, svodi se za neke klase operatora na kontrakciju [6], [7]. Teoreme 1 i 2 u tom slučaju daju početne elemente za konstrukciju dvostranog iterativnog postupka. Zbog toga ćemo detaljnije razmotriti slučaj $\|T\| < 1$. U daljem ćemo izostaviti indeks k kod operatora A_k i B_k. Pretpostavićemo da je k fiksirano teoremom 1 ili 2. Posmatraćemo nizovee

(7) $$\begin{cases} v_{z,n} = T_n v_{z,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots), \quad T_n x = Tx + \rho_n \\ u_{z,n} = T'_n u_{z,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots), \quad T'_n x = Tx + \rho'_n \\ v_{x,n} = T v_{x,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots) \\ u_{x,n} = T u_{x,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots) \\ v_{s,n} = (T - A) v_{s,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots) \\ u_{s,n} = (T - A) u_{s,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots) \\ v_{y,n} = (T + B) v_{y,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots) \\ u_{y,n} = (T + B) u_{y,n-1} + f & (n = 1, 2, \ldots), \text{ gde je} \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} v_{z,o}=z_k+Az_{k-1}+\dfrac{\rho}{1-\rho}\,Q_k\alpha, & v_{x,o}=v_{s,o}=v_{y,o}=v_{z,o}\\[2ex] u_{z,o}=z_k-Bz_{k-1}+\dfrac{\rho}{1-\rho}\,q_k\alpha & u_{x,o}=u_{s,o}=u_{y,o}=u_{z,o}\end{cases}$$

Ako je T pozitivan linearan operator kumutativan sa A i B, indukcijom se može pokazati [11] ($\varepsilon_1 E$ se zameni sa A, a $\varepsilon_2 E$ sa B), da je

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{y,j}-a_{x,j}=\sum\limits_{n=1}^{j} B^n \sum\limits_{i=0}^{j-n}\dbinom{n-1+i}{i} T^i a_{x,\,j-n-i}, & (a=u,\,v)\\[2ex] b_{x,j}-b_{s,j}=\sum\limits_{n=1}^{j}(-A)^n\sum\limits_{i=0}^{j-n}\dbinom{n-1+i}{i} T^i b_{x,j-n-i}, & (b=u,\,v)\end{cases}$$

Dalje je

$$(10)\qquad T^i v_{x,p}=\sum_{k=i}^{p+i}\delta v_{x,k}+T^{i-1}(v_{x,o}-f),\quad \text{gde je}$$

$$\delta v_{x,k}=v_{x,k}-v_{x,k-1}$$

Zamenom (10) u (9) i prelaskom na normu, pod uslovom da je $\| A \|+\| T \|<1$, dobijamo:

$$(11)\qquad \|v_{y,j}-v_{x,j}\|\leqslant\frac{J}{L(1-L)}\left(\|\delta v_{x,1}\|+\|v_{z,o}-f\|\right)\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{1-(L+J)^j}{1-L-J}-J\,\frac{1-J^j}{1-J}\right|+\frac{L^2(L+J)^{j-1}}{1-L}+\frac{L^{j-1}}{1-L}\,\|\delta v_{x,1}\|+$$

$$+J\sum_{n=1}^{j}J^{n-1}\|v_{j-n,x}\|,\quad \text{gde je}$$

$$\|T\|\leqslant L,\quad \|B\|\leqslant J,\quad J+L<1$$

Pošto je $v_{x,p}\leqslant v_{z,o}$ a $\delta v_{x,1}\leqslant v_{z,1}+A_k z_{k-1}$ desnu stranu nejednakosti (11) možemo izračunati. Nejednakost (11) važi kada se v zameni sa u. Procene za $\| v_{x,j}-v_{s,j} \|$ i $\| u_{x,j}-u_{s,j} \|$ dobijaju se takođe po navedenom postupku, s tim što se pretpostavi da je $\| A \|=S$, $S+L<1$. Tada za ocenu prve veličine treba u (11) zameniti J sa S, a za drugu pored toga i v sa u.

