Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

TENZORI PRODUKT-KONFORMNE I PRODUKT--KONCIRKULARNE KRIVINE

Vojislav Petrović
Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

1. Uvod

Neka je V_n n-dimenzionalni Rimanov prostor sa metričkim tenzorom

$$g_{ji}=g_{ji}(x^1,\dots,x^n)=g_{ji}(x)\quad (i,j,k,\dots=1,2,\dots,n).$$

Konformna transformacija prostora V_n na prostor $\overline{V}_n$ data je sa

$$\overline{g}_{ji}=\rho^2 g_{ji} \tag{1}$$

gde je $\rho=\rho(x^i)$ skalarna funkcija različit od nule. Invarijanta konformnih transformacija je Weyl-ov *tenzor konformne krivine*

$$C^h_{kji}=R^h_{kji}+\frac{1}{n-2}(-\delta^h_k R_{ji}+\delta^h_j R_{ki}-R^h_k g_{ji}+R^h_j g_{ki})-$$
$$-\frac{R}{(n-1)(n-2)}(-\delta^h_k g_{ji}+\delta^k_j g_{ki})$$

gde su R^h_{kji} komponente Riman-Kristofelovog tenzora krivine, δ^h_k Kronekerov simbol,

$$R_{ji}=R^t_{tji},\quad R^h_k=R_{kt}g^{td},\quad R=R_{ji}g_{ji}.$$

Konformne transformacije koje preslikavaju geodezijske kružnice iz V_n na geodezijske kružnice iz $\overline{V}_n$ zovu se *koncirkularne transformacije*. U radu [4] je pokazano da za takve transformacije funkcija ρ mora da zadovoljava sledeći sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\rho_{ji}=\phi g_{ji} \tag{2}$$

gde je $\phi=\phi(x_i)$ neka skalarna funkcija $\rho_{ji}=\nabla_j\rho_i-\rho_j\rho_i+\frac{1}{2}g_{ji}\rho_t\rho^t$, $\rho_i=$ $=\frac{\partial(ln\,\rho)}{\partial x^i}$, $\rho^i=\rho_t g^{ti}$, ∇_j operator kovarijantnog diferenciranja. K. Yano je pokazao ([2]) da je tenzor

$$Z^h_{kji}=R^h_{kji}-\frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ji}-\delta^h_j g_{ki})$$

invarijanta koncirkularnih transformacija i nazvao ga *tenzorom koncirkularne krivine*. Za koncirkularne transformacije važe sledeće teoreme:

TEOREMA 1.1. *Prostor konstantne krivine se koncirkularnom transformacijom preslikava na prostor konstante krivine.*

TEOREMA 1.2. *Tenzor konformne krivine nekog prostora je jednak tenzoru koncirkularne krivine toga prostora ako i samo ako je taj prostor Ajnštajnov.*

2. Tenzor produkt-konformne krivine

Neka je M_n n-dimenzionalni Rimanov lokalno produktni prostor sa metrikom

$$ds^2=g_{cb}(x^a)\,dx^c dx^b+g_{zy}(x^x)\,dx^z dx^y$$

Poznato je da se produkt prostor M_n u okolini svake svoje tačke raslojava na proizvod $M_p\times M_q$ $(p+q=n)$, gde su M_p i M_q Rimanovi prostori dimenzija p i q, a čiji su metrički tenzori redom g_{ba} i g_{yx}.

Neka na prostor M_p deluje konformna transformacija

(3) $$\bar{g}_{ba}=\lambda^2 g_{ba}\quad(\lambda=\lambda(x^a)\neq 0),$$

a na prostor M_q konformna transformacija

(4) $$\bar{g}_{yx}=\mu^2 g_{yx}\qquad(\mu=\mu(x^y)\neq 0)$$

Tada je ceo prostor M_n podvrgnut transformaciji

(5) $$\bar{g}_{ji}=\rho g_{ji}+\sigma F_{ji}$$

gde su $\rho=\frac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2)$, $\sigma=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)$, $F_{ji}=F^t_j g_{ti}$, F^h_j strukturni tenzor produktnog prostora M_u.

