*Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)*
*Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)*

# PRIMEDBA O FORSINGU

*Milan Grulović*
*Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku.*
*21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija*

## Uvod

U ovom radu pokazujemo da se svojstva Robinsonovog forsinga mogu prirodno preneti na forsing metodu, gde umesto konačnih skupova baričnih rečenica za uslove uzimamo konačne skupove $\Sigma_n$, $\Pi_n$ rečenica ($n>0$) (u širem smislu njihove definicije, što inače nije od posebnog značaja) normalnog proširenja jezika $L$ (u kome je definisana data teorija $T$), konsistentnih sa $T$. Takvom metodom svakoj teoriji $T$ pridružujemo njoj na izvestan način srodniju teoriju $T^{f_n}$ ($T^{f_n} \cap \Pi_{n+2} = T \cap \Pi_{n+2}$), koja međutim, gubi „lepo" svojstvo teorije $T^f$ (dobijenu Robinsonovom metodom): $f$-kompletnost. Takođe ni $T-n$ konačno generični modeli ne daju više model kompletnu klasu. Kompenzacija su $f_n$-kompletnost teorije $T^{f_n}$, odnosno $n$-model kompletnost klase $T-n$ konačno generičnih modela. Pretpostavljamo stoga da primena ove metode može biti od nekog interesa u slučaju teorija koje nisu $\Pi_2$-aksiomatizibilne.

Teoriju $T^{f_n}$ možemo (potpuno analogno kao i $T^f$) dobiti i standardnim metodama teorije modela (poznata tehnika aproksimativnih lanaca Henrarda).

§ 0. Jezik $L$ koji ćemo koristiti je jezik predikatskog računa prvog reda sa jednakošću. Njegova kardinalnost tako dugo dok se ne radi o egzistenciji generičnih modela je irelevantna. Promenljive su $v_0, v_1, \ldots$. Za osnovne logičke simbole uzimamo $\neg, \vee, \exists$, a ostale onda definišemo standardno: $\phi \& \psi$ je zamena za $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $\forall v\, \phi(v)$ za $\neg \exists v \neg \phi(v)$. Beskonačna logika $L_{\omega_1\omega}$ dozvoljava i prebrojivu disjunkciju ($\bigvee$). Ponovo $\bigwedge_{\phi\in\Phi} \phi$ je zamena za $\neg \bigvee_{\phi\in\Phi} \neg\phi$ ($\bigvee_{\phi\in\Phi} \phi$ obeležavamo i sa $\bigvee \Phi$).

Skup slobodno promenljivih formule $\phi$ obeležavamo sa $fv(\phi)$. Ako je $\phi=\phi(v_0, \ldots, v_m)$ onda $fv(\phi) \subseteq \{v_0, \ldots, v_m\}$. Ukoliko kontekst dozvoli umesto $\phi(v_0, \ldots, v_m)$ pisaćemo nekiput i $\phi(\underset{\sim}{v})$. Rečenice su formule $\phi$ za koje je $fv(\phi)=\emptyset$.

Ako je $C$ skup novih konstanti $L(C)$ je prosta ekspanzija jezika $L$ (jezik nastao od jezika $L$ dodavanjem skupa konstanti $C$). Ukoliko je skup $C$ beskonačan, što ćemo ubuduće stalno podrazumevati, govorimo o normalnoj ekspanziji. Modeli takvog jezika su oblika $(M, a_c)_{c\in C}$. Ako je $M=\{a_c \mid c\in C\}$ $M$ je kanonički model

( u cilju pojednostavljenja notacije modele jezika $L$ i njihove skupove elemenata obeležavamo istim, velikim latiničnim slovima).

Za teoriju $T$ $\mu(T)$ će biti klasa svih njenih modela.

Skupovi $\Sigma_n$, $\Pi_n$ formula jezika $L$ definišu se induktivno: $\Sigma_0=\Pi_0=\{\phi \mid \phi$ je formula bez kvantifikatora$\}$, $\Pi_{n+1}=\{\forall v_0 \ldots \forall v_m \phi \mid \phi$ je $\Sigma_n$ formula$\}$, $\Sigma_{n+1}=\{\exists v_0 \ldots \exists v_m \phi \mid \Phi$ je $\Pi_n$ formula$\}$, no za nas će $\phi$ biti $\Sigma_n(\Pi_n)$ formula ako je $\phi \leftrightarrow \psi$ gde je $\psi$ $\Sigma_n(\Pi_n)$ formula u smislu gore date definicije.

Za $f$ kažemo da je $n$-elementarno utapanje modela $M$ u model $N$ (u oznaci $f: M \rightarrow_n N$) ako sa zvaku formulu $\phi(v_0, \ldots, v_m) \in \Sigma_n \cup \Pi_n$ i svako $a_0, \ldots, a_m \in M$ važi: $M \models \phi(a_0, \ldots, a_m)$ ako i samo ako $N \models \phi(b_0, \ldots, b_m)$, gde je $b_i = f(a_i)$, $i=0, \ldots, m$ Posebno ako je $M \subseteq N$ i $f$ identično preslikavanje pišemo $M <_n N$.

§ 1. Skup sub ($\phi$) podformula formule $\phi$ jezika $L_{\omega_1\omega}$ definišemo (rekurzivno) na uobičajen način. Fragment $L_A$ jezika $L_{\omega_1\omega}$ je onda ([3]) skup formula takav da: (i) sadrži sve formule iz $L$; (ii) zatvoren je u odnosu na $\neg$, $\exists v$ i konačnu disjunkciju; (iii) sa $\phi(v)$ sadrži i $\phi(\tau)$ gde je $\tau$ (ma kakav) term i (iv) ako $\phi(v) \in L_A$ onda sub$(\phi) \subset L_A$. $K_A$ je skup formula dobijenih od formula iz $L_A$ zamenom konačno mnogo slobodno promenljivih konstantama iz $C$.

Naredne definicije takođe preuzimamo iz [3].

