Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

JEDAN NAČIN PREDSTAVLJANJA IZOTONIH BULOVIH FUNKCIJA NAD B_2

Ratko Tošić
Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku. 21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija.

U ovom radu posmatramo dvoelementnu Bulovu algebru (nad $\{0, 1\}$) i izotone Bulove funkcije nad tom algebrom. Elemente skupa B_2^n tj uređene n- torke nula i jedinica nazivaćemo n-dimenzionalnim *binarnim vektorima* ili prosto *vektorima*.

Za binarni vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i elementarnu konjunkciju $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ kažemo da su *međusobno odgovarajući* ako je $a_{i_1}=a_{i_2}=\ldots=a_{i_m}=1$ i $a_j=0$ za svako j koje ne pripada skupu $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$.

U skupu B_2^n posmatramo relaciju $\subseteq$ definisanu na sledeći način:

(1) $\quad (a_1, \ldots, a_n)\subseteq(b_1, \ldots, b_n)$ ako i samo ako je $a_i\leqslant b_i$ za svako $i=1, 2, \ldots, n$.

Ta relacija je relacija delimičnog uređenja u skupu n-dimenzionalnih binarnih vektora.

Za Bulovu funkciju $f: B_2^n\to B_2$ kažemo da je *izotona* ako $(a_1, \ldots, a_n)\subseteq$ $\subseteq(b_1, \ldots, b_n)$ povlači $f(a_1, \ldots, a_n)\leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$.

Za dve elementarne konjunkcije P i Q pišemo $P\geqslant Q$ ako i samo ako je $P=P\vee Q$. Tada je i $Q=PQ$.

LEMA. *Ako su P i Q elementarne konjunkcije odgovarajuće redom vektorima $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$, onda $(a_1, \ldots, a_n)\subseteq(b_1, \ldots, b_n)$ povlači $P\geqslant Q$.*

Dokaz. Neka je $a_{i_1}=\ldots=a_{i_m}=1$ i $a_j=0$ za svako j koje ne pripada skupu $\{i_1, \ldots, i_m\}$. Tada je $P=x_{i_1}\ldots x_{i_m}$. Na osnovu (1) je $b_{i_1}=\ldots=b_{i_m}=b_{i_{m+1}}=$ $=\ldots b_{i_{m+r}}=1$, za neko $r\geqslant 0$, dakle, $Q=x_{i_1}\ldots x_{i_m} x_{i_{m+1}}\ldots x_{i_{m+r}}=PR$, gde je $R=$ $=x_{i_{m+1}}\ldots x_{i_{m+r}}$ (za $r=0$ je $R=1$), te zbog $PR=P$, sledi da je $Q\leqslant P$.

Matricu čiji su svi elementi iz skupa B_2 nazivamo *binarnom* ili *Bulovom matricom*. Za binarnu matricu kažemo da je *M-matrica* ako i samo ako među vektor-vrstama te matrice nema međusobno uporedivih vektora u smislu relacije (1).

Sa L_f obeležavamo broj elementarnih konjunkcija u minimalnoj disjunktivnoj kanonskoj formi (MDKF) izotone Bulove funckije f tj. *dužinu* MDKF te funkcije. Za binarnu matricu F formata $L_f \cdot n$ i izotonu Bulovu funkciju $f: B_n^2 \to B_2$, kažemo da su *međusobno odgovarajuće* ako i samo ako su vrste matrice F n-dimenzionalni binarni vektori koji odgovaraju redom elementarnim konjunkcijama MDKF funkcije f.

TEOREMA. *Odgovarajuća matrica svake izotone Bulove funckije je neka M-matrica i, obrnuto, svaka M-matrica je odgovarajuća matrica neke izotone Bulove funkcije.*

Dokaz. Neka je $f: B_2^n \to B_2$ izotona Bulova funkcija. Ukoliko bi za neke dve vrste $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ njoj odgovarajuće matrice bilo $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \subseteq (b_1, \ldots, b_n)$ to bi značilo da njima odgovarajuće elementarne konjunkcije P i Q, na osnovu Leme, zadovoljavaju uslov $P \geqslant Q$. S druge strane, P i Q su uključeni u MDKF funkcije f a to je kontradikcija. Naime, nijedna disjunktivna kanonska forma koja sadrži istovremeno konjunkcije P i Q takve da je $P \geqslant Q$, ne može biti minimalna jer se može dalje minimizirati korišćenjem jednakosti $P \vee Q = P$ koja je ekvivalentna sa $P \geqslant Q$. Dakle, odgovarajuća matrica funkcije f ne sadrži ni jedan par uporedivih vrsta, što znači da je to M-matrica.