[1] Kada je reč o produkt prostorima indeksi uzimaju sledeće vrednosti: $a,b,c,d=1,2,\ldots,p$; $t,x,y,z=p+1,\ldots,p+q=n$; $i,j,k,l,m=1,2,\ldots,p,p+1,\ldots,n$.

DEFINICIJA 2.1. *Transformacija* (5) *se zove produkt konformna transformacija*. Direktnim izračunavanjem dobijamo iz (5) sledeće relacije

$$\bar{g}^{ji}=\frac{\rho}{\rho^2-\sigma^2}\,g^{ji}+\frac{\sigma}{\rho^2-{}^2\sigma}\,F^{ji}$$

$$\bar{F}_j^h=F_j^h$$

$$\bar{F}_{ji}=\sigma g_{ji}+\rho\, F_{ji},\quad \bar{F}^{ji}=\frac{-\sigma}{\rho^2-\sigma^2}\,g^{ji}+\frac{\rho}{\rho^2-\sigma^2}\,F^{ji}$$

(6) $$\overline{\left\{ {h \atop ji} \right\}}=\left\{ {h \atop ji} \right\}+\delta_j^h p_i+\delta_i^h p_j-g_{ji}p^h+F_k^h q_i+F_i^h q_j-F_{ji}q^h$$

gde su $p_i=\dfrac{\rho\rho_i-\sigma\sigma_i}{2\,(\rho^2-\sigma^2)}$, $q_i=\dfrac{\rho\,\sigma_i-\sigma\,\rho_i}{2\,(\rho^2-\sigma^2)}$, $\rho_i=\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$, $\sigma_i=\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^j}$, $\left\{ {h \atop ji} \right\}$ Riman-Kristofelovi simboli za metrički tenzor g_{ji}.

Koristeći (6), Riman-Kristofelov tenzor krivine prostora $\bar{M}_n$ se dobija u obliku

(7) $$\bar{R}_{kji}^h=R_{kji}^h-\delta_k^h p_{ji}+\delta_j^h p_{ki}-p_k^h g_{ji}+p_j^h g_{ki}$$
$$-F_k^h q_{ji}+F_j^h q_{ki}-q_k^h F_{ji}+q_j^h F_{ki}$$

gde su

$$p_{ji}=\nabla_j p_i-p_j p_i-q_j q_i+\frac{1}{2}\,1 g_{ji}p_t p^t+\frac{1}{2}\,F_{ji}p_t q^t$$

$$q_{ji}=\nabla_j q_i-p_j q_i-q_j p_i+\frac{1}{2}\,F_{ji}q_t q^t+\frac{1}{2}\,g_{ji}p_t q^t$$

$$p_k^h=p_{kt}g^{th},\quad q_k^h=q_{kt}g^{th}$$

Eliminacijom prvih i drugih parcijalnih izvoda p u q dobijamo iz (7)

$$\bar{R}_{kji}^h-a_2\,[\bar{s}_{kji}^h+2\,(a_1\bar{R}+b_1\bar{R}^*)\,\bar{r}_{kji}^h+2\,(b_1\bar{R}+a_1\bar{R}^*)\,\bar{r}_{kji}^{*h}]$$
$$-\ b_2\,[\bar{s}_{kji}^{*h}+2\,b_1\bar{R}+a_1\bar{R}^*)\,\bar{r}_{kji}^h+2\,(a_1\bar{R}+b_1\bar{R}^*)\bar{r}_{kji}^{*h}]=$$
$$=R_{kji}^h-a_2\,[s_{kji}^h+2\,(a_1R+b_1R^*)\,r_{kji}^h+2\,(b_1R+a_1R^*)\,r_{kji}^{*h}]$$
$$-b_2\,[s_{kji}^h+2\,(b_1R+a_1R^*)\,r_{kji}^h+2\,(a_1R+b_1R^*)\,r_{kji}^{*h}]$$

gde su

$$a_2=\frac{-(n-4)}{(n-4)^2-\varphi^2},\quad b_2=\frac{\varphi^2}{(n-4)^2-\varphi^2},\quad \varphi=F_t^t$$