DEFINICIJA 1.1. *Forsing svojstvo je uređena trojka* $\langle P, \leqslant, f\rangle$ *takva da:* (1) $\langle P, \leqslant\rangle$ *je parcijalno uređena struktura sa najmanjim elementom*; (2) *$f$ je funkcija koja svaki elemenat $p$ iz $P$ preslikava u partitivni skup skupa atomičnih rečenica jezika* $K=L(C)$; (3) *Ako* $p \leqslant q$ *onda* $f(p) \subseteq f(q)$; (4) *Ako su $\sigma$ i $\tau$ zatvoreni termi jezika $K$ i $p \in P$ onda:* (a) *iz* $\sigma=\tau \in f(p)$ *sledi* $\tau=\sigma \in f(q)$ *za neki uslv* $q \geqslant p$; (b) *iz* $\sigma=\tau$, $\phi(\sigma) \in f(p)$ *sledi* $\phi(\tau) \in f(q)$ *za neki uslov* $q \geqslant p$; (c) *za neko* $c \in C$ *i neki uslov* $q \geqslant p$ $c=\sigma \in f(q)$.

DEFINICIJA 1.2. *Relaciju „$p$ forsira $\phi$”, u oznaci* $p \Vdash \phi$ *definišemo rekurzivno za uslove* $p \in P$ *i rečenice* $\phi \in K_A$.

(1) *Ako je $\phi$ atomična rečenica tada* $p \Vdash \phi$ *akko* $\phi \in f(p)$;

(2) $p \Vdash \vee \phi$ *akko ne postoji uslov* $q \geqslant p$ *takav da* $q \Vdash \phi$;

(3) $p \Vdash \vee \Phi$ *akko* $p \Vdash \phi$ *za neku rečenicu $\phi$ iz $\Phi$*;

(4) $p \Vdash \exists v \phi(v)$ akko $p \Vdash \phi(c)$ za neko $c \in C$;

$p$ slabo forsira $\Phi$ ($p \Vdash^w \phi$) ako $p \Vdash \neg\neg\phi$.

DEFINICIJA 1.3. *Podskup* $G \subseteq P$ *je generičan ako i samo ako:* (i) *Iz* $p \in G$ *i* $q \leqslant p$ *sledi* $q \in G$; (ii) *Za svako* $p, q \in G$ *postoji uslov* $r \in G$ *takav da* $r \geqslant p$ *i* $r \geqslant q$; (iii) *Za svaku rečenicu $\phi$ u $K_A$ postoji uslov* $p \in G$ *takav da* $p \Vdash \phi$ *ili* $p \Vdash \neg\phi$.

DEFINICIJA 1.4. *Generični skup $G$ generiše model $M$ ako i samo ako je $M$ kanonički model u kome je svaka rečenica $\phi$ koju forsira neki uslov iz $G$ zadovoljena.*

*Model $M$ je generični model za uslov $p \in P$ ako je generisan (generičnim) skupom $G$ koji sadrži $p$.*

*Generični model $M$ je model jezika $L$ takav da* $(M, a_c)_{c \in C}$ *je generični model najmanjeg uslova iz $P$.*

Smatraćemo poznatim osnovna svojstva forsing relacije ([1], [2], [3]) kao i teoremu o egzistenciji generičnog modela za svaki uslov $p \in P$ u slučaju prebrojivosti fragmenta $K_A$.

Forsing svojstvo o kojem će biti reči u sledećim paragrafima poseban je slučaj (kao i Robinsonov forsing uostalom) forsing svojstva ([3]) $P(\mu, \Phi) = \langle P, \leqslant, f \rangle$, gde je $\mu$ klasa modela jezika $L$, $\Phi$ podskup fragmenta $L_A$ koji sadrži sve atomične formule i zadovoljava uslov: za svako $\phi \in \Phi$ sub $(\phi) \subset \Phi$, $P$ skup svih konačnih podskupova skupa rečenica $\Phi(C) = \{\phi(c_0, \ldots, c_m) \mid \phi(v_0, \ldots, v_m) \in \Phi\}$ koji se realizuju u proširenjima modela iz $\mu$, $\leqslant$ uređenje inkluzije i $f(p)$ skup atomičnih rečenica iz $p \in P$.

Za ovo forsing svojstvo važi sledeća

TEOREMA 1.5. *Neka je $p$ uslov forsing svojstva $P(\mu, \Phi)$ i $\phi \in \Phi(C)$. Tada iz $p \models \phi$ sledi $p \Vdash^{w} \phi$ a ako $p \Vdash^{w} \Phi$ onda je $\phi$ konsistentno sa $p$.*

§2. Neka je $T$ (konsistentna) teorija definisana u jeziku $L$, $C$ (beskonačan) skup novih konstanti i $P(T, K, n)$ skup svih konačnih podskupova $\Sigma_n$, $\Pi_n$ $(n>0)$ rečenica iezika $K = L(C)$ konsistentnih sa $T$. U daljem razmatramo forsing svojstvo $\mathcal{P}(T, K, n) = \langle P(T, K, n), \leqslant, f \rangle$ gde je ponovo $\leqslant$ uređenje inkluzije i $f(p)$ skup atomičnih rečenica iz $p$. Ako $p \in P(T, K, n)$ forsira rečenicu $\phi$ fragmenta $K_A$ (koji odgovara fragmentu $L_A$) pisaćemo $p \Vdash_{T, K_A, n} \phi$.

Napomenimo odmah da smo svojstva ili njihove analogone forsinga $P(T, K, n)$ i forsing relacije $\Vdash_{T, K_A, n}$ već sreli kod Robinsonovog konačnog forsinga (koji za uslove uzima konačne podskupove bazičnih rečenica). U dokazima (videti [1], [2]) i nema razlike. Poznati stavovi iz teorije modela nam (uz 1.5) omogućuju da rezultate iz [1] „transliramo za $n$" (stavimo li $n=0$ eto njih). Dokaze ćemo stoga najčešće samo skicirati ili koji put, još jednostavnije, izostaviti.

