Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

r-SEMIGRUPE

Stojan Bogdanović
Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

U [1] su razmatrane *semiprimarne* semigrupe. H. Lal je takođe razmatrao semiprimarne semigrupe, ali u jednom drugačijem smislu. U ovom radu uvodi se koncept r-*semigrupe* i daje se odnos između klase semiprimarnih semigrupa i klase semiprimarnih (r-sempirimarnih) semigrupa u smislu H. Lala, [2].

Za nedefinisane pojmove referišemo [3]. Navodimo sledeću

DEFINICIJA 1. *Ideal I semigrupe S je semiprimaran ako*

$$(\forall a, b \in S)\,(ab \in I \Rightarrow (\exists m \in N)\,(a^m \in I \vee (\exists n \in N)\,(b^n \in I)).$$

Semigrupa S je semiprimarna ako je svaki njen iedal semiprimaran, [1].

Definisaćemo sada radikal podskupa semigrupe.

DEFINICIJA 2. *Radikal podskupa A semigrupe S, u oznaci* $\operatorname{rad}(A)$, *je skup svih $a \in S$ da je neki stepen od a u A, tj.*

$$\operatorname{rad}(A) = \{a \in S \mid (\exists n \in N)\,(a^n \in A)\}.$$

Ako je A ideal, onda je $\operatorname{rad}(A)$ *poznati radikal ideala.*

PRIMEDBA 1. Radikal ideala nije uvek ideal. Na primer, uzmimo semigrupu S datu tablicom

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	d	a
c	a	a	c	a	e
d	a	a	d	a	b
e	a	e	a	c	a.

Za ideal $I=\{a\}$ je $\operatorname{rad}(I)=\{a, d, e\}$. Međutim, $\operatorname{rad}(I)$ nije ideal od S, jer $de=$ $=b \notin \operatorname{rad}(I)$.

PRIMEDBA 2. Postoji semigrupa S koja sadrži podskup A koji nije podsemigrupa od S, (dakle, nije ideal od S), dok $\operatorname{rad}(A)$ jedste ideal od S. Na primer, uzmimo semigrupu S datu tablicom

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	e
b	a	a	a	a	e
c	a	a	b	a	e
d	a	a	b	b	e
e	e	e	e	e	a.

Podskup $A=\{a, c, d\}$ od S nije podsemigrupa od S, pa samim tim nije ideal od S. Međutim, $\operatorname{rad}(I)=\{a, b, c, e\}$ jeste ideal od S.

DEFINICIJA 3. *Podskup A semigrupe S je r-skup u S ako je* $\operatorname{rad}(A)$ *ideal od S. Ako je A ideal od S, onda ga nazivamo r-idealom.*

TEOREMA 1. *Podskup A semigrupe S je r-skup u S ako i samo ako za proizvoljne $m \in N$, $s \in S$ iz $a^m \in A$ sledi $(as)^n \in A$ i $(sa)^k \in A$, za neke $n, k \in N$.*

Dokaz. Neka je A r-skup u S. Tada $\operatorname{rad}(A)$ je ideal od S, pa za $a^m \in A$ i $s \in S$ je $as \in \operatorname{rad}(A)$. Odavde je $(as)^n \in A$, za neko $n \in N$. Slično je $(sa)^k \in A$, za neko $k \in N$.

Obratno, za $a \in \operatorname{rad}(A)$ postoji $m \in N$ da je $a^m \in A$, pa za proizvoljan $s \in S$ imamo da je $(as)^n \in A$, za neko $n \in N$. Dakle, $as \in \operatorname{rad}(A)$. Slično je $sa \in \operatorname{rad}(A)$.

POSLEDICA 1. Ideal I semigrupe S je r-ideal ako i samo ako za proizvoljne $m \in N$, $s \in S$ iz $a^m \in I$ sledi $(as)^n \in I$, za neko $n \in N$.

DEFINICIJA 4. *Semigrupa S je r-semigrupa ako je svaki njen ideal r-ieal.*

LEMA 1. *Ako je S (levo) slabo komutativna semigrupa, onda S jeste r-semigrupa.*

Dokaz. Neka je I ideal (levo) slabo komutativne semigrupe S, $a^n \in I$ za neki $n \in N$ i b proizvoljan element iz S. Tada na osnovu Leme 1. [4] imamo da je $(ba)^m = a^n x$, za svaki $n \in N$ i neke $m \in N$ i $x \in S$. Dakle, $(ba)^m \in I$, pa na osnovu Posledice 1. imamo da je I r-ideal.

Da ne bi došlo do kolizije sa Definicijom 1. mi ćemo semiprimarne semigrupe u smislu definicije H. Lala nazivati radikalno semiprimarnim ili kraće r-semiprimarnim.

DEFINICIJA 5. *Ideal I semigrupe S je r-semiprimaran ako je njegov radikal kompletno izolovan ideal. Semigrupa S je r-semiprimarna ako je svaki njen ideal r-semiprimaran*, [2].

