ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 15,2 (1985)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 15, 2 (1985)

ОБ ОТНОШЕНИЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ В к-ПОЛУСЕТЯХ

Янез Ушан

Природно-математички факултет, Институт за математику, 21000 Нови Сад, др Илије Ђуричића 4, Југославија

РЕЗЮМЕ

к-Полусети, описанные автором в [1], являются одним из обобщений к-сетей [5-6]. к-Полусети весьма тесно связаны со специальными ортогональными системами частичных квазигрупп [1], со специальными кодами [7-11] и с r-дизайнами [12]. В [4] получена характеризация к-полусетей $(T, \{L_1,\dots,L_к\})$ с помощью объектов типа $(T,L,\parallel)$, где $T \neq \emptyset$, $L \subseteq P(T)\setminus\{\phi\}$, $\parallel \subset L^2$, а $\parallel$ удовлетворяет "условию евклидовой параллельности". В настоящей работе показано, что для любой к-полусети $(T,L,\parallel)$ существует отношение эквивалентности $\parallel_L$ на L, $\parallel_L \neq L^2$, удовлетворяющее "условию типа неевклидовой параллельности". Также показано, что существуют объекти $(T,L,\sim)$, $\sim \neq L^2$, в которых $\sim$ является отношением эквивалентности на L, удовлетворяющим "условию типа неевклидовой параллельности", справедливы все аксиомы к-полусетей, относящиеся только к объекту (T,L), но не существует отношение эквивалентности $\parallel$ на , удовлетворяющее "условию евклидовой параллельности"

AMS Mathematics subject classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: k-seminets

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [1] Пусть T непустое множество и пусть непустое множество L множество некоторых непустых подмножеств множества T. Пусть множества $L_1,\dots,L_k$, $k \in N\setminus\{1,2\}$, разбивают множество L. Элементы множества T называются точками, элементы множества L прямыми. Множества $L_1,\dots,L_k$ называются классами прямых. $(T,\{L_1,\dots,L_k\})$ называется к-полусетю тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

М1. Пересечение каждых двух прямых, принадлежащих различным классам L_i, L_j, $i,j \in \{1,\dots,к\}$, является одноэлементным множеством или пустым множеством [1)]; и

М2. Каждая точка из T находится в одной и только в одной прямой каждого класса L_i, $i \in \{1,\dots,к\}$.

Каждая к-сеть $(T,\{L_1,\dots,L_к\}$ [5-6] является к-полусетью [1-2,4].

В [4] получена характеризация к-полусетей $(T\{L_1,\dots$ $\dots,L_к\})$ с помощью объектов типа $(T,L,\parallel)$, где $T \neq \emptyset$, $L \subseteq P(T)\setminus\{\emptyset\}$, $\parallel \subseteq L^2$, а удоволетворяет "условию евклидовой параллельности". В самом деле справедливо:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. [4] Пусть T непустое множество точек, и пусть непустое множество прямых L множество некоторых подмножеств множества T. Пусть, далее, $\parallel$ бинарное отношение на множестве L, позволим себе назвать его отношением параллельности. Тогда имеет место: если в объекте $(T,L,\parallel)$ справедливо:

ПС1. Через каждую точку проходит к и только к прямых, $к \in N\setminus\{1,2\}$;

ПС2. Через любые две различные точки проходит не

---

1) удобнее: две прямые различных классов пересекаются не больше, чем в одной точке.

более одной прямой;

ПС3. Отношение параллельности $\|$ является отношением эквивалентности; и

ПС4. $(\forall A \in \mathcal{T})(\forall p \in \mathcal{L})(\exists! p' \in \mathcal{L})(p' \| p \wedge A \in p')$;

тогда $\mathcal{L}/\|$ является к-элементным множеством $\{L_1, \ldots, L_к\}$, а $(\mathcal{T}, \{L_1, \ldots, L_к\})$ к-полусетью. И обратно: если $(\mathcal{T}, \{L_1, \ldots, L_к\})$ является к-полусетью и $\mathcal{L}/\| = \{L_1, \ldots, L_к\}$, тогда в объекте $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \|)$ справедливо ПС1 - ПС4.

Ввиду утверждения 1, имеет смысл объект $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \|)$, удовлетворяющий условиям ПС1-ПС4, считать к-полусетью. Во всех аксиомах из определения 1 (М1,М2) неявно присутствует отношение параллельности $\|$, так как $\mathcal{L}/\| = \{L_1, \ldots, L_k\}$. В ПС1-ПС4 отношение параллельности присутствует только в ПС3-ПС4.