LEMA 2.1. *Neka je $p \in P(T, K, n)$ i $\phi$ rečenica fragmenta $K_A$ koju $p$ forsira. Ako u svim rečenicama uslova $p$ i u $\phi$ zamenimo neke konstante i neka relacijska slova jezika $K$, koja se ne javljaju u teoriji $T$, recimo $c_0, \ldots, c_m$, $R_0, \ldots, R_k$ novim konstantama i relacijskim slovima $c'_0, \ldots, c'_m$, $R'_0, \ldots, R'_k$, koja se takođe ne javljaju u teoriji $T$ i ako su $p'$ i $\phi'$ rezultati zamene, tada $p' \in P(T, K, n)$ i $p' \Vdash_{T, K_A, n} \phi'$.*

*Dokaz:* Indukcijom po složenosti formule $\phi$.

LEMA 2.2. *Neka je $p \in P(T, K, n)$, $C \subseteq C'$, $K' = L(C')$, $K_A$ i $K'_A$ fragmenti, respektivno, jezika $K_{\omega_1 \omega}$, $K'_{\omega_1 \omega}$ koji odgovaraju fragmentu $L_A$ i $\phi$ rečenica iz $K_A$. Tada $p \Vdash_{T, K_A, n} \phi$ ako i samo ako $p \Vdash_{T, K'_A, n} \phi$.*

*Dokaz:* Indukcijom po složenosti formule $\phi$ (koristimo i prethodnu lemu).

NAPOMENA. U daljem tekstu smatraćemo da su teorija $T$, fragment $L_A$, parametar $n$ kao i jezik $K = L(C)$ fiksni, gde je kardinalnost skupa $C$ proizvoljno (dakle uvek dovoljno) velika. S tim u vezi rogobatno $p \Vdash_{T, K_A, n} \phi$ zamenjujemo često jednostavnim $p \Vdash \phi$.

DEFINICIJA 2.3. *$T^{fn}[p]$ je skup svih rečenica jezika $L$ koje uslov $p$ slabo forsira. $T^{fn}[\emptyset]$, što kraće obeležavamo sa $T^{fn}$, zovemo n-forsing pridruženjem teorije $T$.*

TEOREMA 2.4. *Za rečenicu $\phi$ jezika $L$ važi: $T^{fn}[p] \vdash \phi$ ako i samo ako $\phi \in T^{fn}[p]$.*

*Dokaz:* Ovo je zapravo posledica jačeg tvrđenja (koje se dokazuje indukcijom po dužini dokaza): ako je $\phi(v_0, \ldots, v_m)$ izvedivo iz $T^{f_n}[p]$ u predikatskom računu sa jednakošću (za razliku od dokaza za $T^f$ u [1] ovde možemo, zbog 1.5 velikodušno dozvoliti da je formula $\psi$ u aksiomi $v_0=v_1 \to (\psi(v_0) \to \psi(v_1))$ $\Sigma_n$, $\Pi_n$ formula) tada za sve zatvorene terme $\tau_0, \ldots, \tau_m$ $p \Vdash^w \phi(\tau_0, \ldots, \tau_m)$.

KOROLAR 2.5. *$T^{f_n}[p]$ je konsistentna teorija.*

Sa $T \cap \Pi_{n+1}$ označavamo skup rečenica $\{\phi | \phi$ je $\Pi_{n+1}$ rečenica jezika $L$ i $T \vdash \phi\}$.

LEMA 2.6. *$p \in P(T, K, n)$ ako i samo ako $p \in P(T \cap \Pi_{n+1}, K, n)$.*

*Dokaz:* Neka je $p \in P(T \cap \Pi_{n+1}, K, n)$ i $M$ model teorije $T \cap \Pi_{n+1}$ u kojem se $p$ realizuje. No tada postoji model $N$ teorije $T$ takav da je $M \prec_n N$. $N$ je, dakle, model i za $p$ te $p \in P(T, K, n)$.

KOROLAR 2.7. *Ako je $\phi$ rečenica fragmenta $K_A$ onda $p \Vdash_{T, K_A, n} \phi$ ako i samo ako $p \Vdash_{T \cap \Pi_{n+1}, K_A, n} \phi$.*

KOROLAR 2.8. $T^{f_n} = (T \cap \Pi_{n+1})^{f_n}$.

TEOREMA 2.9. *Neka je $\phi$ $\Pi_{n+1}$ rečenica jezika $K$ i $p \in P(T, K, n)$. Tada $p \Vdash^w \phi$ ako i samo ako $T \cup p \vdash \phi$.*

KOROLAR 2.10. $T \cap \Pi_{n+1} = T^{f_n} \cap \Pi_{n+1}$.

TEOREMA 2.11. *Neka je $p(c_0, \ldots, c_m) \in P(T, K, n)$ gde su $c_0, \ldots, c_m$ konstante iz $C$ koje se javljaju u rečenicama uslova $p$. Neka su, dalje, $\tau_0, \ldots, \tau_m$ proizvoljni zatvoreni termi jezika. $K$ Tada iz: $p$ forsira rečenicu $\phi(c_0, \ldots, c_m, c'_0, \ldots, c'_k)$ fragmenta $K_A$ (rečenica $\phi$ može da sadrži i neke druge konsante iz $C$) i $p(\tau_0, \ldots, \tau_m) \in P(T, K, n)$ sledi $p(\tau_0, \ldots, \tau_m)$ forsira $\phi(\tau_0, \ldots, \tau_m, c'_0, \ldots, c'_k)$.*

*Dokaz:* Indukcijom po složenosti formule.