TEOREMA 3. Neka je B parcijalno uređen normalnim konusom K i neka je primenom teoreme 1 određen interval (6). Neka su operatori A_k i B_k komutativni sa operatorom T. Ako formiramo nizove $v_{z,n}$ i $u_{z,n}$ prema (7) i ako je

$$(T-A)\,x\leqslant T_n x\leqslant(T+B)\,x,\qquad x\geqslant v_{0,z}$$

$$(T-A)\,x\leqslant T_n' x\leqslant(T+B)\,x\qquad x\geqslant u_{0,z},$$

pri čemu je $L+J<1$ i $L+S<1$, tada nizovi $v_{z,n}$, $u_{z,n}$ aproksimiraju dvostrani iterativni postupak $v_{x,n}$ i $u_{x,n}$ za rešavanje jednačine (1). Tada važi ocena

$$\left\| x^* - \frac{v_{z,j}+u_{z,j}}{2} \right\| \leqslant \frac{N(K)}{2} L^j \frac{\rho}{1-\rho} (Q_k - q_k)\|\alpha\| + \tag{12}$$

$$+\frac{N(K)}{2}(\|M_v\|+\|M_u\|, \quad \text{gde je}$$

$$M_v = \max | (v_{y,j}-v_{x,j}), \quad (v_{x,j}-v_{s,j}) | \quad \text{a}$$

$$M_u = \max | (u_{y,j}-u_{x,j}), \quad (u_{x,j}-u_{s,j}) |$$

$N(K)$ je konstanta koja zavisi od konusa.

Dokaz. Lako se pokazuje da je

$$u_{s,j} \leqslant u_{x,j} \leqslant u_{y,j}, \qquad u_{s,j} \leqslant u_{z,j} \leqslant u_{y,j}$$

$$v_{s,j} \leqslant v_{x,j} \leqslant v_{y,j}, \quad v_{s,j} \leqslant v_{z,j} \leqslant v_{y,j}$$

pa je

$$\| x^* - (v_{z,j}+u_{z,j})/2 \| \leqslant \| x^* - (v_{x,j}+u_{x,j})/2 \| + \tag{13}$$

$$+2^{-1} \| v_{x,j}+u_{x,j}-v_{z,j}-u_{z,j} \| \leqslant 2^{-1} N(K) L^j \| v_{x,o}-u_{x,o} \| +$$

$$+2^{-1} \| v_{x,j}-v_{z,j} \| + 2^{-1} \| u_{x,j}-u_{z,j} \| . \quad \text{Iz (13) i}$$

$$-M_v \leqslant v_{x,j}-v_{z,j} \leqslant M_v$$

$-M_u \leqslant u_{x,j}-u_{z,j} \leqslant M_u$, zbog normalnosti konusa dobijamo (12).

Kada je operator T u (1) linearan i negativan ($-T$ pozitivan) i za $0<\rho<1$ postoji nenegativan sopstveni elemenat α, tj.

$$T\alpha = -\rho\alpha \tag{14}$$

možemo dobiti ubrzanje postupka (2) prema teoremi 4.

TEOREMA 4. Neka pored navedenih pretpostavki vezanih za (14) za neko $k \geqslant 1$ u nizu (2) postoje linearni pozitivni operatori A_k i B_k tako da je

4.1 $(T \mp A_k) z_{k-1} \leqslant T_k z_{k-1} \leqslant (T \pm B) z_{k-1}$

4.2 a) za $k=2i$

$\delta z_k > \pm B_k z_{k-1}$

$q_k \alpha \pm B_k z_{k-1} \leqslant \delta z_k \leqslant Q_k \alpha \mp A_k z_{k-1}$

b) za $k=2i+1$

$\delta z_k > \pm A_k z_{k-1}$

$q_k \alpha \pm A_k z_{k-1} \leqslant \delta z_k \leqslant Q_k \alpha \mp B_k z_{k-1}$

gde su q_k i Q_k realni nenegativni brojevi.