Obrnuto, neka je F binarna matrica formata $r \cdot n$. Formiramo odgovarajuće elementarne konjunkcije svakog vektora-vrste. Disjunkcija svih tih elementarnih konjunkcija je MDKF neke Bulove funkcije jer zbog neuporedivosti odgovarajućih vektora, neuporedive su međusobno i sve elementarne konjunkcije te disjunktivne kanonske forme, što znači da se ona dalje ne može skraćivati primenom zakona apsorpcije. Kako ta MDKF ne sadrži negirane promenljive, ona je MDKF neke izotone Bulove funkcije. Ovim je dokaz teoreme završen.

Za binarni n-dimenzionalni vektor kažemo da *ima nivo k* ili da je *k-tog nivoa* ako i samo ako među njegovim komponentama ima tačno k jedinica. Pod *profilom* izotone Bulove funkcije $f: B_2^n \to B_2$ podrazumevamo niz od Lf nenegativnih celih brojeva uređenih po veličini, u oznaci $]z_1, z_2, \ldots, z_{Lf}[$, gde su $z_1, z_2, \ldots, z_{Lf}$, redom nivoi vektora odgovarajućih elementarnim konjunkcijama MDKF funkcije f. Brojevi $z_1, z_2, \ldots, z_{Lf}$ su *komponente* profila.

Primeri: Profil izotone Bulove funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_1$ je $]1, 2, 2[$. Isti profil imaju i izotone Bulove funkcije $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2$. $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 \vee x_1 x_4 \vee x_5 x_4$ itd. Projekcije i samo one imaju profil $]\,1\,[$. Prirodno je uzeti da konstanta 0 ima profil dužine nula a profil konstante 1 je $]\,0\,[$.

Ako dve binarne matrice smatramo *ekvivalentnim* ukoliko se jedna iz druge mogu dobiti nekom permutacijom vrsta, onda na osnovu Teoreme sledi da se između skupa svih izotonih Bulovih funkcija $f: B_2^n \to B_2$ i skupa svih neekvivalentnih M-matrica može uspostaviti bijektivno preslikavanje, tj. ta dva skupa su iste kardinalnosti.

Ako su sve komponente profila izotone Bulove funkcije jednake istom broju k, kažemo da je f *homogena izotona Bulova funkcija k-tog nivoa.*

Na osnovu Teoreme, dobijamo sledeće posledice koje se odnose na broj funkcija pripadajućih nekim podklasama izotonih Bulovih funkcija.

POSLEDICA 1. *Broj homogenih izotonih Bulovih funkcija $f: B_2^n \to B_2$ k-tog nivoa jednak je $2^{\binom{n}{k}} - 1$.*

Dokaz. Među $\binom{n}{k}$ različitih n-dimenzionalnih vektora k-tog nivoa nema uporedivih, tj. bilo kojih m različitih n-dimenzionalnih vektora k-tog nivoa, $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{k}$, uzeti kao vrste binarne matrice, obrazuju M-matricu.

POSLEDICA 2. *Ukupan broj homogenih izotonih Bulovih funkcija od n promenljivih jednak je* $\sum_{k=0}^{n} 2^{\binom{n}{k}} - (n+1)$.

Dobijeni broj je veći od minorante za broj svih izotonih Bulovih funkcija od n promenljivih $-2^{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}$, koju je dao Hansel u [3].

POSLEDICA 3. *Broj izotonih Bulovih funkcija od n promenljivih profila* $]1, r[$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *jednak je* $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$.

Dokaz. Vektor prvog nivoa koji odgovara prvoj komponenti profila može se izabrati na n različitih načina. Vektor r-tog nivoa neuporediv sa već izabranim vektorom prvog nivoa može se izabrati na $\binom{n-1}{r-1}$ načina, odakle sledi tvrđenje.

POSLEDICA 4. *Broj izotonih Bulovih funkcija od n promenljivih za koje je* $L_f = 2$ *i* $z_1 = 1$, *jednak je* $n \cdot 2^{n-1}$.

Dokaz. Dobija se sumiranjem vrednosti iz Posledice 3, za $r = 1, 2, \ldots, n$.

REFERENCES

[1] A, Adám, *Truth functions*, Akademiai Kiadó, Budapest, 1968.

[2] K. Gilezan i B. Latinović, *Bulova algebra i primene*, Beograd, 1977.

[3] J. Hansel, *O čisle monotonnyh bulevyh funkcij n peremennyh*, Kibernetičeskij sbornik, vyp. 5. (1968), 53—57.

[4] S. Rudeanu, *Boolean functions and equations*, North-Holland, Amsterdam/London, 1974.

A WAY OF REPRESENTING ISOTONE BOOLEAN FUNCTIONS OVER B_2

Ratko Tošić

SUMMARY

The paper describes a way of representing of isotone Boolean functions over B_2. A class of binary matrices is used in order to characterize the entire class of isotone Boolean functions. It is proved that the matrix corresponding to an isotone Boolean function is an M-matrix and, conversely, that each M-matrix corresponds to an isotone Boolean function. The M-matrix is defined as a binary matrix of such a kind that any two of its rows are noncomparable vectors. The results are applied for counting the functions belonging to some subclasses of the class of isotone Boolean functions.