Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu
knjiga 12 (1982)
Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 12(1982)

О ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ к-ПОЛУСЕТЕЙ

Янез Ушан

Природно-математички факултет. Институт за математику
21000 Нови Сад, ул. др Илије Ђуричића 4, Југославија

РЭЗЮМЕ

к-Полусети |1| являются одним обобщением к-сетей |4-5|. В настоящей работе рассматривается один класс конечных к-полусетй и получается связь конечных аффиных пространств Спернера и к-полусетей принадлежающих одному подклассу рассматриваемого класса к-полусетей.

к-Полусети, описанные автором в |1|, являются одним обобщением к-сетей |4-5|. Как известно |4-5|, каждой к-сети соответствует ортогональная система квазигрупп, и наоборот. В |1| получена характеризация к-полусетей через ортогональные системы частичных квазигрупп (ОСЧК), принадлежающих одному подклассу класса ОСЧК. Конечные аффинные плоскости характеризованны через к-сети специального рода. Аффинные пространства Спернера (АПС) описанны Спернером в |2| (|3|, стр. 293-294). В настоящей работе рассматривается один класс к-полусетей и получается связь конечных аффиных пространств Спернера и к-полусетей принадлежащих одному подклассу рассматриваемого класса к-полусетей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. |1| Пусть T непустое множество и пусть непустое множество L множество некоторых подмножеств множества T. Множества $L_1,\ldots,L_k$, $k \in N\setminus\{1,2\}$, пусть разбивают множества L. Элементы множества T называются точками, элемент множества L прямыми. Множества $L_1,\ldots,L_k$ называются классами прямых $(T, L_1,\ldots,L_k)$ называется к-полусетю тогда и только тогда когда выполняются следующие условия.

М1. Пересечение каждых двух прямых принадлежающих различным классам L_i, L_j, $i, j \in \{1,\ldots,k\}$, является одноэлементным множеством или пустим множеством [1];

M2. Каждая точка из T находится в одной и только в одной прямой каждого класса L_i, $i \in \{1,\dots,к\}$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. 1.1. Учитывая M2, получаем что прямые принадлежающие одному и тому же классу L_i, $i \in \{1,\dots,к\}$, не пересекаютея, т.е. что их пересечение является пустым множеством.

1.2. Учитывая $к \in N \setminus \{1,2\}$ и M2, находим, что $|T| \geq 3$.

В настоящей работе рассматриваются только конечные к-полусети, т.е. к-полусети $(T, L_1, \dots, L_k)$ в которых T является конечным множеством.

$\mathbf{Max}\{|\ell| \,|\, \ell \in L\}$ называется Т-порядок, а $\mathbf{Max}\{|L_l| \; i \in \{1,\dots,к\}\}$ L-порядок к-полусети $(T, L_1, \dots, L_k)$ |1|; $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$. Справедливо:

ЛЕММА 1. |1| Т-порядок $\leq$ L-порядок.

Если в определении 1 вместо 1 берется

$\bar{M1}$. Пересечение каждых двух прямых принадлежающих различным классам L_i, L_j, $i,j \in \{1,\dots,к\}$, является одноэлементным множеством [2]

то $(T, L_1, \dots, L_k)$ станет к-сетью.

В настоящей работе рассматриваетея класс к-полусетей удовлетворяющих следующему условию:

M3. $(\forall \ell \in L) \, |\ell| = m \in N$

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Учитывая $к \in N \setminus \{1,2\}$ и M2, находим, что $m \in N \setminus \{1\}$. Отсюда, учитывая лемму 1, находим, что $q =$ L-порядок $\in N \setminus \{1\}$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть T непустое множество и пусть непустое множество L множество некоторых подмножеств множества T. Множества $L_1, \dots, L_k$, $k \in N \setminus \{1,2\}$, пусть разбывают множество L.

---

1) Удобнее: две прямые различных классов пересекаются не больше чем в одной точке.

2) Удобнее: две прямые различных классов пересекаюта в одной и только в одной точке.