Tada operator T' ostavlja invarijantnim interval

$$[x_1+d_k\alpha,\ x_1+D_k\alpha],\quad x_1=Tz_{k-1}+f$$

Pri tome je

za $\quad k=2i,\ d_k=-\rho\dfrac{Q_k-\rho q_k}{1-\rho^2},\ D_k=-\rho\dfrac{q_k-\rho Q_k}{1-\rho^2},\ \delta z_k=z_k-z_{k-1}$

za $\quad k=2i+1,\ d_k=\rho\dfrac{q_k-\rho Q_k}{1-\rho^2},\ D_k=\rho\dfrac{Q_k-\rho q_k}{1-\rho^2},\ \delta z_k=z_{k-1}-z_k$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 1. Proveravaju se uslovi teoreme 1.2 [2] za niz x_n.

Prvi uslovi dati u teoremama 1, 2 i 4 omogućavaju konstrukciju elemenata a_k i b_k (preko z_k, A_k i B_k), takvih da je

$$a_k\leqslant x_1\leqslant b_k$$

Tako dobijamo nešto širi interval od onog određenog u navedenim teoremama, koji se može odrediti preko niza z_n. Time dobijamo aposteriornu ocenu greške za postupak (2). Ubrzanje postupka (2) imamo sve dotle dok je donja granica tako određenog intervala veća od z_k, za rastući niz iteracija ili dokle god je gornja granica manja od z_k, za opadajući niz iteracija.

PRIMEDBA. U specijalnom slučaju kada je $A_k=B_k=0$ i kada umesto operatora T posmatramo operator $(E-V)^{-1}\,T$ a f zamenimo sa $(E-V)^{-1}f$, teorema 1 se svodi na teoremu [5] str. 343. Teorema 4 se za $A_k=B_k=0$ svodi na odgovarajući deo teoreme 1.2 [2].

PRIMEDBA. Ako je $A_k=B_k=\varepsilon E$, ε realan pozitivan broj, operator $T\pm\varepsilon E$ ima sopstvenu vrednost $\rho\pm\varepsilon$ a odgovarajući sopstveni elemenat je α. Ako je $0<\rho\pm\varepsilon<1$, tada se uz neznatno izmenjene pretpostavke teorema 1, 2 i 4 može dobiti egzistencija rešenja i ocena greške za jednačinu

$$x=(T\pm\varepsilon E)x+f \qquad (|\,11\,|)$$

2. Posmatraćemo sada jednačinu (1) u R^n sa $T\geq 0$.

a) Pretpostavimo da je $f\geq 0$ i da su elementi matrice T, t_{ij} $(i=j, 1, 2, \ldots, n)$ dati sa greškom r_{ij}, pri čemu je $|r_{ij}|\leq\varepsilon$ $(i, j=1, 2, \ldots\ n)$
Uporedo sa jednačinom (1) posmatramo jednačinu

$$z=T^*z+f,\quad \text{gde je}$$

$$t^*_{ij}=t_{ij}+r_{ij}\quad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

Možemo pretpostaviti da su svi $t^*_{ij}\geq 0$. Za sada ćemo pretpostaviti da se iteracije

(15) $$z_{k+1}=T^*z_k+f,\quad z_0=f\quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

izvode bez zaokrugljivanja. Ako uzmemo da je $A_k=B_k=\varepsilon D$, gde je D matrica čiji su svi elementi jednaki 1, $d_{ij}=1$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, možemo na niz (15) primeniti teoremu 1 i dobiti aposteriornu ocenu greške. Nejednakosti

$$(T-\varepsilon D)\,x\leq T_x^*\leq(T+\varepsilon D)\,x$$

važe za $x>f$, pa je zadovoljen uslov 1.1 za svako k. Ostali uslovi se proveravaju u toku računanja.

b) Pri rešavanju jednačine (1) na računaru iterativni postupak (5) dobija oblik (2). Tada su $\rho_k=\{\rho_k^i\}_{i=1}^n$ greške zaokrugljivanja. Ako znamo da je $|\rho_k^i|\leqslant\sigma$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, možemo uzeti $A_k=B_k=\varepsilon E$, gde je E jednačina matrica, a ε se određuje iz uslova

$$(T-\varepsilon E)z_{k-1}\leq T_k z_{k-1}\leq(T+\varepsilon E)z_{k-1}$$

Ako je $z_{k-1}>0$, može se uzeti

$$\varepsilon\geq\sigma/(\min_i z_{k-1}^i)$$

Sa ovako odabranim operatorima A_k i B_k možemo primeniti teoremu 1.

