ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 17,1(1987)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 17,1(1987)

О ОДНОМ КЛАССЕ A_t^m-3-КВАЗИГРУПП

Янез Ушан

University of Novi Sad, Faculty of Science,
Institute of Mathematics, Dr. I. Djuričića 4,
21000 Novi Sad, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В [1] введены понятия A_t^3- и A_t^4-алгебр. В [2] дано такое определение A_t^m-квазигруппы (A_t^m-алгебры), что A_t^3- и A_t^4--алгебры оказываются ее частными случаями. В [3] введено понятие A_t-квазигруппы как одно обобщение понятия A_t^m-квазигруппы. A_t- и A_t^m-3-квазигруппы введены в [4]. В том же порядке, оны являются обобщениями A_t- и A_t^m-квазигрупп. В настоящей работе рассматриваются 3-квазигруппы $(\mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}}, B)$, где $B((x_1^2),(y_1^2),(z_1^2)) \overset{\text{def}}{=} (A(x_1,y_1,z_1),\bar{A}(x_2,y_2,z_2))$, а $(\mathfrak{T},A)$ и $(\bar{\mathfrak{T}},\bar{A})$ являются, в том же порядке, A_t^m- и A_t^m-3-квазигруппы.

☆

Определение 1. [4]. 3-квазигруппа $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$, является A_t^m-3-квазигруппой тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>A1</u> $(\forall a \in \mathfrak{T})(\forall b \in \mathfrak{T})A({}^{i-1}a,b,{}^{3-i}a) = b$ для каждого

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: A_t^m-3-quasigroups, A_t-quasigroups, A_t^m-quasigroups.

$i \in \{1,2,3\}$[1]; и

A2 $(\forall a \in \mathfrak{T})(\forall b \in \mathfrak{T})(\forall c \in \mathfrak{T})(|\{a,b,c\}| = 3 \Rightarrow |[a,b,c]| = m)$, где $m \in N \setminus \{1,2,3\}$ является фиксированным элементом.

Утверждение 1. [4] Пусть $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, является A_t^m-3-квазигруппой. Тогда имеет место:

(а) Каждую 3-квазигруппу $([a,b,c],A)$ порождает любая тройка попарно различных элементов множества $[a,b,c]$[2];

(б) $|\{a,b,c\}| = 3 \wedge |\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}| = 3 \wedge [a,b,c] \neq [\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \Rightarrow |[a,b,c] \cap [\bar{a},\bar{b},\bar{c}]| \leq 2$ для любых $a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in \mathfrak{T}$; и

(ц) (а) $\Leftrightarrow$ (б).

☆ ☆

Теорема 2. Пусть $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, A_m^m-3-квазигруппа. Пусть, далее, для любых $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma, \in \mathfrak{T}$ удовлетворяющих условию $|\{a,b,c\}| = |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3$ существует автоморфизм f A_m^m-3-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$ такой, что имеет место:

(0) $$fa = \alpha, \quad fb = \beta \text{ и } fc = \gamma.$$

Тогда $(\mathfrak{T}^2,B)$, где

(1) $$B((x_1^2),(y_1^2),(z_1^2)) \overset{\text{дэф}}{=} (A(x_1,y_1,z_1),A(x_2,y_2,z_2))$$

для любых $(x_1^2),(y_1^2),(z_1^2) \in \mathfrak{T}^2$, 3-квазигруппа удовлетворяющая условию A1 такая, что имеет место:

---

[1] каждый $a \in \mathfrak{T}$ является единицей 3-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$.

[2] т.е., каждая 3-квазигруппа $([a,b,c],A)$, $|\{a,b,c\}| = 3$, является A_m^m-3-квазигруппой.