Имеет место:

ТЕОРЕМА 2. Если $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \|)$ к-полусеть и $к \geqslant 4$, тогда существует по меньшей мере одно отношение эквивалентности $\|_L \neq \mathcal{L}^2$, удовлетворяющее условию:

ПС4 . Пусть A любая точка и пусть ℓ любая прямая. Тогда существуют по меньшей мере две различные прямые ℓ' и ℓ'' такие, что справедливо:

$$\ell' \|_L \ell \wedge \ell'' \|_L \wedge A \in \ell' \wedge A \in \ell''$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$|\mathcal{L}/\|| = |\{L_1, \ldots, L_k\}| \geqslant 4,$$

для $к = 2t$, $t \in N$, например, множество

(1) $$\{L_{2i-1} \cup L_{2i} \mid, i \in \{1, \ldots, \tfrac{k}{2}\}\}$$

является одним из разбиений множества $\mathcal{L}$, обладающего по меньшей мере двумя элементами. Для $к = 2t + 1$, $t \in N$, разбиением множества $\mathcal{L}$, обладающего по меньшей мере двумя элементами, является, например, следующее множество:

$$(\bar{1}) \qquad \{L_{2i-1} \cup L_{2i} \mid i \in \{1,\dots,\frac{k-3}{2}\}\} \cup \{L_{k-2} \cup L_{k-1} \cup L_k\} .$$

Так как построенные разбиения множества L обладают по меньшей мере двумя элементами, то соответствующие отношения эквивалентности, определенные через $L/\| = (1)$ $(=(\bar{1}))$, не являются множеством L^2. Отсюда, учитывая М2, получаем, что построенные отношения эквивалентности $\|_L$ удовлетворяют условию ПС4$_L$. Теорма доказана.

Попутно мы доказали и следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $(T, L, \|)$ к-полусеть и $к = 2t \neq 2$, то существует по меньшей мере одно отношение эквивалентности $\|_L \neq L^2$, удовлетворяющее условию:

$$\text{ПС4}'_L \qquad (\forall A \in T)(\forall \ell \in S)(\exists! \ell' \in S)(\exists! \ell'' \in S)(\ell' \neq \ell'' \wedge$$
$$\wedge\ \ell' \|_L \ell \wedge \ell'' \|_L \ell \wedge A \in \ell' \wedge A \in \ell'')^{1)}$$

По известной причине, имеет смысл отношение $\|_L$ считать неевклидовой параллельностю.

Справедливо и следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Существуют объекты $(T, L, \|_L)$, $\|_L \neq L^2$, $L \subseteq P(T) \setminus \{\phi\}$ удовлетворяющие условиям ПС1-ПС3, ПС4$_L$, такие.что не существует отношение эквивалентности $\sim$ на L, удовлетворяющее условию ПС4, т.е. условию

$$(\forall A \in T)(\forall \ell \in L)(\exists! \ell' \in L)(\ell' \sim \ell \wedge A \in \ell') .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$T = \{1,2,3,4,5,6\}$, и

пусть

$L = \{\ell_i \mid i \in \{1,\dots,15\}\}$,

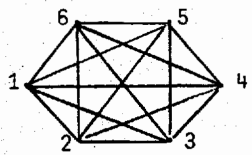

Рис. 1.

где множества

ℓ_i , $i \in \{1,\dots,15\}$, определены следующим образом:

$\ell_1 = \{1,2\}$, $\quad \ell_2 = \{6,3\}$, $\quad \ell_3 = \{5,4\}$,

---

1) частный случай условия ПС4$_L$

$\ell_4 = \{1,6\}$, $\ell_5 = \{2,5\}$, $\ell_6 = \{3,4\}$,

$\ell_7 = \{2,3\}$, $\ell_8 = \{1,4\}$, $\ell_9 = \{6,5\}$,

$\ell_{10} = \{1,5\}$, $\ell_{11} = \{2,4\}$, $\ell_{12} = \{3,5\}$,

$\ell_{13} = \{2,6\}$, $\ell_{14} = \{1,3\}$, $\ell_{15} = \{4,6\}$; см. и Рис. 1.