c) Preko niza (2) možemo kontrolisati greške sa kojima je f zadato. Ako umesto f uzmemo $f+r$, $r\in R^n$, tada operator T_k možemo odrediti sa

$$T_k x=Tx+\bar{\rho}_k, \text{ gde je}$$

$$\bar{\rho}_k=\rho_k+r$$

d) Pod a) je pretpostavljeno da se iteracije izvode tačno. Ako to nije slučaj, matrice A_k i B_k u teoremi 1 možemo odrediti na sledeći način

$$A_k=B_k=\varepsilon E+\varepsilon_1 D, \text{ gde je}$$

$$|r_{ij}|\leq\varepsilon_1, \ (i, j=1, 2, \ldots, n), \text{ a}$$

$$\varepsilon\geq\varepsilon_2\,(\min_i z_{k-1}^i)^{-1}, \quad |\bar{\rho}_k^i|\leq\varepsilon_2 \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

Analogno se određuju operatori A_k i B_k za ostale teoreme.

PRIMER 1. [2] Pri rešavanju graničnog zadatka

$$\begin{cases} -\Delta v=1 \text{ za } |x|, \ |y|<1 \\ v=0 \text{ na } |x|=1, \ |y|\leq 1 \text{ i } |x|\leq 1, \ |y|=1 \end{cases}$$

primenom Hermitovih diferencnih formula (mehrstelenformeln) sa korakom $h=0.5$ dobija se sistem

$$(16) \qquad \begin{cases} v_1= \phantom{0.40v_1+{}} 0.40v_2+0.05v_3+0.075 \\ v_2=0.40v_1+0.10v_2+0.20v_3+0.075 \\ v_3=0.20v_1+0.80v_2 \phantom{{}+0.20v_3} +0.075 \end{cases}$$

gde je

$$v_1 \approx v\,(0.5,\ 0.5),\quad v_2 \approx v\,(0,\ 0.5),\quad v_3 \approx v\,(0,\ 0)$$

Za rešavanje sistema (17) iterativnim postupkom (2) sa izlaznim kriterijumom

$$\max_i |z_k^i - z_{k-1}^i| \leq 10^{-6}$$

potrebno je 29 iteracija.
Matrica sistema ima sopstvenu vrednost

$$\rho = \frac{4\sqrt{2}+1}{10}$$

i odgovarajući sopstveni vektor α sa komponentama $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha_3 = 1$.

Rezultati dobijeni primenom teoreme 1 za $A_k = B_k = \varepsilon E$

$\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_2}{\min\limits_i z_{k-1}^i}$, $\quad |\rho_k| \leq \varepsilon_2$ prikazani su u tabelama 1 i 2.

U tabeli 2 se nalaze samo one vrednosti z_k koje nisu date u tabeli 1. Pri tome su korišćene oznake

DG_k — donja granica intervala određenog posle k-te iteracije
GG_k — gornja granica intervala određenog posle k-te iteracije
AS_k — aritmetička sredina intervala određena posle k-te iteracije

Kada je iterativni postupak ubrzan pomoću donjih granica intervala, računanje je u slučaju $\varepsilon_2 = 10^{-7}$ završeno sa trinaestom iteracijom (tabela 1B), a kada je za ubrzanje korišćena aritmetička sredina, računanje je završeno sa iteracijom 15 posle dve popravke (tabela 1 C).