TEOREMA 2.12. *Neka je $p(c_0, \ldots, c_m) \in P(T, K, n)$ i $\phi(c_0, \ldots, c_m)$ rečenica jezika $K$, gde su $c_0, \ldots, c_m$ sve konstante iz $C$ koje se javljaju u rečenicama uslova $p$ ili $\phi$. Tada iz $p \Vdash^w \phi$ sledi $\forall v_0 \ldots \forall v_m (\& p(v_0, \ldots, v_m) \to \phi(v_0, \ldots, v_m)) \in T^{f_n}$.*

*Dokaz:* Pretpostavimo da su uslovi teoreme ispunjeni ali da nije $\forall v_0 \ldots \forall v_m (\& p(v_0, \ldots, v_m) \to \phi(v_0, \ldots, v_m))$ u $T^{f_n}$. Onda postoji uslov $q \geqslant p$ koji forsira rečenicu $\exists v_0 \ldots \exists v_m (\& p(v_0, \ldots, v_m) \& \neg \phi(v_0, \ldots, v_m))$, pa za neke konstante $c'_0, \ldots, c'_m$ $q \Vdash \& p(c'_0, \ldots, c'_m)$ i $q \Vdash \neg \phi(c'_0, \ldots, c'_m)$. Ali tada (teorema 1.5) $r = q \cup p(c'_0, \ldots, c'_m)$ je uslov i $r \Vdash \neg \phi(c'_0, \ldots, c'_m)$, što je u kontradikciji sa prethodnom teoremom.

§3. LEMA 3.1. *Neka je $C \subseteq C'$, $M$ kanonički model jezika $K = L(C)$ i $D_n(M) = \{\phi \mid \phi$ je $\Sigma_n$, $\Pi_n$ rečenica jezika $K$ i $M \models \phi\}$, $n$-elementarni dijagram modela $M$. Tada su iskazi:*

(i) $M \models T \cap \Pi_{n+1}$;

(ii) *Svaki konačan podskup $p \subset D_n(M)$ je uslov $(p \in P(T, K, n))$; ekvivalentni.*

*Dokaz:* Prema 2.6 i teoremi kompaktnosti.

S obzirom na napomenu uz lemu 2.2 možemo pretpostaviti za svaki model $M$ da je kanonički model jezika $L(C)$ (i onda naravno i kanonički model jezika $K'=L(C')$ $C \subseteq C'$).

DEFINICIJA 3.2. *Neka je $M$ kanonički model jezika $K=L(C)$ i $M \models T \cap \Pi_{n+1}$. Sa $F_{n,C}(M)$ obeležavamo skup svih formula $\phi(v_0, \ldots, v_m)$ fragmenta $L_A$ takvio da je za svako $\psi \in \mathrm{sub}(\phi)$ i svako $c_0, \ldots, c_m \in C$ zadovoljeno: $M \models \psi(c_0, \ldots, c_m)$ ako i samo ako $p \Vdash \psi(c_0, \ldots, c_m)$ za neko $p \subset D_n(M)$.*

TEOREMA 3.3. *Neka je $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$ kanonički model jezika $K=L(C)$. Tada $F_{n,C}(M)$ sadrži sve bazične formule jezika $L$ i zatvoreno je u odnosu na prebrojivu disjunkciju, konačnu konjukciju i $\exists$. Posebno za svaku $\Sigma_n$, $\Pi_n$ formulu $\phi$ i svako $c_0, \ldots, c_m$ imamo: $M \models \phi(c_0, \ldots, c_m)$ ako i samo ako $p \Vdash^w \phi(c_0, \ldots, c_m)$ za neko $p \subset D_n(M)$.*

*Dokaz:* Prvi deo se neposredno proverava (da bi pokazali zatvorenost za egzistencijalni kvantifikator koristimo i 2.3).

Ako je $\phi(c_0, \ldots, c_m)$ $\Sigma_n$, $\Pi_n$ rečenica i $p \Vdash^w \phi(c_0, \ldots, c_m)$, $p \subset D_n(M)$ onda, jasno, $M \models \phi(c_0, \ldots, c_m)$ inače bi uslov $p \cup \{\phi(c_0, \ldots, c_n)\}$ forsirao i $\neg\phi(c_0, \ldots, c_m)$ i $\neg\neg\phi(c_0, \ldots, c_m)$, kontradikcija. Važenje implikacije u suprotnom smeru proizilazi iz 1.5.

KOROLAR 3.4. *Ako je $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$ kanonički model* (za $K=L(C)$), *tada za svaku $\Sigma_{n+1}$ formulu $\phi(v_0, \ldots, v_m)$ i svako $c_0, \ldots, c_m \in C$ važi: $M \models \phi(c_0, \ldots, c_m)$ ako i samo ako $p \Vdash^w \phi(c_0, \ldots, c_m)$ za neko $p \subset D_n(M)$.*

TEOREMA 3.5. *Ako je $M$ kanonički model i za $K'=L(C)'$ i za $K''=L(C'')$, $C'$, $C'' \subseteq C$, onda $F_{n,C'}(M)=F_{n,C''}(M)$.*

*Dokaz:* S obzirom na 3.3 dovoljno je pokazati da iz $\phi \in F_{n,C'}(M) \cap F_{n,C''}(M)$ i $\neg\phi \in F_{n,C'}(M)$ sledi $\neg\phi \in F_{n,C''}(M)$.

Generične modele forsing svojstva $P(T, K, n)$ zvaćemo $T$-$n$ konačno generičnim.

TEOREMA 3.6. *Za kanonički model $M$ važi: $M$ je $T$-$n$ konačno generičan ako i samo ako* (i) $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$ *i* (ii) *za svaku rečenicu $\phi$ fragmenta $K_A$ $M \models \phi$ ako i samo ako $p \Vdash \phi$ za neko $p \subset D_n(M)$.*

*Dokaz:* ($\rightarrow$) Model je generisan po pretpostavci generičnim skupom, recimo $G$, za najmanji uslov ($\emptyset$). Stoga $M \models T^{fn}$ pa, prema 2.10, $M \models T \cap \Pi_{n+1}$. (ii) $M \models \phi$ ako i samo ako je $\phi$ generisano nekim uslovom $q$ iz $G$. No $q \Vdash^w \& q$ te $q \subset D_n(M)$.

($\leftarrow$) Skup svih uslova $p \subset D_n(M)$ je generičan skup za najmanji uslov.