Построенный объект (T,L) удовлетворяет условиям ПС1-ПС2, где к=5. Поэтому, если только что построенный объект (T,L) можно растянуть в к-полусеть $(T,L,\|)$, то к=5. Предположим, что существует такая 5-полусеть, т.е. что существует 5-полусеть $(T,\{L_1,\dots,L_5\})$, где $\{L_1,\dots,L_5\} = L/\|$. Так как прямые ℓ_i, $i \in \{1,\dots,15\}$, имеют одно и то же число точек (=2), то, если речь идет о 5-полусети, обязательно все классы L_i, $i \in \{1,\dots,5\}$, обладают одним и тем же числом прямых [2,12]-$|L|$:к=15:5=3. Притом, прямые из одного и того же классе не пересекаются [2]. Таких классов у нас только 3: $\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$, $\{\ell_4,\ell_5,\ell_6\}$ и $\{\ell_7,\ell_8,\ell_9\}$. Построенный объект (T,L), таким образом, не может быть растянут в к-полусеть $(T,L,\|)$.

Кроме этого, в только что построенном объекте (T,L) существует отношение эквивалентности $\|_L \neq L^2$, удовлетворяющее условию ПС4 . Например, множество

$$\{\{\ell_i | i \in \{1,\dots,6\}\}, \{\ell_i | i \in \{7,\dots,15\}\}\}$$

является двухэлементным разбиением множества L, и $\|_L$, определенным равенством

$$L/\|_L = \{\{\ell_i | i \in \{1,\dots,6\}\}, \{\ell_i | i \in \{1,\dots,15\}\}\}$$

удовлетворяет условию ПС4$_L$. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ušan J., k-seminets, Mat. Bilten, Skopje, 1(XXVII), 1977 41-46.

[2] Ушан Я., О одном классе конечных k-полусетей, Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Vol. 12(1982), 387-398.

[3] Ušan J., A construction of special k-seminets, Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Vol. 14, 1(1984), 109-115.

[4] Ušan J., On k-seminets, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Vol. 15-1(1986).

[5] Белоусов В.Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, "Штиинца", 1971.

[6] Dénes J.and Keedwell A.D., Latin Squares and Their Application, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

[7] Dénes J., Gergely E., Groupoids and codes, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 16. Topics in Information Theory, Keszthely (Hungary), 1975, 155-162.

[8] Ušan J., Stojaković Z., Orthogonal Systems of Partial Operations, Zbornik radova PMF u Novom Sadu 8, 1978, 47-51.

[9] Ушан Я., Тошин Р., Сурла Д., Один способ построения ортогональных систем латинских прямоугольников, кодов и к-семисетей, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, 9 (1979), 191-197.

[10] Ушан Я., Стоякович З., D-польные ортогональные системы частичных квазигрупп, Zbornik radova PMF u Novom Sadu, 9(1979), 175-184.

[11] Ušan J., Stojaković Z., Partial Quasigroups, Proc. of Algebraic Conference, Skopje, (1980), 73-85.

[12] Bonisoli A., Deza M., Orthogonal Permutation Arrays and related Structures, Acta Universitatis Carolinae-mathematica et physica, Vol. 24, No 2, (1983), 23-38.

REZIME

O RELACIJAMA PARALELNOSTI U k-SEMIREŠETKAMA

k-semirešetke $(T,\{L_1,\dots,L_k\})$ su uvedene u [1] kao jedna generalizacija k-rešetaka [5-6]. U tesnoj su vezi sa specijalnim ortogonalnim sistemima parcijalnih kvazigrupa [1], sa specijalnim kodovima [7-11], kao i sa r-dizajnima [12]. U [4] se nalazi jedna karakterizacija k-semirešetaka pomoću objekata tipa $(T, L, \|)$, gde je $T \neq \emptyset, L \subseteq P(T)\setminus\{\emptyset\}, \| \subseteq L^2$ a $\|$ zadovoljava "iskaz o euklidskoj paralelnosti". U ovom radu je pokazano da uz svaku k-semirešetku $(T, L, \|)$ pri $k \geq 4$ postoji bar jedna relacija ekvivalencije $\|_L$ na L, $\|_L \neq L^2$, takva da zadovoljava "iskaz tipa o neeuklidskoj paralelnosti". Takodje je pokazano da postoje objekti $(T, L, \sim)$, $\sim \neq L^2$, u kojima je $\sim$ relacija ekvivalencije na L koja zadovoljava "iskaz tipa o neeuklidskoj paralelnosti", važe sve aksiome k-semirešetaka koje se odnose na (T, L), ali ne postoji relacija ekvivalencije $\|$ na L takva da zadovoljava "iskaz tipa o euklidskoj paralelnosti".

Received by the editors September 19, 1985.