3. U [9] i [13] se za približno rešavanje integralne jednačine

$$u(s) = \int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt + f(s) \qquad s, t \in [a, b] = I$$

$$f(s) \in C(I),\ K(s,t) \in C(I \times I),\ (a, b \in R)$$

koristi nestacionaran iterativni postupak.

$$(17) \qquad \begin{cases} z_0 = f \\ z_1 = K_{m_1} z_0 + f \\ z_k = K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} + r_n f \quad (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

gde se pojavljuju sledeći operatori:
restrikcioni operator $r_n : C \to R^n$, $C = C(I)$

$$r_n u = \{u(s_i)\}_{i=1}^n,\ u \in C$$

operator analitičkog produženja $p_n: R^n \to C$

$$p_n z = S_\Delta(z, s), \quad z \in R^n$$

$S_\Delta(z, s)$ splajn trećeg stepena na mreži

$\Delta: a = s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = b$ sa ordinatama z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Integralni operatori $K: C \to C$

$$Ku = \int_a^b K(s, t)\, u(t)\, dt, \quad u \in C$$

Operator K se aproksimira operatorima $K_m: C \to C$

$$K_m u = \sum_{j=0}^{2m+1} d_j(m)\, K(s, t_j)\, u(t_j), \quad \text{gde je } m \text{ određeno sa}$$

(18) $$|\, r_n(K_m u - K_{m-1} u)\,| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0 \quad \text{unapred zadato}$$

$d_j(m)$ su težinski koeficijenti primenjene kvadraturne formule. Pretpostavlja se da je $m_k \leq [\log 2\,(NMAX\text{-}1)]$, $NMAX$ prirodan broj unapred zadat.

Postupak (17) možemo napisati u obliku (2). Tada je:

(19) $$\rho_k = K_{m_k} p_n r_n z_{k-1} - K_{z_{k-1}}$$

Za ocenjivanje veličine ρ_k koristićemo sledeću lemu.

Lema 1. Neka je $z \in C^4(I)$ i ε određeno sa $|\, z(s_j)\,| \leq \varepsilon$. Tada interpolacioni kubni splajn sa graničnim uslovima

(20) $$\begin{cases} 2M_1 - 2M_2(h_2 + h_3)/h_3 = -2M_3 h_2/h_3, & h_i = x_i - x_{i-1} \\ 2M_n - 2M_{n-1}(h_n + h_{n-1})/h_{n-1} = -2M_{n-2}\, h_n/h_{n-1} \end{cases}$$

i uslovima na mrežu

(21) $$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0 \qquad \frac{\|\Delta_n\|}{\min\limits_j h_j} \leqslant \beta < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h_i}{h_{i-1}} = 1 \quad (i = 3, n)$$

zadovoljava nejednakost

$$|\, S_\Delta(z, t)\,| \leqslant \varepsilon \left(1 + \frac{3}{2}\beta^4 \|A^{-1}\| + \frac{1}{2}\beta\right) + 0\,(\|\Delta\|^4)$$

A je matrica sistema pomoću koga se određuju veličine M_j [1].

Dokaz. Prema $|\,1\,|$ za $M_j = S''_\Delta(z, s_j)$ važi

(22) $$M_j = 6 \sum_{i=2}^{n-1} A_{ij}^{-1}\, \frac{[(z_{i+1} - z_i)/h_{i+1}] - [z_i - z_{i-1})/h_i]}{h_i + h_{i+1}} -$$

$$-2A_{ji}^{-1} \frac{h^2}{h^3} M_3 - 2A_{jn}^{-1} \frac{h_n}{h_{n-1}} M_{n-2}$$

Prema teoremi 2.9.4 [1] je

(23) $$M_i = z_i'' + 0\,(\|\Delta\|^2) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

a prema [8] je

(24) $$z_3'' = az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 + 0\,(\|\Delta\|^2), \text{ gde je}$$

$$a = \frac{2\,(h_4 - h_3)}{(h_2+h_3)\,h_2\cdot(h_2+h_4+h_3)} \qquad b = \frac{2\,(h_2+h_3-h_4)}{h_3h_2\,(h_4+h_3)}$$

$$c = \frac{2\,(h_4-2h_3-h_2)}{h_3h_4\,(h_2+h_3)} \qquad d = \frac{2\,(2h_3+h_2)}{h_4\,(h_4+h_3)\,(h_4+h_2+h_3)}$$