Как в определении 1, пусть, элементы множества T называются точками, элементы множества L прямыми, а множества $L_1,\ldots,L_k$ классами прямых. Тогда имеет место:

1^0 Если система $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяет условиями М2 и М3, то $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяет и следующему условию:

М4. $|L_i| = |L_j| = q \in N\setminus\{1\}$ для любых $i,j\in\{1,\ldots,к\}$;

2^0 Существует система $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяющая условиям М2 и М3 и не удовлетворяюща условию М1;

3^0 Сущецтвует к-полусеть $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяющая М4 и не удовлетворяющая М3;

4^0 Если к-полусеть $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяет М3, то $m\le q$; и

5^0 Если к-полусеть $(T,L_1,\ldots,L_k)$ удовлетворяет условиям М3 и $m=q$, то $(T,L_1,\ldots,L_k)$ являетса к-сетью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая М2 и М3, находим, что имеет место следующие равенства

$$|T| = |L_i|\cdot m = |L_j|\cdot m$$

для любых $i,j\in\{1,\ldots,к\}$. Следовательно, имеет место М4.

Учитывая систему $(T,L_1,\ldots,L_k)$ на Рис. 1 (так же на Рис. 2, где $m=q$), находим, что имеет место 2^0.

Учитывая 3-полусеть на Рис. 3, находим, что имеет место 3^0.

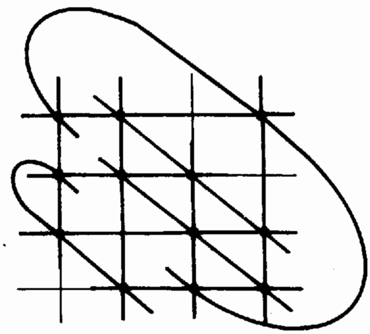

Рис. 1

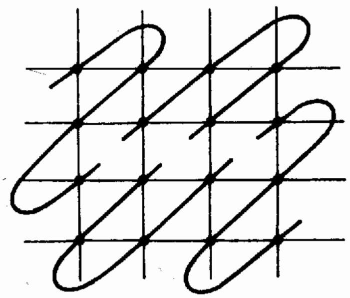

Рис. 2

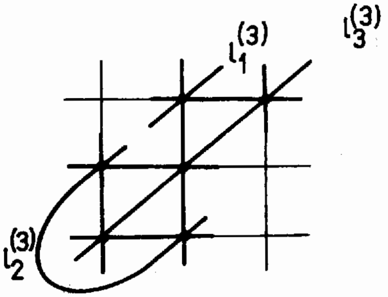

Рис. 3

В силу леммы 1 и 1°, так как m = T-порядок и q = L-порядок находим, что имеет место 4°.

Учитывая M1, M2 и факт что $|L_i| \in \mathbf{N}$, находим, что имеет место 5°.

Примеры к-полусетей удовлетворяющие M3 изображены на рисунках 4-8. 4-Полусеть на рисунке 4 является 4-сетю . На рисунках 5_1 и 5_2 изображена одна и та же 3-полусеть .