$$a_1=\frac{-(n-2)}{2\,[(n-2)^2-\varphi^2]},\quad b_1=\frac{\varphi}{2\,[(n-2)^2-\varphi^2]}$$

$$\bar{s}^{h}_{kji}=-\delta^{h}_{k}\bar{R}_{ji}+\delta^{h}_{j}\bar{R}_{ki}-\bar{R}^{h}_{k}\bar{g}_{ji}+\bar{R}^{h}_{j}\bar{g}_{ki}-\bar{F}^{h}_{k}\bar{R}^{*}_{ji}+\bar{F}^{h}_{j}\bar{R}^{*}_{ki}-\bar{R}^{*h}_{k}\bar{F}_{ji}+\bar{R}^{*h}_{j}\bar{F}_{ki}$$

$$\bar{s}^{*h}_{kji}=\bar{s}^{t}_{kji}\cdot F^{h}_{t},\ \bar{R}_{ji}=\bar{R}^{t}_{tji},\ \bar{R}^{*}_{ji}=\bar{R}_{jt}F^{t}_{i},\ \bar{R}=\bar{R}_{ji}\bar{g}^{ji},\ \bar{R}^{*}=\bar{R}_{ji}\bar{F}^{ji}$$

$$\bar{r}^{h}_{kji}=-\delta^{h}_{k}\bar{g}_{ji}+\delta^{h}_{i}\bar{g}_{ki}-\bar{F}^{h}_{k}\bar{F}_{ji}+\bar{F}^{h}_{j}\bar{F}_{ki},\ \bar{r}^{*h}_{kji}=\bar{r}^{t}_{kji}\bar{F}^{h}_{t}$$

$$s^{h}_{kji}=-\delta^{h}_{k}R_{ji}+\delta^{h}_{j}R_{ki}-R^{h}_{k}g_{ji}+R^{h}_{j}g_{ki}-F^{h}_{k}R^{*}_{ji}+F^{h}_{j}R^{*}_{ki}-R^{*h}_{k}F_{ji}+R^{*h}_{j}F_{ki}$$

$$s^{*h}_{kji}=S^{t}_{kji}F^{t}_{h},\ R_{ji}=R^{t}_{tji},\ R^{*}_{ji}=R_{jt}F^{t}_{i},\ R=R_{ji}g^{ji},\ R^{*}=R_{ji}F^{ji}$$

$$r^{h}_{kji}=-\delta^{h}_{k}g_{ji}+\delta^{h}_{j}g_{ki}-F^{h}_{k}F_{ji}+F^{h}_{j}F_{ki},\ r^{*}_{kji}=r^{t}_{kji}F^{h}_{t}.$$

Odavde sledi teorema:

TEOREMA 2.1. *Tenzor*

$$D^{h}_{kji}=R^{h}_{kji}-a_2\,[\,s^{h}_{kji}+2\,(a_1R+b_1\bar{R})\,r^{h}_{kji}+2\,(b_1R+a_1\bar{R})\,r^{*h}_{kji}]$$
$$-b_2\,[\,s^{*h}_{kji}+2\,(b_1R+a_1\bar{R})\,r^{h}_{kji}+2\,(a_1R+b_1\bar{R})\,r^{*h}_{kji}]$$

je invarijanta produkt — konformnih transformacija.

Tachibana, koji je prvi dobio tenzor D^{h}_{kji} , ([6)], kao invarijantu infinitezimalnih produkt-konformnih transformacija, nazvao ga je *tenzorom produkt-konformne krivine.*

Tenzor D^{h}_{kji} ima niz osobina analognih osobinama Weyl-ovog tenzora konformne krivine što u izvesnoj meri opravdava naziv.

TEOREMA 2.2. *Sve komponente tenzora* D^{h}_{kji} *su identički jednake nuli izuzev projekcija* D^{d}_{cba} i D^{t}_{zyx} *na potprostore* M_p *i* M_q, *redom i pritom je* $D^{d}_{cba}=C^{d}_{cba}$, $D^{t}_{zyx}=C^{t}_{zyx}$ *gde su* C^{d}_{cba} *i* C^{t}_{zyx} *odgovarajući tenzori konformne krivine za prostore* M_p *i* M_q.