Ako koeficijente u (24) majoriramo na sledeći način

$$|\,a\,|\;\|\,\Delta\,\|^2 \le \frac{1}{3}\,\beta^3, \qquad |\,b\,|\;\|\,\Delta\,\|^2 \le 2\,\beta^3$$

$$|\,c\,|\;\|\,\Delta\,\|^2 \le 3\,\beta^3, \qquad |\,d\,|\;\|\,\Delta\,\|^2 \le \frac{2}{3}\,\beta^3$$

zamenimo u (23) dobijamo

$$\|\,\Delta\,\|^2\,|\,M_3\,| \leqslant 6\,\beta^3\,\varepsilon + 0\,(\,\|\,\Delta\,\|^4).$$

Na isti način dobijamo i procenu za M_{n-2}. Tako se iz (22) dobija:

$$\|\,\Delta\,\|^2\,|\,M_j\,| \leqslant 12\,\varepsilon\,\beta^4\,\|\,A^{-1}\,\| + 0\,(\|\,\Delta\,\|^4) \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

Prema [1] (str. 46) je

$$|\,S'\,\Delta\,(z, s_j)\,| \leqslant 6\,\beta^4\,\frac{\varepsilon\,\|\,A^{-1}\,\|}{\|\,\Delta\,\|} + \frac{2\varepsilon}{\min\limits_{1<i<n} h_i} + 0\,(\|\,\Delta\,\|^3)$$

$$1<i<n \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

Primenom leme 2.3.1 [1] sledi tvrđenje.

TEOREMA 5. Neka je u iterativnom postupku (17) primenjena Simpsonova kvadraturna formula i splajn sa uslovom (21). Neka je $K(s, t) \in C^5(I \times I)$ u $f(s) \in C^5(I)$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,[K\,(s_j, t)\;S\,\Delta\,(z_{k-1}, t)]_{t=a} \neq \frac{\partial^3}{\partial t^3}\,[K\,(s_j, t)\;S\,\Delta\,(z_{k-1}, t)]_{t=b}$$

Tada je

(25) $$|\,\rho_k\,| \le \frac{\varepsilon'}{15} + 0\,(\max\,(\|\,\Delta\,\|^4,\; 2^{-5mk}), \text{ gde je}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon\left(1 + \frac{3}{2}\,\beta^4\,\|\,A^{-1}\| + \frac{1}{2}\,\beta\right)$$

Dokaz. Sada je $\rho_k \in C^5(I)$. Konstruišimo splajn $S_\Delta(\rho_k, s)$ sa graničnim uslovima (20). Tada je prema teoremi 2.9.4 [1]

$$\rho_k - S_\Delta(\rho_k, s) = 0\,(\|\Delta\|^4) \tag{26}$$

Prema izlaznom kriterijumu (18) i teoremi 1 | 12 | sledi da je

$$|r_n \rho_k| \leq \frac{\varepsilon'}{15} + 0\,(2^{-5m}k)$$

Primenom leme 1 zbog (26) sledi tvrđenje.

Da bi na iterativni postupak (17) mogli primeniti rezultate prethodnih teorema, potrebno je proceniti konstantu u asimptotskoj nejednakosti (25).
Ako se može odrediti ε_1 tako da važi

$$|\rho_k| \leq \frac{\varepsilon'}{15} + \varepsilon_1, \text{ gde je } \varepsilon_1 = \varepsilon_1\,(\|\Delta\|, m_k, 1)$$

1-red tačnosti sa kojom se izvode računske operacije, tada se operatori A_k i B_k mogu odrediti na sledeći način

$$A_k = B_k = \sigma E$$

$$\sigma \geq \left(\frac{\varepsilon'}{15} + \varepsilon_1\right)\left(\min_t z_{k-1}(t)\right)^{-1}$$

Egzistencija rešenja sledi iz Šauderove teoreme o nepokretnoj tački.

Na primeru koji sledi prikazani su neki eksperimentalni rezultati. Ekstremi su određivani preko kubnog splajna pri čemu se unosi greška reda $0\,(\|\Delta\|^3)$.