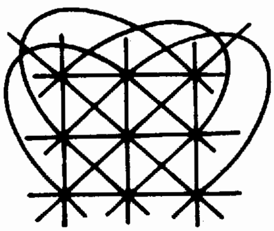

Рис. 4

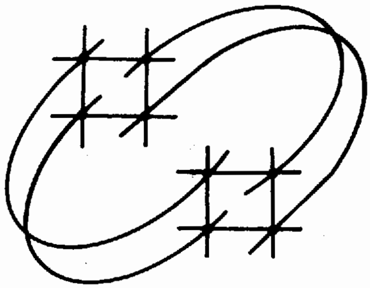

Рис. 5_1

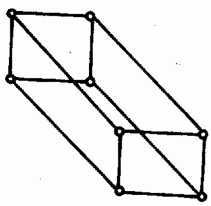

Рис. 5_2

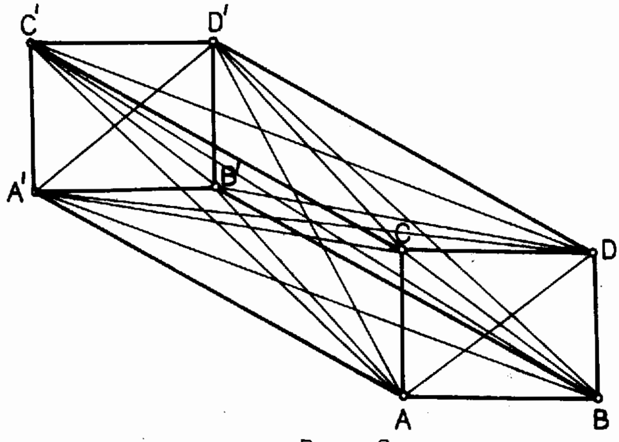

Рис. 6

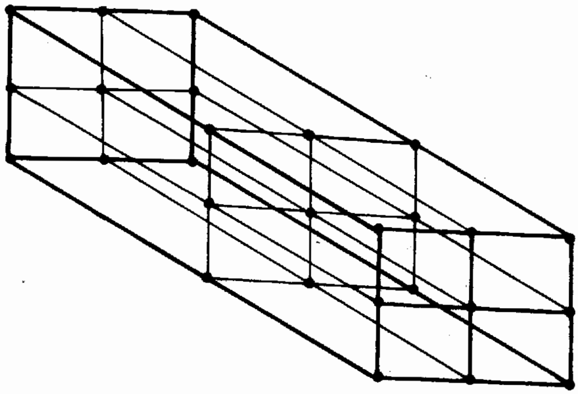

Рис. 7

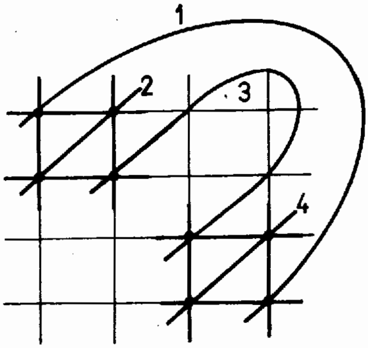

Рис. 8

	1	2	3	4
1	1	2		
2	2	3		
3			3	4
4			4	1

Рис. 9

ПРИМЕЧАНИЕ 3. 3-Полусеть на рисунке 8 принадлежит классу рассматриварных к-полусетей с параметрами $m = 2$ и $q = 4$. Одна из соответствующих частичных квазигрупп (|1|) изображена на рисунке 9. Так как упомянутая честичная квазигруппа не может быть погружена в квазигруппы $(\{1,2,3,4\},A)$, то имеет место следующее положение: существует 3-полусеть, обладающая свайством М3, имеющая L-парядок $= q \in N$ такая что не может быть погружена в 3-сеть порядка q.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(T, L_1, \dots, L_k)$ к-полусеть, имеющая L-порядок $=q$ и Т-порядок $=m$. Тогда, если в $(T, L_1, \dots, L_k)$ выполняется М3, то имеет место отношение

$$k \leq m\frac{q-1}{m-1} + 1 \quad ^{1)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая 1^o из утверждения 2 и Примечание 2, находим, что для рассматриваемой к-полусети имеет место:

а) В каждой прямой одно и то же число точек $m \in N \setminus \{1\}$;

б) В каждом классе L_i, $i \in \{1, \dots, к\}$, одно и то же число прямых $q \in N \setminus \{1\}$.

Пусть $T \in T$ в $\ell_1 \in L_i$. Пусть, далее, $\ell_2, \dots, \ell_q \in L_i \setminus \{\ell_1\}$. Учитывая М2, находим, что каждая из точек множества $\ell_2 \cup \dots \cup \ell_q$ в одной и только в одной из прямых $\ell_2, \dots, \ell_q$. Ввиду а) и б), следовательно, имеет место равенство

$$(1) \qquad |\ell_2 \cup \dots \cup \ell_q| = m(q-1).$$

Если $\bar{к}$ число всех прямых, за искючением прямой ℓ_1, проходящих через точку Т, то, на основании М2, имеет место равенство

$$(2) \qquad k = \bar{k} + 1.$$

Каждая из $\bar{к}$ упоманнутых прямых $\bar{\ell}_1, \dots, \bar{\ell}_{\bar{к}}$, за исключением точки Т, содржит $m-1$ точку. Так как $\bar{\ell}_1 \cap \dots \cap \bar{\ell}_{\bar{к}} = \{T\}$, учитывая М1, находим, что имеет место равенство

$$(3) \qquad |(\bar{\ell}_1 \cup \dots \cup \bar{\ell}_{\bar{к}}) \setminus \{T\}| = \bar{k}(m-1).$$

Так как $\ell_1 \cap \bar{\ell}_1 \cap \dots \cap \bar{\ell}_{\bar{к}} = \{T\}$ (М1), $\ell_1 \cap (\ell_2 \cup \dots \cup \ell_q) = \emptyset$ (М2) и $\ell_1 \cup \dots \cup \ell_q = T$(М2), то учитывая (1) и (3), находим, что имеет место следующее отношение:

$$(4) \qquad \bar{k}(m-1) \leq m(q-1) .$$

1) Если $m=q$, то $k \leq m\frac{q-1}{m-1}+1$ превращается в $k \leq q+1$ -известное отношение, справедливо в к-сетьях (|4-5|, 5^o из утверждения 2).