1° если $|\{a,b,c\}| = |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3$, тогда $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является A_m^m-3-квазигруппой;

2° если $|\{a,b,c\}| = 1(=3)$ и $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3(=1)$ тогда $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является A_m^m-3-квазигруппой;

3° если $|\{(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)\}| = 3$ и $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = |\{a,b,c\}| = 2$, тогда $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является A_4^4-3-квазигруппой;

4_1° если $|\{a,b,c\}| = 2(=3)$, $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3(=2)$ и $m = 4$, тогда $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является A_4^4-3-квазигруппой; и

4_2° если $|\{a,b,c\}| = 2(=3)$, $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3(=2)$ и $m > 4$, тогда $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ не является A_k^k-3-квазигруппой.

Доказательство.

0) Учитывая определение операции B в $\mathfrak{T}^2$,[1] непосредственно получаем, что $(\mathfrak{T}^2,B)$ является 3-квазигруппой удовлетворяющей условию A1.

1) Пусть

$$|\{a,b,c\}| = |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3.$$

Тогда в конъюнкции

$$\bigwedge \begin{array}{l} a \neq b \vee \alpha \neq \beta \\ a \neq c \vee \alpha \neq \gamma \\ b \neq c \vee \beta \neq \gamma \end{array}$$

эквивалентной с конъюнкцией

$$(a,\alpha) \neq (b,\beta) \wedge (a,\alpha) \neq (c,\gamma) \wedge (b,\beta) \neq (c,\gamma),$$

все высказывания $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$ истинние.

Координаты любого элемента

$$(d,\delta) \in [(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)]$$

---

[1] (1).

являются A-произведениями:

$$\pi(a,b,c) \text{ и } \pi(\alpha,\beta,\gamma).$$

Отсюда, учитывая предположение, что существует автоморфизм f удовлетворяющий (0) A_m^m-3-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$, находим, что имеет место:

$$d = \pi(a,b,c) \quad \text{и} \quad \delta = \pi(fa,fb,fc) = f\pi(a,b,c),$$

т.е., что имеет место

$$\delta = fd; \qquad d \in \mathfrak{T}.$$

Таким образом, имеет место:

$$[(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)] = \{(d,fd) \mid d \in \mathfrak{T}\}$$

Отсюда, так как f подстановка множества $\mathfrak{T}$, а $a,b,c \in \mathfrak{T}$ тройка порождающих элементов A_m^m-3-квазигруппы, находим, что имеет место:

а) $|[(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)]| = m$; и

б) если $(x,y), (u,v) \in [(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)]$ и $(x,y) \neq (u,v)$, то $x \neq u$ и $y \neq v$.

Далее, учитывая 0), находим что имеет место:

ц) $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является 3-квазигруппой удовлетворяющей условию A1.

Пусть $(\bar{a},\bar{\alpha})$, $(\bar{b},\bar{\beta})$, $(\bar{c},\bar{\gamma})$ любые попарно различные элементы множества $[(a,\alpha)\ (b,\beta)\ (c,\gamma)]$. Отсюда, ввиду б), находим, что имеет место:

$$|\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}| = |\{\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\}| = 3.$$

Таким образом [1], имеет место:

---

[1] для любых $x,y,z,u,v,w \in \mathfrak{T}$ удовлетворяющих условию $|\{x,y,z\}| = |\{u,v,w\}| = 3$ существует автоморфизм F A_m^m-3-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$ такой, что $Fx = u$, $Fy = v$, $Fz = w$.

$$|[(\bar{a},\bar{\alpha});(\bar{b},\bar{\beta});(\bar{c},\bar{\gamma})]| = m.$$

Отсюда, так как имеет место импликация

$$(\bar{a},\bar{\alpha}),(\bar{b},\bar{\beta}),(\bar{c},\bar{\gamma}) \in [(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\bar{a},\bar{\alpha});(\bar{b},\bar{\beta});(\bar{c},\bar{\gamma})] \subseteq [(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],$$

учитывая а), находим, что

$$[(\bar{a},\bar{\alpha});(\bar{b},\bar{\beta});(\bar{c},\bar{\gamma})] = [(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],$$

т.е., ввиду ц), что $([(a,\alpha);(b,\beta);(c,\gamma)],B)$ является A_m^m-3-квазигруппой.