TEOREMA 3.7. (*teorema o generičnom modelu* [3]) *Ako je $K_A$ prebrojiv fragment jezika $K_{\omega_1\omega}$ postoji prebrojiv $T$-$n$ konačno generični model. Posebno za svaki uslov $p \in P(T, K, n)$ postoji $T$-$n$ konačno generični model takav da $p \subset D_n(M)$.*

*Napomena.* U daljem tekstu fragment $K_A$ će biti skup (svih) rečenica jezika $K$.

TEOREMA 3.8. (i) *Neka je $M$ $T$-$n$ konačno generični model i $N$ model teorije $T^{fn}$. Tada iz $M \prec_n N$ sledi $M \prec N$;*

(ii) *Ako je* $M \models T^{fn}$ *i iz* $M \prec_n N$ *sledi* $M \prec N$ *za svaki model* $N \in \mu(T^{fn})$ *onda je* $M$ *T-n konačno generični model.*

*Dokaz:* (i) Smatraćemo da je $N$ kanonički model jezika $K' = L(C')$ gde $C \subseteq C'$ ($M$ je kanonički model jezika $K = L(C)$) i da $c^M = c^N$ za svako $c \in C$. Ako je $M \models \phi(c_0 \ldots c_m)$ onda za neki uslov $p \subset D_n(M)$ $p \Vdash \phi$ i prema 2.12 $N \models \forall v_0 \ldots \forall v_m (\& p(v_0 \ldots v_m) \rightarrow \phi(v_0, \ldots, v_m))$. Zbog $M \prec_n N$ $N \models$ $\models p(c_0, \ldots, c_m)$ pa $N \models \phi(c_0, \ldots, c_m)$.

(ii) Zbog 3.3 dovoljno je da pokažemo da ako je $\neg\phi$ zadovoljeno u $M$ onda za neki uslov $p \subset D_n(M)$ $p \Vdash \neg\phi$ (obrat ovog tvrđenja je očigledan). Kako je $T^{fn} \cup D_n(M)$ kompletna teorija $T^{fn} \cup D_n(M) \vdash \neg\phi$ pa za neko $p \subset D_n(M)$ $T^{fn} \cup p \vdash \phi$. No sada $p \Vdash \neg\phi$ inače bi neki uslov $q \geqslant p$ forsirao $\phi$. Ali tada $T^{fn} \cup q \cup \{\phi\}$ je konsistentno je u kontradikciji sa $T^{fn} \cup p \vdash \neg\phi$ i $q \geqslant p$, a iz $T^{fn} \cup q \vdash \neg\phi$ i 2.12 sledi $\neg \exists v_0 \ldots \exists v_m \& q(v_0, \ldots, v_m) \in T^{fn} \subseteq T^{fn}[q]$. Prema 1.5, međutim, i $\exists v_0 \ldots \exists v_m \& q(v_0, \ldots, v_m) \in T^{fn}[q]$, kontradikcija opet.

DEFINICIJA 3.9. *Teorija T je n-modelski kompletna ako za svako* $M, N \in \mu(T)$ *iz* $M \prec_n N$ *sledi* $M \prec N$.

KOROLAR 3.10. $T^{fn}$ *je n-modelski kompletna ako i samo ako je svaki model teorije* $T^{fn}$ *T-n konačno generičan.*

TEOREMA 3.11. *Ako je L prebrojiv jezik onda* $Th(F_T^n) = T^{fn}$, *gde je* $F_T^n$ *klasa svih T-n konačno generičnih modela i* $Th(F_T^n) = \{\phi \mid \phi$ *je rečenica jezika L koja važi u svim modelima klase* $F_T^n\}$.

*Dokaz:* Jasno $T^{fn} \subseteq Th(F_T^n)$. Ako $\phi \notin T^{fn}$ onda neki uslov $p$ forsira $\neg\phi$. Neka je $M$ generični model takav da $p \subset D_n(M)$ (3.7). Onda $M \models \neg\phi$ i $\phi \notin Th(F_T^n)$.

DEFINICIJA 3.12. *Klasa modela* $\eta$ *jezika L je aksiomatizibilna ako je* $\eta = \mu(Th(\eta))$.

KOROLAR 3.13. *Ako je L prebrojiv jezik, klasa* $F_T^n$ *svih T-n konačno generičnih modela je aksiomatizibilna ako i samo ako je* $T^{fn}$ *n-modelski kompletna.*

DEFINICIJA 3.14. *Lanac modela* $\{M_i \mid i \in I\}$ *je n-elementaran ako za svako* $i, j \in I$, $i < j$ $M_i \prec_n M_j$.

TEOREMA 3.15. *Klasa* $F_T^n$ *T-n konačno generičnih modela je zatvorena u odnosu na uniju n-elementarnih lanaca.*

*Dokaz:* Direktnom proverom važenja (i) i (ii) iz 3.6.

TEOREMA 3.16. *Neka je M T-n konačno generični model,* $N \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$ *i* $M \prec_n N$. *Ako je* $\phi$ $\Pi_{n+2}$ *rečenica jezika K (M je kanonički model jezika K) onda iz* $N \models \phi$ *sledi i* $M \models \phi$.

*Dokaz:* Pretpostavka suprotna tvrđenju teoreme vodi u kontradikciju -postojanje uslova koji forsira rečenicu i njenu negaciju (imati u vidu: $D_n(M) \subseteq D_n(N)$ i 3.4).

TEOREMA 3.17. *Ako je* $M \prec_{n+1} N$ *i* $N \in F_T^n$ *tada i* $M \in F_T^n$.

*Dokaz:* Osnovna ideja je da se pokaže da ako $N \models \phi$, gde je $\phi$ rečenica jezika $K$, onda postoji uslov $p \subset D_n(M)\ (\subseteq D_n(N))$ takav da $p \Vdash \phi$. U tom cilju pretpostavljamo, što jasno i možemo, da je svako a iz $M$ interpretacija beskonačno mnogo konstanti iz $C$ ($N$ je kanonički model jezika $K' = L(C')$, gde $C \subseteq C'$ i $c^M = c^N$ za svako $c$ iz $C$).