Klasa svih r-semiprimarnih semigrupa je podklasa klase svih sempirimarnih semigrupa, ustvari važi.

TEOREMA 2. *Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *S je r-semiprimarna,*

(ii) *S je semiprimarna r-semigrupa,*

(iii) *S je r-semigrupa u kojoj su kompletno izolovani (prime) ideali totalno uređeni u odnosu na inkluziju.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$(ii). Neka je semigrupa S r-semiprimarna, tada za $a, b \in S$ je $\operatorname{rad}(SabS)$ kompletno izolovan ideal i kako je

$$(ba)^2 = b\,(ab)a \in SabS$$

to je

$$ba \in \operatorname{rad}(SabS)$$

pa je

$$a \in \operatorname{rad}(SabS) \vee b \in \operatorname{rad}(SabS)$$

tj.

$$(\exists\, m \in N)\,(a^m \in SabS) \vee (\exists\, n \in N)\,(b^n \in SabS)$$

pa na osnovu Teoreme 1. [1] sledi da je S semiprimarna semigrupa.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka je ispunjeno (ii) i neka su I_1, I_2 kompletno izolovani ideali semigrupe S. Pretpostavimo suprotno, tj. $I_1 \not\subset I_2$, $I_2 \not\subset I_1$. Tada postoje $a \in I_1 \setminus I_2$ i $b \in I_2 \setminus I_1$, pa $ab \in I_1 \cap I_2$, $a \notin I_1 \cap I_2$, $b \notin I_1 \cap I_2$. Kako je $I_1 \cap I_2$ izolovan ideal, (Teorema II. 3.7. [3]), to na osnovu Leme 4. [1] imamo da je

$$I_1 \cap I_2 = \operatorname{rad}(I_1 \cap I_2). \tag{1}$$

Kako $a^m \in SabS$, za neko $m \in N$, (Teorema 1. [1]); slučaj $b^n \in SabS$ se raspravlja na sličan način, to imamo

$$\begin{aligned} ab \in \operatorname{rad}(I_1 \cap I_2) &\Rightarrow SabS \subset \operatorname{rad}(I_1 \cap I_2) \\ &\Rightarrow a^m \in \operatorname{rad}(I_1 \cap I_2) \\ &\Rightarrow a \in \operatorname{rad}(I_1 \cap I_2). \end{aligned}$$

Odavde na osnovu (1) imamo da je $I_1 \cap I_2$ kompletno izolovan ideal, tj. iz $ab \in I_1 \cap I_2$ sledi $a \in I_1 \cap I_2$ ili $b \in I_1 \cap I_2$, što je nemoguće.

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka su kompletno izolovani ideali semigrupe S totalno uređeni i I proizvoljan ideal iz S. Kako je $\operatorname{rad}(I)$ ideal, jasno izolovan, to na osnovu Teoreme II 3.7. [3] je $\operatorname{rad}(I) = \cap I_i$, ($I \subset I_i$, I_i su kompletno izolovani ideali. Neka $a \notin \cap I_i$; $b \notin \cap I_i$. Tada postoje kompletno izolovani ideali I_j, I_k da $a \notin I_j$; $b \notin I_k$. Po pretpostavci je $I_j \subset I_k$ ili $I_k \subset I_j$. Uzmimo da je $I_j \subset I_k$. Tada $a \notin I_j$ i $b \notin I_j$, (jer $b \notin I_k$). Kako je I_j kompletno izolovan ideal, to $ab \notin I_j$. Odavde imamo da $ab \notin \cap I_i$. Kontrapozicijom dobijamo da je $\cap I_i = \operatorname{rad}(I)$ kompletno izolovan ideal. Dakle, S je r-semiprimarna semigrupa.

Prethodna teorema je uopštenje rezultata H. Lala, [2] i autora, takođe, [1].

LITERATURA

[1] Bogdanović, S., *A note on strongly reversible semiprimary semigroups*, Publ. Inst. Math. Belgrade, (u štampi).

[2] Lal, H. *Commutative semi-primary semigroups*, Czech. Math. J. 25, (100), 1975, 1—3.

[3] Petrich, M., *Introduction to semigroups*, Merrill Publ. Company, 1973.

[4] Pondeliček, B., *On weakly commutative semigroups*, Czech. Math. J. 25, (100), 1975, 20—23.

r-SEMIGROUPS

Stojan Bogdanović

SUMMARY

In [1] are considered so called *semiprimary* semigroups. H. Lal, [2] also considered semiprimary semigroups. But the concept of H. Lal has another sense. In this paper we introduce the concept of r-semigroups (S is an *r-semigroup* iff the radical of every ideal of S is an ideal) and the interrelations of the class of semipimary semigroups and the class of semiprimary semigroups (*r-semiprimary*) in the sense of H. Lal are given.