Primer 2. $u(s) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cos t u(t)\, dt + \sin s$

$\alpha(s) = \frac{8}{2} \sin s$, $\rho = \frac{3}{4}$. Tačno rešenje je $u(s) = 4 \sin s$

Dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 3. $AS_k(s)$ je aritmetička sredina intervala određenog posle k-te iteracije primenom teoreme 1.

Tabela 1.

		A						B	
					$\varepsilon_2=5\cdot10^{-7}$				
k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	q_k Q_k	k	z_k	DG_k	GG_k
1	.108750	.1759514	.1834208	.1786861	.0477990	2	.178235	.1810183	.1827838
	.127500	.2225372	.2331002	.2278187			.224515	.2284511	.2309479
	.150000	.2844032	.2993411	.2918721	.0750005		.288220	.2937866	.2973174
4	.160245	.1814585	.1817662	.1816124	.0213078	6	.181544	.1815575	.1816260
	.199342	.2293431	.2297780	.2295696			.229517	.2295363	.2296331
	.252308	.2947348	.2953497	.2950423	.0216159		.294905	.2949332	.2950699
7	.175281	.1815673	.1816005	.1815839	.0063142	9	.181580	.1815810	.1815905
	.220682	.2295718	.2296188	.2295953			.229585	.2295859	.2295992
	.282381	.2949528	.2950190	.2949859	.0063467		.295981	.2949803	.2949990
10	.178717	.1815836	.1815895	.1815866	.0018650	12	.181585	.1815847	.1815882
	.225643	.2295875	.2295957	.2295916			.119590	.2295895	.2295944
	.282381	.2949855	.2949971	.2949914	.0018700		.294988	.2949876	.2949945
13	.181038	.1815845	.1815878	.1815861	.0005496				
	.228816	.2295895	.2295941	.2295918				C	
	.292894	.2949874	.2949936	.2949905	.0005519				
16	.181424	.1815848	.1815878	.1815862	.0001615	1	.108750	.1759514	.1834208
	.229363	.2295898	.2295939	.2295917			.127500	.2225372	.2331002
	.294667	.2949879	.2949936	.2949907	.0001635		.150000	.2844032	.2993411
29	.181585					2	.180721	.1810182	.1827835
	.229591						.228031	.2284508	.2309474
	.294989						.293192	.2937864	.2973169
						15	.181587		
							.229593		
							.294993		

Tabela 2

	$\varepsilon_2=0.00005$						$\varepsilon_2=0.0005$			
k	DG_k	GG_k	AS_k	$\frac{q_g}{O_k}$	k	z_k	DG_k	GG_k	AS_k	$\frac{q_g}{O_k}$
1	.1758032	.1853196	.1796615	.0674000	1		.1609969	.1947092	.1778530	.0575000
	.2223484	.2332195	.2277840				.2034593	.2469937	.2252265	
	.2841566	.2994891	.2918229	.0750700			.2594937	.3169185	.2882061	.0813173
4	.1813231	.1819143	.1816187	.0212215	3	.149338	.1662163	.1961284	.1811724	.0218751
	.2291604	.2299784	.2295694			.184275	.2090356	.2492740	.2291548	
	.2944864	.2956234	.2950549	.0217149		.230700	.2668139	.3215952	.2941697	.0418751
7	.1814191	.1817376	.1815784	.0062152	5	.167352	.1665486	.1964605	.1815046	.0042148
	.2293702	.2298048	.2295878			.209494	.2092081	.2498078	.2295080	
	.2946762	.2952735	.2949749	.0064346		.266523	.2670429	.3226119	.2948275	.0242148
10	.1814385	.1817376	.1815881	.0017690						
	.2293898	.2297976	.2295937							
	.2947142	.2952743	.2949942	.0019690						

Tabela 3

$\sigma = 10^{-6}$

t	$z_7(t)$	$u(t) - z_7(t)$	$AS_7(t)$	$u(t) - AS_7(t)$
.5336597	1.8310385	−.2037115E-00	2.0347414	−.8583069E-05
.6118412	2.0674944	−.2300081E-00	2.2975016	−.9536743E-06
.7563019	2.4701366	−.2748079E-00	2.7449379	−.6675720E-05
.9450488	2.9175253	−.3245764E-00	3.2420979	−.3814697E-05
1.1493458	3.2845745	−.3654127E-00	3.6499805	−.6675720E-05
1.3380938	3.5025215	−.3896656E-00	3.8921747	−.1239777E-04
1.4825544	3.5855398	−.3988972E-00	3.9844284	−.8583069E-05
1.5067362	3.5993662	−.4004316E-00	3.9997931	−.4768372E-05