DEFINICIJA 3.18. *$T^+$ je $n$-modelsko pridruženje teorije $T$ ako važi:*

(i) $T^+ \cap \Pi_{n+1} = T \cap \Pi_{n+1}$;

(ii) $T^+$ je *$n$-modelski kompletna.*

(*Ako je $n=0$ govorimo o modelskom pridruženju* [1]).

DEFINICIJA 3.19. *$T$ ima svojstvo $n$-pridruženog utapanja ako za svako $M, M' \in \mu(T)$ postoji model $N \in \mu(T)$ takav da $M \to_n N$ i $M' \to_n N$.*

DEFINICIJA 3.20. Model $M$ je $n$-egzistencijalno kompletan za teoriju tako:

(i) $M$ je model jezika teorije $T$;

(ii) $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$;

(iii) $M \prec_{n+1} N$ za svaki model $N \in \mu(T)$ takav da $M \prec_n N$.

(Za $n=0$ imamo egzistencijalno kompletan model teorije $T$). Klasu svih $n$-egzistencijalno kompletnih modela teorije $T$ obeležavaćemo sa $E_T^n$ ($E_T^0$ obeležavamo i sa $E_T$).

LEMA 3.21. Svaki član klase $\mu(T \cap \Pi_{n+1})$ je $n$-elementaran podmodel nekog $n$-egzistencijalnog modela teorije $T$.

LEMA 3.22. $E_T^n$ je jedinstvena podklasa $C$ klase $\mu(T \cap \Pi_{n+1})$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) Svaki član klase $\mu(T \cap \Pi_{n+1})$ je $n$-elementaran podmodel nekog člana iz $C$;

(ii) Ako $M, M' \in C$ i $M \prec_n M'$ tada $M \prec_{n+1} M'$;

(iii) Ako $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$, $M' \in C$ i $M \prec_n M'$ implicira $M \prec_{n+1} M'$ onda i $M \in C$.

TEOREMA 3.23. Ako $T$ ima $n$-modelsko pridruženje $T^+$, onda $T^+ = Th(E_T^n)$.

*Dokaz:* Pokazujemo da $\mu(T^+) \subseteq \mu(T \cap \Pi_{n+1})$ zadovoljava uslove prethodne teoreme. (i) važi prema 3.21, (ii) je trivijalno ispunjeno, a ako $M \in \mu(T \cap \Pi_{n+1})$, $M' \in \mu(T^+)$ i $M \prec_{n+1} M'$ tada i $M \models T^+$, jer je teorija $T^+$ $\Pi_{n+2}$ aksiomatizibilna (s obzirom da je zatvorena u odnosu na uniju $n$-elementarnih lanaca).

TEOREMA 3.24. (i) $T^{f_n f_n} = T^{f_n}$;

(ii) Iz $T_1 \cap \Pi_{n+1} = T_2 \cap \Pi_{n+1}$ sledi $T_1^{f_n} = T_2^{f_n}$;

(iii) $T^{f_n}$ je kompletna teorija ako i samo ako $T$ ima svojstvo $n$-pridruženog utapanja;

(iv) $T^{f_n} \cap \Pi_{n+2} = Th(E_T^n) \cap \Pi_{n+2} \supseteq T \cap \Pi_{n+2}$;

(v) *Ako $T$ ima n-modelsko pridruženje $T^+$, $T^{f_n}$ je deduktivno zatvorenje teorije $T^+$;*

(vi) *Ako je teorija $T$ definisana u prebrojivom jeziku $L$ klasa svih $T$-n konačno generičnih modela $F^n_T$ je podklasa klase $E^n_T$;*

*Dokaz:* (i) Prema 2.8 i 2.10 $T^{f_n f_n}=(T^{f_n}\cap\Pi_{n+1})^{f_n}=(T\cap\Pi_{n+1})^{f_n}=T^{f_n}$;

(ii) Neposredna posledica korolara 2.8;

(iii) ($\leftarrow$) Ako bi $T^{f_n}\cup\{\neg\phi\}$ i $T^{f_n}\cup\{\phi\}$ bile konsistentne teorije postojali bi, zbog 2.4, uslovi $p$ i $q$ takvi da $p\Vdash\neg\phi$ i $q\Vdash\phi$. Ako je $p\subset D_n(M)$ i $q\subset D_n(M')$ gde $M, M'\in\mu(T)$ onda za neko $N\in\mu(T)$ $M\rightarrow_n N$ i $M'\rightarrow_n N$. $p\cup q$ je stoga uslov koji forsira i $\phi$ i $\neg\phi$, kontradikcija.

($\rightarrow$) Neka su $\phi$ i $\psi$ $\Sigma_{n+1}$ rečenice jezika $L$ konsistentne sa $T$. Prema 3.4 postoje uslovi $p$ i $q$ koji forsiraju, respektivno, $\phi$ i $\psi$. Dakle $\varnothing\Vdash^w\phi$ i $\varnothing\Vdash^w\psi$. No tada postoji uslov $r$ koji forsira $\phi\&\psi$,a , ponovo prema 3.4, $\phi\&\psi$ je rečenica konsistentna sa $T$. Jasno $T$ onda ima svojstvo $n$-pridruženog utapanja;

(iv) Neka $\phi\in T^{f_n}\cap\Pi_{n+2}$ i $M\in E^n_T$. Kako je $T\cap\Pi_{n+1}=T^{f_n}\cap\Pi_{n+1}$ postoji model $N$ takav da $M\prec_n N\models T^{f_n}$. No onda i $M\prec_{n+1}N$ pa $M'\models\phi$.