TEOREMA 2.3. *Ako u lokalno produtknom Rimanovom prostoru* M_n *postoji takva skalarna funkcija* p *da koneksija*

$$\overline{\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}+\delta^{h}_{j}p_i+\delta^{h}_{i}p_j-g_{ji}p^{h}+F^{h}_{j}q_i+F^{h}_{i}q_j-F_{ji}q^{h}$$

gde su $p_i=\dfrac{\partial p}{\partial x^i}$, $q_i=\dfrac{\partial q}{\partial x^i}$, $q_i=p_mF^{m}_{i}$ *ima nula krivinu, onda je* $D^{h}_{kji}=0$.

TEOREMA 2.4. *U prostoru skoro konstantne krivine tenzor* D^{h}_{kji} *jednak je nuli.*

3. Tenzor produkt-koncirkularne krivine

Ako na podprostore M_p i M_q lokalno produktnog Rimanovog prostora M_n deluju, nezavisno jedna od druge, koncirkularne transformacije

$$\bar{g}_{ba}=\lambda^2 g_{ba}$$

$$\lambda_{ba}=\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda\cdot\nabla_b\lambda_a-2\lambda_b\lambda_a+\frac{1}{2}g_{ba}\lambda_c\lambda^c\right)=\psi_1 g_{ba} \tag{8}$$ [2]

$$\lambda=\lambda\,(x^a)\neq 0,\quad \psi_1=\psi_1\,(x^a),\quad \lambda_a=\frac{\partial\lambda}{\partial x^a}$$

i

$$\bar{g}_{yx}=\mu^2 g_{yx}$$

$$\mu_{yx}=\frac{1}{\mu^2}\left(\mu\cdot\nabla_y\,\mu_x-2\mu_y\,\mu_x+\frac{1}{2}\,g_{yx}\,\mu_t\,\mu^t\right)=\psi_2\,g_{yx} \tag{9}$$

$$\mu=\mu\,(x^y)\neq 0,\ \psi_2=\psi_2\,(x^y),\quad \mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial x^x}$$

onda na M_n imamo transformaciju

$$\bar{g}_{ji}=\rho\,g_{ji}+\sigma\,F_{ji}$$

$$\rho=\frac{1}{2}\,(\lambda^2+\mu^2),\quad \sigma=\frac{1}{2}\,(\lambda^2-\mu^2) \tag{10}$$

pri čemu funkcije λ i μ zadovoljavaju (8) i (9).

DEFINICIJA 3.1. *Transformacija* (10) *se zove produkt-koncirkularna transformacija.* Lako se pokazuje da za produkt-koncirkularnu transformaciju važe sledeće relacije

$$\rho_a=\lambda\,\lambda_a,\qquad \rho_x=\mu\,\mu_x$$

$$\sigma_a=\lambda\,\lambda_a\qquad \sigma_x=-\mu\,\mu_x$$

$$p_a=\frac{\lambda_a}{\lambda}\qquad p_x=\frac{\mu_x}{\mu}$$

$$q_a=\frac{\lambda_a}{\lambda}\qquad q_x=-\frac{\mu_x}{\mu}$$

odakle je

$$p_{ba}=\nabla_b\,p_a-2p_b\,p_a+g_{ba}\,p_c\,p^c=\frac{1}{2\lambda^2}(\lambda\cdot\nabla_b\lambda_a-2\lambda_b\,\lambda_a+\frac{1}{2}\,g_{ba}\,\lambda_c\,\lambda^c)=\frac{1}{2}\,\psi_2\,g_{xy}$$

$$p_{yx}=\nabla_y\,p_x-2p_y\,p_x+g_{yx}\,p_t\,p^t=\frac{1}{2\mu^2}\left(\mu\cdot\nabla_y\,\mu_x-2\mu_y\,\mu_x+\frac{1}{2}\,g_{yx}\,\mu_t\,\mu^t\right)=\frac{1}{2}\,\psi_2 g_{yx}$$

$$p_{ax}=p_{yb}=0$$

[2] Lako se pokazuje da su uslovi (8) u (9) ekvivalentni sa (2)