Следовательно, учитывая а) и (2), находим, что теорема доказана.

7-Полусеть, изображена на Рис. 6, является примером к-полусетей, в которой выполняются М3, $m < q$ и равенство $\kappa = m\frac{q-1}{m-1}+1$. (Множества $T, L_1, \ldots, L_7$, в том же проядке, являютса: $\{A,B,C,D,A',B',C',D'\}$, $\{AB$[1]$,CD,A',B',C'D'\}$, $\{AC,BD,A'C',B'D'\}$, $\{AA',BB',CC',DD'\}$, $\{AD,BC,A'D',B'C'\}$, $\{AC',A'C,BD',B'D\}$, $\{AB',A'B,CD',C'D\}$, $\{AD',A'D,CB',C'B\}$; на Рис.6, A,B,C,D,A',B',C',D' являются вершинами куба).

ПРИМЕЧАНИЕ 4. Только что рассматриваемая 7-полусеть построена, как уже упомянуто, на множестве T точек, являющихся вершинами куба (Рис. 6). Для построения этой 7-полусети использована 3-сеть парядка 2, которую "полагали" в стороны и диагональные плоскости куба.

ТЕОРЕМА 4. В к-полусети $(T, L_1, \ldots, L_k)$, удовлетвор - яющей М3, имеет место равенство $\kappa = m\frac{q-1}{m-1}+1$, тогда и только тогда когда любые две точки коллинеарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Longrightarrow$ (справедливо: $\kappa = m\frac{q-1}{m-1}+1$)

Пусть А и В , $A \neq B$, любые точки из T . В к-полусетях (как и в к-сетях), вообще говоря, не всакие две точки коллинеарны. Существует не больше чем один класс L_i такой что через А и В, $A \neq B$, проходит одна прямая из L_i (М1). Пусть L_i не является таким классом. (Ввиду $k \in N \setminus \{1,2\}$, такой класс существует.) Пусть, далее $A \in \ell_1 \in L_i$, $B \in \ell_2 \in L_i$ и $\ell_1 \neq \ell_2$; $L_i = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q\}$ (М2 и 1^0 из утверждения 2). $m(q-1)$ является числом точек, принадлежающих прямаиым $\ell_2, \ldots, \ell_q$ (Прим. 1 и М3). Учитывая М3, М1 и факт что $A \notin \ell_2, \ldots, \ell_q$, находим, что в прямых, проходящих через

1) $\{X,Y\}$ обозначаетс через XY.

точку А, за исключением прямой ℓ_1(в к-1 прямах), находится (к-1)(m-1) точек, принадлежащих сразу прямым $\ell_2,\dots,\ell_q$.Отсюда, предполагая что А и В, $A \neq B$, не являются коллинеарными, следует что

$$(k-1)(m-1) < m(q-1)$$

т.е. что

$$k < m\,\frac{q-1}{m-1} + 1.$$

Следовательно, любые две точки коллинеарны.

2) $\Longleftarrow$ (справедливо: любые две точки коллинеарны)

Пусть А любая точка из T . Пусть, далее, $A \in \ell_1 \in L_i$ (ввиду М2, любая точка из T в некоторой прямой). Отсюда, учитывая примечание 2, 1^o из утверждения 2 и примечание 1, находим, что существует в точности $q-1 \in \mathbb{N}$ прямых $\ell_2,\dots,\ell_q \in L_i$ таких что $A \notin \ell_2,\dots,\ell_q$.

Из М2 следует, что $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_q = T$. Учитывая примечание 1 и 1^o из утверждения 2, находим, что $|\ell_2 \cup \dots \cup \ell_q| = (q-1)m$,.

Через точку А проходит к-1 прямых, за исключением прямой ℓ_1. В каждой из этих прямых находится m-1 точек, отличающихся от А(М3). Таким образом, в этих прямых находится в точности (к-1)(m-1) точек, отличающихся от А и коллинеарных с точкой А. Кроме этых точек, за исключением точек прямой ℓ_1, коллинеарных с точкой А не существует; ввиду М1, точки из того множества не являются сразу точками прямой ℓ_1. Отсюда, так как А коллинеарна с любой из точек принадлежающих прямам $\ell_2,\dots,\ell_q$, находим, что имеет место:

$$\neg((k-1)(m-1) < m(q-1))$$

т.е.

$$(k-1)(m-1) \geq m(q-1)$$

т.е.