2) Пусть $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathfrak{T}$ любые элементы удовлетворяющие условию:

$$c = b = a \quad \text{и} \quad |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3.$$

Пусть, далее,

$$\varphi(a,x) \overset{\text{деф}}{=} x, \quad x \in \mathfrak{T};$$

где $a \in \mathfrak{T}$ является фиксированным элементом. Очевидно, что φ является биекцией множества $\{(a,x) \mid x \in \mathfrak{T}\}$ на множество $\mathfrak{T}$. Учитывая (1), ввиду А1, находим, что имеет место равенство:

$$B((a,x);(a,y);(a,z)) = (a,A(x,y,z))$$

для любых $x,y,z \in \mathfrak{T}$. Отсюда, ввиду определения отображения φ, находим, что справедливо:

$$\varphi B((a,x);(a,y);(a,z)) = A(\varphi(a,x);\varphi(a,y);\varphi(a,z))$$

для любых $(a,x),(a,y),(a,z) \in \{(a,\xi) \mid \xi \in \mathfrak{T}\}$, т.е.,что

$([(a,\alpha);(a,\beta);(a,\gamma)],B)$ и $(\mathfrak{T},A)$ являются изоморфными. Мы доказали, что $([(a,\alpha);(a,\beta);(a,\gamma)],B)$ является A^m_m-квазигруппой.

3) Пусть $a \neq b$ и $\alpha \neq \beta$ $a,b,\alpha,\beta \in \mathfrak{T}$. Тогда

$$(a,\alpha),\ (a,\beta),\ (b,\alpha),\ (b,\beta)$$

является попарно различными элементами множества $\mathfrak{T}^2$, причем каждая тройка (попарно различных) удовлетворяет условию из 3°.

Справедливо:

$$B((x,u);(x,v);(y,u)) = (A(x,x,y),A(u,v,u)) = (y,v) =$$

$$= B((x,u);(y,u);(x,v)) = B((x,v);(x,u);(y,u)) =$$

$$= B((x,v);(y,u);(x,u)) = B((y,u);(x,v);(x,u)) =$$

$$= B((y,u);(x,u);(x,v))$$

для любых $x,y \in \{a,b\}$ и любых $u,v \in \{\alpha,\beta\}$. Отсюда, ввиду утверждения из 0), находим, что $(\{(a,\alpha);(a,\beta);(b,\alpha)\},B)$ является A^4_4-3-квазигруппой.

4_1) Пусть $(\mathfrak{T},A)$ A^4_4-3-квазигруппа.[1] Пусть, далее, $a,b,\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathfrak{T}$ любые элементы удовлетворяющие условиям:

$$a \neq b \quad \text{и} \quad \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} = \mathfrak{T}.$$

Тогда

$$(a,\alpha),\ (a,\beta),\ (b,\gamma),\ (b,\delta)^{2)}$$

попарно различные элементы множества $\mathfrak{T}^2$, причем каждая тройка (попарно различных) удовлетворяет условию из 4°_1.

Справедливо:

---

1) Табл. 1_1 - 1_4 из [4].

2) или: $(\alpha,a),(\beta,a),(\gamma,b),(\delta,b)$.

$$B((a,x);(a,y);(b,u)) =$$

$$= (A(a,a,b),A(x,y,u)) = (b,A(x,y,u))^{1)} =$$

$$B((a,x);(b,u);(a,y)) = B((b,u);(a,x);(a,y)) =$$

$$B((b,u);(a,y);(a,x)) = B((a,y);(b,u);(a,x)) =$$

$$B((a,y);(a,x);(b,u))$$

для любых $x,y \in \{\alpha,\beta\}$ и любого $u \in \{\gamma,\delta\}$[2]; и

$$B((a,x);(b,u);(b,v)) =$$

$$= (A(a,b,b),A(x,u,v)) = (a,A(x,u,v))^{3)} =$$

$$B((a,x);(b,v);(b,u)) = B((b,v);(a,x);(b,u)) =$$

$$B((b,v);(b,u);(a,x)) = B((b,u);(b,v);(a,x)) =$$

$$B((b,u);(a,x);(b,v))$$

для каждого $x \in \{\alpha,\beta\}$ и любых $u,v \in \{\gamma,\delta\}$. Отсюда, ввиду утверждения из 0), находим, что $(\{(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma);(b,\delta)\},B)$ является A_4^4-3-квазигруппой.