$\sigma = 10^{-4}$

t	$z_7(t)$	$u(t) - z_7(t)$	$AS_7(t)$	$u(t) - AS_7(t)$
.5336597	1.7631416	−.2716084E-00	2.0342426	−.5073547E-03
.6118412	1.9908190	−.3066835E-00	2.2969284	−.5741119E-03
.7563019	2.3785381	−.3664064E-00	2.7442627	−.6818771E-03
.9450488	2.8093262	−.4327755E-00	3.2412901	−.8115768E-03
1.1493468	3.1627645	−.4872227E-00	3.6490726	−.9145737E-03
1.3380938	3.3726301	−.5195570E-00	3.8912086	−.9784698E-03
1.4825544	3.4525738	−.5318632E-00	3.9834433	−.9937286E-03
1.5607362	3.4658765	−.5339212E-00	3.9987926	−.1005173E-02

LITERATURA

[1] Alberg D. Ž., Nilbson E., Uloš D. Ž., *Teorija splajnov i ee priloženija*, Moskva, (1972).

[2] Albrecht, J., *Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge*, Numer. Math. 4, 196–208, (1962).

[4] Albercht, J., *Iterationsfolgen und ihre verwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme*, Numer. Math. 3, 345–358, (1961).

[4] Herceg, D. Koprivica K., Pejović D., *Jedan prilaz numeričkom rešavanju Fredholmove integralne jednačine druge vrste pomoću računara*, Mat. Ves. 12 (27), 257–263, (1975).

[5] Kollatc, L., *Funcional'nyj analiz i vyčislitel'naja matematika*, Moskva, (1969).

[6] Krasnosel'skij M. A., *Položitel'nye rešenija operatornyh uravnenij*, Moskva, (1962).

[7] Krasnosel'skij M. A., Vajniko G. M. i dr., *Približenoe rešenie operatornyh uravnenij*, Moskva, (1969).

[8] Pflanz, E., *Allgemeine Differenzenausdrücke für die Ableitungen einer Funktion y (x)*, *Z. angew*, Math. Mech., Bd. 20. Nr. 11/12, 379–381, (1949).

[9] Surla K., *Numeričko rešavanje Fredholmove integralne jednačine primenom splajn aproksimacija*, Zbornik radova PMF-a Univ. u Novom Sadu, 8, 120–124, (1978).

[10] Surla K., *Približno rešavanje integralnih jednačina*, Magistarski rad, Novi Sad, (1976).

[11] Surla K., Herceg D., *Some possibilities in solving operator equotions using non stationary iterative method*, Mat. Ves. 1 (14), 129–136, (1977).

[12] Surla K., *O izlaznim kriterijumima za interpolacione kvadraturne formule*, Zbornik radova PMF-a Univerzitet u Novom Sadu, 8, 113–119, (1978).

[13] Surla K., *Nestacionarne iterativne metode pri rešavanju operatorskih jednačina*, Doktorska disertacija, Novi Sad, (1980).

AN *A POSTERIORI* ERROR ESTIMATION AND ACCELERATION OF THE NON-STATIONARY ITERATIVE PROCEDURE IN A CASE WHEN AN EIGENVALUE AND CORRESPONDING EIGENELEMENT OF THE OPERATOR ARE KNOWN

Katarina Surla

SUMMARY

In this paper, equation (1) is solved by a nonstationary iterative procedure (2) in a partially ordered Banach space B. It is supposed that a positive eigenvalue and corresponding eigenelement of operator T are known. After setting the necessary conditions for series (2), an invariant itnerval (4) for the operator T' is obtained. This made it possible to get an *a posteriori* error estimation. In this way the results (1) are transferred into a non stationary iterative procedure of the type (2).