$$k \geq m\,\frac{q-1}{m-1} + 1\ .$$

Отсюда, учитывая Теорему 3, находим, что

$$k = m\,\frac{q-1}{m-1} + 1$$

В к-сетях не пересекаются только прямые, принадлежащие одному и тому же классу (М1). Прямые p_1 и p_2, принадлежающие одному и тому же классу, называются паралельными. Это отношение является РСТ отношением на множестве $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$. В к-полусетях, не являющихся к-сетями, существуют прямые p_1 и p_2, $p_1 \neq p_2$, не принадлежающие одному и тому же классу, такие что $p_1 \cap p_2 = \emptyset$. В к-полусетях, не являющихся к-сетями, не является справедливым положение: для любых $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$ из $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ и $\ell_2 \cap \ell_3 = \emptyset$ следует $\ell_1 \cap \ell_3 = \emptyset$ (см., на пример, Рис. 6). Но, если речь идет о прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, принадлежащих одному и тому же классу, то, только что упомянутое, положение справедливо, как и у к-сетях . Таким образом, вообще говоря, в к-полусетях, кроме отношения "паралельности прямых", можеть быть непустым и отношение "скрещивания прямых" на $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2_1. Пусть $(T, L_1, \ldots, L_k)$ любая к-полусеть. $p_1 \in L$ и $p_2 \in L$, скажем, паралельние тогда и только тогда когда являются прямими одного и того же класс L_i, $i \in \{1, \ldots, к\}$ $(p_1 \| p_2 \overset{def}{=\!=} p_1, p_2 \in L_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2_2. Пусть $(T, L_1, \ldots, L_k)$ любая к-полусеть. $p_1 \in L$ и $p_2 \in L$, скажем, в отношении скрещивания тогда и только тогда когда $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ и $p_1 \nparallel p_2$.

ЛЕММА 5. Пусть $(T, L_1, \ldots, L_k)$ к-полусеть, удовлетворяющая условиям М3 и $k = m\frac{q-1}{m-1} + 1$. Тогда имеет место:

а) Если А и В, $A \neq B$, любые точки из T, то существует одна и только одна прямая p такая что $A \in p$ и $B \in p$;

б) Все прямые имеют одно и то же число точек;

в) Отношение паралельности является РСТ отношением на множестве $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$;

г) $(\forall A \in T)(\forall p \in L)(\exists! p' \in L)(p' \| p \wedge A \in p')$

д) Пусть $A \in T$, $p \in L$ и $A \notin p$. Тогда существует в точности $k-(m+1)$ прямых, проходящих через точку А, являющихся в отношении скрещивания с p[1]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО $\bar{а}$) Учитывая Теорему 4, находим, что любые $A, B \in T$, $A \neq B$, являются коллинеарными. Отсюда, ввиду М1, получаем, что имеет место а).

$\bar{б}$) Положение б) является условием М3.

$\bar{в}$) Множество $\{L_1, \ldots, L_k\}$ является разбиением множества $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$ (Определение 1). Отсюда, на основании Определения 2_1, находим, что имеет место в).

$\bar{г}$) Пусть $\ell \in L_i$. Ввиду М2, через каждую точку А проходит одна и только одна $\ell' \in L_i$. Отсюда, учитывия определение 2_1, получаем. что имеет место г).

$\bar{д}$) Пусть $\ell \in L$ и $A \notin \ell$ (см. примечание 2). Через А проходит к и только к прямых (из каждого класса в точности одна-М2). На основании г), одна из этих прямых паралельна с ℓ. На основаним Теоремы 4, m прямых пересекается с прямой ℓ. Следовательно, положение д) имеет место.

к-Полусети $(T, L_1, \ldots, L_k)$, в которых имеет место М3 и равенство $k = m\,\frac{q-1}{m-1} + 1$, находятся в самой близкой связи с аффинными пространствами Спернера (АПС). (Если $m = q$, то речь идет о к-сетях, в которых имеет место равенство $k = q + 1$, и они характеризуют аффинные плоскоси; 5^0 из Утверждения 2, |4-5|).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. |2|[2] Пусть T непустое конечное множество, а непустов множество L пусть множество некоторых подмножеств множества T. Элементи множества T называются точками, а элементи множества L прямыми. (T, L) называется аффинным пространством Спернера (АПС), тогда и только тогда когда справедливо:

S1. Если А и В, $A \neq B$, любые точки из T, то существует одна и только одна прямая p такая что $A \in p$ и $B \in p$;

---

1) Если $m = q$, то $(T, L_1, \ldots, L_k)$ к-сеть (5^0 из утверждения 2), в которой справедливо $k = q+1$, и тогда $k-(m+1) = 0$.