4_2) Пусть $(\mathfrak{T},A)$ A_m^m-3-квазигруппа и $m > 4$. Пусть, далее, $a,b,\alpha,\beta,\gamma \in \mathfrak{T}$ любые элементы удовлетворяющие условиям:

$$a \neq b \text{ и } |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3.$$

Тогда, например,

---

1) каждая A_4^4-3-квазигруппа является коммутативной [4].

2) $A(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, $A(\alpha,\beta,\delta) = \gamma$, $A(x,x,\gamma) = \gamma$, $A(x,x,\delta) = \delta$, ...

3) Каждая A_4^4-3-квазигруппа является коммутативной [4].

$$(a,\alpha),\ (a,\beta),\ (b,\gamma)$$

попарно различные элементы множества $\mathfrak{T}^2$.

Ввиду утверждения из 0), непосредственно находим, что

$$([(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)],B)$$

является 3-квазигруппой удовлетворяюще условию A1.

Справедливо:

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \delta \notin \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Действительно, если, например, $\delta = \alpha$, то $A(\alpha,\beta,\gamma) = A(\alpha,\beta,\beta)$, т.е. $\gamma = \beta$ (ввиду закона сокращения). Так как равенство $\gamma = \beta$ противоречит условию $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3$, утверждение доказано.

Так как $(\mathfrak{T},A)$ не является A_4^1-3-квазигруппой, имеет место:

По меньшей мере существует тройка элементов $x,y,z \in \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ удовлетворяющих условию:

$$A(x,y,z) \notin \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.$$

Пусть, например,

$$A(\alpha,\beta,\delta) = \xi \notin \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.$$

Таким образом, имеет место:

$$B((a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)) = (b,\delta)$$

и

$$B((a,\alpha);(a,\beta);(b,\delta)) = (b,\xi).$$

Отсюда находим, что

$$(b,\gamma),\ (b,\delta),\ (b,\xi) \in [(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)],$$

т.е., что имеет место[1]:

$$[(b,\gamma);(b,\delta);(b,\xi)] \subseteq [(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)].$$

Ввиду $a \neq b$, имеет место:

$$[(b,\gamma);(b,\delta);(b,\xi)] \neq [(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)].$$

Отсюда, учитывая факт, что (b,γ), (b,δ) и (b,ξ) попарно различные элементы множества $[(a,\alpha);(a,\beta);(b,\gamma)]$, ввиду (а) из утверждения 1, находим, что $([(a,\alpha);(a,\beta),(b,\gamma)],B)$ не является $A_н^н$-3-квазигруппой.

Теорема 2 доказана.

Подобными рассуждениями доказывается, что имеет место и следующее утверждение:

Теорема 2'. Пусть $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, A_t^m-3-квазигруппа, а $(\bar{\mathfrak{T}},\bar{A})$, $|\bar{\mathfrak{T}}| = \bar{t} \in N \setminus \{1,2,3\}$, $A_{\bar{t}}^m$-3-квазигруппа. Пусть, далее, для любых $a,b,c \in \mathfrak{T}$ и любых $\alpha,\beta,\gamma \in \bar{\mathfrak{T}}$ удовлетворяющих условию $|\{a,b,c\}| = |\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3$ существует изоморфизм f A_m^m-3-квазигруппы $([a,b,c],A)$ на A_m^m-3-квазигруппу $([\alpha,\beta,\gamma],\bar{A})$ такой, что имеет место:

$$fa = \alpha, \quad fb = \beta \text{ и } fc = \gamma.$$

Тогда $(\mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}},B)$, где

$$B((x_1^2),(y_1^2),(z_1^2)) \overset{\text{деф}}{=} (A(x_1,y_1,z_1),\bar{A}(x_2,y_2,z_2))$$

для любых $(x_1^2),(y_1^2),(z_1^2) \in \mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}}$. 3-квазигруппа удовлетворяющая условию А1 такая, что имеют место высказывания 1° - 3°, 4°_1 и 4°_2 из теоремы 2.