odnosno

$$p_{ji}=\frac{1}{2}(\theta_1 g_{ji}+\theta_2 F_{ji})$$

gde je $\theta_1=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)$ i $\theta_2=\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)$. Analogno se dobija

$$q_{ji}=\frac{1}{2}(\theta_2 g_{ji}+\theta_1 F_{ji})$$

Ako sad (11) i (12) zamenimo u (7) i izvršimo eliminaciju kao u prethodnom dobijamo

$$\overline{R}^h_{kji}+(\alpha\overline{R}+\beta\overline{R}^*)\overline{r}^h_{kji}+(\beta\overline{R}+\alpha\overline{R}^*)\overline{r}^{*h}_{kji}=$$
$$=R^h_{kji}+(\alpha R+\beta R^*)\,r^h_{kji}+(\beta R+\alpha R^*)\,r^{*h}_{kji}$$

gde je

$$\alpha=\frac{n(n-2)+\varphi^2}{[n(n-2)+\varphi^2]^2-4\varphi^2(n-1)^2}\qquad \beta=\frac{-2\varphi(n-1)}{[n(n-2)+\varphi^2]^2-4\varphi^2(n-1)^2}$$

pa imamo teoremu

TEOREMA 3.1. *Tenzor*

$$E^h_{kji}=R^h_{kji}+(\alpha R+\beta R^*)\,r^h_{kji}+(\beta R+\alpha R^*)\,r^{*h}_{kji}$$

je invarijanta produkt-koncirkularne transformacije.

DEFINICIJA 3.2. *Tenzor* E^h_{kji} *se zove tenzor produkt-koncirkularne krivine.*

Kao i T. 2,2 neposredno se dokazuje sledeća teorema:

TEOREMA 3.2. *Sve komponente tenzora* E^h_{kji} *su identički jednake nuli izuzev komponenata* E^d_{cba} *i* E^t_{zyx} *i pri tome je* $E^d_{cba}=Z^d_{cba}$, $E^t_{zyx}=Z^t_{zyx}$ *gde su* Z^d_{cba} *i* Z^t_{zyx} *tenzori koncirkularnih krivina prostora* M_p *i* M_q, *redom.*

Sledeće teoreme su uopštenja teorema T.1.1 i T.1.2.

TEOREMA 3.3. *Prostor skoro konstantne krivine se produkt koncirkularnom transformacijom preslikava na prostor skoro konstantne krivine.*

TEOREMA 3.4. *Tenzor produkt-konformne krivine je jednak tenzoru produkt-koncirkularne krivine nekog lokalno produktnog Rimanovog prostora ako i samo ako je taj prostor skoro Ajštajnov.*

Tenzor E^h_{kji} je prvi put dobijen u radu [7] kao invarijanta infinitezimalnih produkt-koncirkularnih transformacija.

Na osnovu navedenog, tenzor E^h_{kji} predstavlja uopštenje tenzora Z^h_{kji} u lokalno produktnim prostorima. Interesantno je da je do istog tenzora, no na sasvim drugi način, došla M. Prvanović u radu [5].

LITERATURA

[1] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces* Pergamon Press, (1965).,

[2] K. Yano, *Concircular geometry I* Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 195–200.

[3] A. Fialkow, *Conformal geodesics*, Trans. Amer. Math. Soc., 45 (1938).

[4] H. W. Brinkmann, *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann., 94 (1925).

[5] M. Prvanović, *On two tensors in locally decomposable Riemannian spaces*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, № 6, 49–57, 1976, Novi Sad.

[6] S. Tachibana, *Some theorems on locally product Riemannien spaces*, Ochanomizu University, (1959).

[7] V. Petrović, *Product-concircular curvature tensor*, Publication de l'institut mathématique, Nouvelle série, tome 25 (39), 1979, pp. 131–137.

PRODUCT-CONFORMAL AND PRODUCT-CONCIRCULAR COURVATURE TENSORS

Vojislav Petrović

SUMMARY

In this paper we investigate the product conformal and product-concircular transformations of locally product Riemannien spaces. Invariants of these transformations are found. Tensors obtained in this paper are generalizations of conformal and concircular courvature tensors.