S druge strane pretpostavka $\phi\in Th(E^n_T)\cap\Pi_{n+1}$ i $\phi\notin T^{f_n}$ vodi u kontradikciju (sledi egzistencija uslova koji forsira rečenicu i njenu negaciju; u dokazu se koristi 2.9 i 3.21);

(v) Prema (iv) i 3.23 $T^+=T^+\cap\Pi_{n+2}=Th(E^n_T)\cap\Pi_{n+2}=T^{f_n}\cap\Pi_{n+2}$. Kao $n$-modelski kompletna teorija $T^+$ ima svojstvo da za svaku formulu $\phi$ postoji $\Sigma_{n+1}$ foımula $\psi$ takva da $T^+\vdash\phi\leftrightarrow\psi$. Na osnovu gore datog to svojstvo ima i $T^{f_n}$, a s obzirom da su iste $\Sigma_{n+1}$ rečenice posledice i jedne i druge teorije $T^{f_n}=T^+$;

(vi) Neka je $M\in F^n_T$ ($M$ je kanonički jodel jezika $K$) i $M\prec_n M'$, $M'\in\mu(T\cap \cap\Pi_{n+1})$. Pretpostavimo da za neku $\Sigma_{n+1}$ rečenicu $\phi\equiv\exists\underset{\sim}{v}\psi(\underset{\sim}{v})$ jezika $K$ $M'\models\phi$ ali $M\models\neg\phi$. Onda za neko $p\subset D_n(M)$ $p\Vdash\forall\underset{\sim}{v}\neg\psi(\underset{\sim}{v})$. Kako $M'\models\psi(\underset{\sim}{d})$ (za neke konstante iz $C'$) $M'\models\& p\ \{\psi(\underset{\sim}{d})\}$ $Up$ je uslov, koji forsira i $\forall\underset{\sim}{v}\neg\psi(\underset{\sim}{v})$ i $\exists\underset{\sim}{v}\psi(\underset{\sim}{v})$ kontradikcija. Zato $M\prec_{n+1}M'$ i $M'\in E^n_T$.

§4. Definicije i teoreme u ovom paragrafu slede [6], predstavljaju njihova prirodna uopštenja-„transliranje za $n$"; dokaze ćemo stoga, kao i ranije, uglavnom izostavljati. Sve teorije i formule su definisane u jeziku $L$.

DEFINICIJA 4.1. *n-operator pridruženja je preslikavanje $(-)^*$ teorije $T$ u teoriju $T^*$, takvo da je za sve teorije $T$, $T_1$ ispunjeno:*

(i) $T\cap\Pi_{n+1}=T^*\cap\Pi_{n+1}$;

(ii) Ako $T\cap\Pi_{n+1}=T_1\cap\Pi_{n+1}$ *onda* $T^*=T_1^*$;

(iii) $T\cap\Pi_{n+2}\subseteq T^*$.

(0-*operator pridruženja zovemo operator pridruženja*).

LEMA 4.2. *Neka su $(-)^*$ i $(-)^+$ dva n-operatora pridruženja. Tada:*

(1) $(T^*)^+=T^+$;

(2) $T^*\cap\Pi_{n+2}=T^+\cap\Pi_{n+2}$.

*Dokaz:* (1) Prema (i) i (ii) definicije 4.1;

(2) $T^+ \cap \Pi_{n+2} \subseteq (T^+)^* = T^*$ zbog 4.1 (iii) i (1). Analogno $T^* \cap \Pi_{n+2} \subseteq T^+$.

TEOREMA 4.3. $(-)^{f_n}$ *je n-operator pridruženja.*

*Dokaz:* Videti 2.10 i 3.24 (ii), (iv).

TEOREMA 4.4. $(-)^{e_n}$ *je n-operator pridruženja, gde* $T^{e_n} = Th(E_T^n)$.

*Dokaz:* Uslov (i) definicije 4.1 je zadovoljen na osnovu 3.22 (i), takođe i (ii) (jer umesto o n-egzistencijalnom modelu teorije $T$ možemo govoriti o $n$-egzistencijalnom modelu klase $\mu(T \cap \Pi_{n+1})$). Konačno, ako je $M \in E_T^n$ onda za neko $N \in \mu(T)$ $M \prec_n N$ tj. $M \prec_{n+1} N$ pa $M \models T \cap \Pi_{n+2}$ te važi i uslov (iii).

DEFINICIJA 4.5. *Teorija $T$ je $(n$-$k)$-kompletna ako za svaku $\Pi_{n+k+1}$ formulu $\phi$, konsistentnu sa $T$, postoji $\Sigma_{n+1}$ formula $\theta$ konsistentna sa $T$ takva da $fv(\theta) \subseteq fv(\phi)$ i $T \vdash \theta \to \phi$.*

LEMA 4.6. *Iz $T \cap \Pi_{n+k+1} = T_1 \cap \Pi_{n+k+1}$ i $(n-k)$-kompletnosti teorije $T_1$ sledi $T \cap \Pi_{n+k+2} \subseteq T_1$.*

KOROLAR 4.7. *Za svako $k \in \omega$ važi: ako su $T$ i $T_1$ $(n$-$k)$-kompletne teorije i $T \cap \Pi_{n+1} = T_1 \cap \Pi_{n+1}$ onda $T \cap \Pi_{n+k+2} = T_1 \cap \Pi_{n+k+2}$.*

*Dokaz:* Indukcijom po $k$.

DEFINICIJA 4.8. *Teorija $T$ je $f_n$-kompletna ako za svaku formulu $\phi$ konsistentnu sa $T$, postoji $\Sigma_{n+1}$ formula $\theta$, konsistentna sa $T$ i takva da $fv(\theta) \subseteq fv(\phi)$ i $T \vdash \theta \to \phi$.*

KOROLAR 4.9. *Ako su $T$ i $T_1$ $f_n$-kompletne teorije i $T \cap \Pi_{n+1} = T_1 \cap \Pi_{n+1}$ tada $T = T_1$.*

TEOREMA 4.10. *Svakoj teoriji $T$ odgovara jedinstvena $f_n$-kompletna teorija $T^+$ takva da $T \cap \Pi_{n+1} = T^+ \cap \Pi_{n+1}$. Važi takođe $T^+ = T^{f_n}$.*

*Dokaz:* Preostalo nam je samo da pokažemo da je $T^{f_n}$ $f_n$-kompletna teorija. Neka je $\phi(v)$ formula konsistentna sa $T^{f_n}$. Onda nije $T^{f_n} \vdash \neg \exists \underset{\sim}{v} \phi(\underset{\sim}{v})$. Stoga za neko $p \in P(T, K, n)$ $p \Vdash \exists \underset{\sim}{v} \phi(\underset{\sim}{v})$. Prema 2.12 $T^{f_n} \vdash \forall \underset{\sim}{v} (\exists \underset{\sim}{u} \, \& \, p(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u}) \to \phi(\underset{\sim}{v}))$. $\exists \underset{\sim}{u} \, \& \, p(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u})$ je $\Sigma_{n+1}$ formula konsistentna sa $T$, pa prema tome i sa $T^{f_n}$.