2) |3|, стр. 293-294.

S2. Все прямые имеют одно и то же число точек;

S3. Отношение паралельности ($||$) является РСТ отношением на множестве L ; и

S4. $(\forall A \in T)(\forall p \in L)(\exists! p' \in L)(p' || p \wedge A \in p')$ [1)]

Учитывая а) - г) из леммы 5 и определение 3, находим, что имеет место:

ТЕОРЕМА 6. Каждой к-полусети $(T, L_1, \ldots, L_k)$, в которой имеет место М3 и равенство $k = m\frac{q-1}{m-1} + 1$, соответствует аффинное пространство Спернера (T,L) где $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$.

Пусть T непустое множество. Система $(T,\{T\})$ удовлетворяет условиям S1 - S4. Такая система обладает только одной прямай. Удобно ее назвать тривиалым АПС.

Число точек в прямых у нетривиальных АПС больше двух или равно двум $(m \geq 2)$. Предположение что справедливо противоположное $(m = 1)$, именно, ввиду S1, влечет в контрадикцию с S3.

Паралельные прямые в АПС или совпадают или имеют пустое пресечение (S3 - Р, S4). Отсюда ввиду $m \geq 2$, получаем, что у нетривиальных АПС сущецтвуют по меньшей мере три попарно непаралельные прямые.

Отсюда, далее, получаем, что $|L/||\,| \geq 3$. Положим: $L/|| = \{L_1, \ldots, L_k\}$; $k \in N \setminus \{1,2\}$.

В связи с каждым нетривиальным АПС (T,L), именно, можно рассматривать систему $(L, L_1, \ldots, L_k)$, где $\{L_1, \ldots, L_k\} = L/||$ и $k \in N \setminus \{1,2\}$.

На основании S1, получаем, что в только что построенной системе $(T, L_1, \ldots, L_k)$ справедливо М1. Из S1, именно, следует

$$|p_1 \cap p_2| > 1 \Longrightarrow p_1 = p_2$$

что является эквивалентным с

$$p_1 \neq p_2 \Longrightarrow |p_1 \cap p_2| \leq 1.$$

Далее, на основании S4, получаем, что в $(T, L_1, \ldots, L_k)$ справедливо М2. Именно: 1^0 если $A \in p \in L_i$, то, на основании S4,

---

1) В |3| использовано отношение инцидентности.

p является однозначно определенной прямой, паралельной с p; и 2^0 если $A \notin p \in L_1$, то, на основании S4, существует одна и только одна p', такая что $p' \| p$ и $A \in p'$.

M3 совпадает с S2.

Из S1 следует, что каждая пара точек в $(T, L_1, \ldots, L_k)$ является коллинеарной.

Отсюда, учитывая Теорему 4, находим, что имеет место:

ТЕОРЕМА 7. Каждому конечному нетривиальному АПС (T, L) соответствует к-полусеть $(T, L_1, \ldots, L_k)$, $\{L_1, \ldots, L_k\} = L/\|$, в которой имеет место M3 и равенство $k = m\frac{q-1}{m-1} + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

|1| Ušan J., K-Seminets, Mat. Bilten, Skopje, 1(XXVII), 1977 41-46.

|2| Sperner E., Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische structuren, J. Reine und angew. Math., 1960, 204, S. 205-215.

|3| Картеси Ф., Введение в конечные геометрии, Москва, "Наука" 1980.

|4| Белоусов В.Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, "Штиинца", 1971.

|5| Dénes J. and Keedwell, A.D., Latin Squares and their Applications, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

Received by the editors June 27,1983.

REZIME

O JEDNOJ KLASI KONAČNIH k-POLUREŠETAKA

k-Polurešetke (|1|) predstavljaju jedno uopštenje k-rešetaka (|4-5|). Svakoj k-rešetki odgovara ortogonalni sistem kvazigrupa, i obrnuto. U |1| je pokazano da svakoj k-polurešetki odgovara regularno ortogonalni sistem regularnih parcijalnih kvazigrupa, i obrnuto. Specijalne k-rešetke karakterišu konačne afine ravni |4-5|. U ovom radu se razmatra jedna klasa konačnih k-polurešetaka i nalazi veza izmedju jedne njene podklase i afinih prostora Spernera.