Учитывая доказательство теоремы 2, ввиду утверждения 1, находим, что имеет место:

---

[1] $|\{\gamma,\delta,\xi\}| = 3$

Утверждение 3. Пусть $(\mathfrak{T},A)$ A^m_m-3-квазигруппа. Пусть, далее,

$$B((x_1^2),(y_1^2),(z_1^2)) \overset{\text{деф}}{=} (A(x_1,y_1,z_1),A(x_2,y_2,z_2))$$

для любых $(x_1^2),(y_1^2),(z_1^2) \in \mathfrak{T}^2$. Тогда, если $m > 4$, то $(\mathfrak{T}^2,B)$ не является $A^m_{m^2}$-3-квазигруппой.

Лемма 4. [4] Если $(\mathfrak{T},A)$ и $(\bar{\mathfrak{T}},\bar{A})$ являются A^4_4-3-квазигруппами, то каждая биекция f множества $\mathfrak{T}$ на множество $\bar{\mathfrak{T}}$ является изоморфизмом $(\mathfrak{T},A)$ на $(\bar{\mathfrak{T}},\bar{A})$.

Следствием теоремы 2* и леммы 4 является следующее утверждение:

Утверждение 5. Пусть $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, и $(\bar{\mathfrak{T}},\bar{A})$, $|\bar{\mathfrak{T}}| = \bar{t} \in N \setminus \{1,2,3\}$, в том же порядке, A^4_t- и $A^4_{\bar{t}}$-3-квазигруппы. Тогда $(\mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}},B)$, где

$$B((x_1^2),(y_1^2),(z_1^2)) \overset{\text{деф}}{=} (A(x_1,y_1,z_1),\bar{A}(x_2,y_2,z_2))$$

для любых $(x_1^2),(y_1^2),(z_1^2) \in \mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}}$, $A^4_{t\cdot\bar{t}}$-3-квазигруппа.

Примечание. A^m_m-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = m \in N \setminus \{1,2\}$, называются дважды транзитивными тогда и только тогда, когда имеет место: для каждых $a,b,\alpha,\beta \in \mathfrak{T}$ удовлетворяющих условию $|\{a,b\}| = |\{\alpha,\beta\}| = 2$ существует автоморфизм f такой, что $fa = \alpha$ и $fb = \beta$ [2]. Справедливо: если A^m_m-квазигруппа дважды транзитивная, то $(\mathfrak{T}^2,B)$, где $B((x_1^2),(y_1^2)) \overset{\text{деф}}{=} (A(x_1,y_1),A(x_2,y_2))$ для любых $(x_1^2),(y_1^2) \in \mathfrak{T}^2$, является $A^m_{m^2}$-квазигруппой [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Szamkolowicz L., On the problem of existence of finite regular planes, Colloq. Math., 9 (1962), 245 - 250.

[2] Пухарев Н.К., Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях, Сибирский мат. ж., том VI, №4 (1965), 892 - 899.

[3] Ушан Я., A_t-квазигруппы, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15-2, 1985, 141 - 154.

[4] Ушан Я., A_t^m- и A_t-3-квазигруппы, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, (в печати).

REZIME

O JEDNOJ KLASI A_t^m-3-KVAZIGRUPA

A_t- i A_t^m-3-kvazigrupe su uvedene i razmatrane u [4]. U ovom radu se razmatraju 3-kvazigrupe $(\mathfrak{T} \times \bar{\mathfrak{T}}, B)$, gde je $B((x_i^2), (y_i^2), (z_i^2)) \overset{def}{=} (A(x_1, y_1, z_1), \bar{A}(x_2, y_2, z_2))$, a $(\mathfrak{T}, A)$ i $(\bar{\mathfrak{T}}, \bar{A})$ jesu, redom, A_t^m- i $A_{\bar{t}}^m$-3-kvazigrupe.

Received by the editors September 3, 1987.