KOROLAR 4.11. *Ako teorija $T$ ima n-modelsko pridruženje $T^*$ onda $T^{f_n} = T^*$.*

LEMA 4.12. *Za svako $k \in \omega$ i svaku teoriju $T$ postoji teorija $T^{(k)}$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $T \cap \Pi_{n+k+1} = T^{(k)} \cap \Pi_{n+k+1}$;

(ii) $T^{(k)}$ *ima* $\Pi_{n+k+2}$ *aksiomatizaciju;*

(iii) *Ako je $\phi$ $\Pi_{n+k+1}$ formula konsistentna sa $T^{(k)}$ onda postoji $\Sigma_{n+k+1}$ formula $\theta$ konsistentna sa $T^{(k)}$ i takva da $fv(\theta) \subseteq fv(\phi)$ i $T^{(k)} \vdash \theta \to \phi$.*

*Dokaz:* $T^{(k)}$ je teorija $\{\phi \mid \phi$ je $\Pi_{n+k+2}$ rečenica konsistentna sa $T$ i takva da je $((T \cap \Pi_{n+k+1}, \cup\{\phi\}) \cap \Pi_{n+k+1} = T \cap \Pi_{n+k+1}\}$.

LEMA 4.13. *Za datu teoriju T neka je* $T^{\circ} = T^{(\circ)}$, $T^{k+1} = (T^k)^{(k+1)}$. *Tada:*

(i) $T^k \cap \Pi_{n+k+2} = T^{k+1} \cap \Pi_{n+k+2}$;

(ii) $T^k$ *je* $\Pi_{n+k+2}$ *aksiomatizibilna teorija*;

(iii) $T^k \subseteq T^{k+1}$;

(iv) $T \cap \Pi_{n+1} = T^k \cap \Pi_{n+1}$;

(v) $T^k$ *je* $(n\text{-}k)$*-kompletna teorija.*

TEOREMA 4.14. $T^{f_n} = \bigcup_{k \in \omega} T^k$.

## LITERATURA


[1] K. J. Barwise, A. Robinson, *Completing Theories by Forcing*, Annals of Mathematical Logic-vol. 2 (1970), 119–142.

[2] J. Hirschfeld, W. H. Wheeler, *Forcing, Arithmetic, Division Rings*, Lecture Notes in Mathematics. 454, Springer-Verlag, 1975.

[3] H. J. Keisler, *Forcing and the Omitting Types Theorem*, Studies in Mathematics (ed. A. Morley), vol. 8, 96–133.

[4] Ž. D. Mijajlović, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, 1977.

[5] A. Robinson, *Forcing in Model Theory*, Proceedings of the Colloquium of Model Theory, Rome 1969, 69–82.

[6] H. Simmons, *Companion Theories (Forcing in Model Theory)*, Séminaire de Mathématique pure, Universite Catholique de Louvain, Louvain, 1975.


## A COMMENT ON FORCING

*Milan Grulovic*


SUMMARY

In the paper it is shown that all properties of Robinson's finite forcing are naturally transmitted to a forcing whose set of conditions has as its elements finite sets of $\Sigma_n$, $\Pi_n$ sentences of an extension of an original language (in wich the theory in question $T$ is defined) consistent with $T$. In fact we could speak of „a translation for $n$" of *fi* the results of nite forcing (let us put $n=0$ and there they are). So, for a given $n$, the coresponding forcing property determines an $n$-companion operator $(-)^{f_n}$ (definition 4.1) (the other such one is $(-)^{e_n}$ (4.4)). Theory $T^{f_n}$ (associated with theory $T$) is $f_n$-complete (4.10) and the class of generic structures (we call them $T-n$ finitely generic) consists of exactly those models $M$ of $T^{f_n}$ which „$n$-complete" $T^{f_n}$ (in other words from $M \prec_n N \models T^{f_n}$ follows $M \prec N$) (3.8) And, of course, if language $L$ is countable this class is axiomatizable if and only if $T^{f_n}$ is $n$-model complete (3.13). Furthermore, the $n$--model companion and $n$-model completion are defined in the only possible way. Certainly if $T$ has an $n$-companion operator $(-)^*$ it is unique and $T^* = Th(E_T^n) = T^{f_n}$ (3.23, 3.24). The construction of $T^{f_n}$ by standard model's theoretical means is a known usage of Henrard's approximation chains ([6]).

Thus an application of such a forcing property (for $n>0$) could be of interest (if at all) in cases of theories which are not $\Pi_2$ axiomatizable. Naturally on condition that we wish to have the given theory $T$ contained in the one associated with it and are ready to pay this by loosing the model completness of the class of finitely generic structures as well as some other „nice" properties of the $(-)^f$ operator.

In the text by $\Sigma_n$, $\Pi_n$ sentences we mean sentences logically equivalent to those which are $\Sigma_n$, $\Pi_n$ in the strong sense of definition (§0). However this is of no importance i. e. there would not be any restriction if we had remained with the „genuine" ones.

We used (without accepting them) the proofs of [1], [2], [5], [6] along with applying some well known model theoretical theorems as well as those of [3] which concern the general features of forcing properties (particularly 1.5); thus they are mostly either outliked or omitted.

In § 3, after 3.7, in order to obtain other results we limited the fragment $K_A$ to the set of sentences of the language $K=L(C)$ and in §4 all formulas and theories are defined in $L$.