Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 18,1,31-43 (1988)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

О ОДНОМ КЛАССЕ <Nn,E>-СЕТЯХ С (n+1)-РАССТОЯНИЕМ

Янез Ушан

Institute of Mathematics, University of Novi Sad
Dr Ilije Djuričića 4, 21000 Novi Sad, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В [1] определяется и исследуется структура $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel,d)$, где $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ является <Nn,E>-сетью, а d отображением множества $\mathfrak{T}^{n+1}$ в множество $R\setminus R^-$ удовлетворяющим некоторым условиям. Притом, структура $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel,d)$, некоторым образом, является обобщением метрического пространства $(\mathfrak{T},d)$. Ввиду этого факта, автор, в [1], структуру $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel,d)$ позволил себе назвать и (n+1)-метрическим пространством. В настоящей работе продолжается исследование одного класса структуры $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel,d)$.

□

Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество и пусть непустое множество $\mathcal{L}$ множество некоторых подмножеств множества $\mathfrak{T}$.

Множество $\mathcal{L}$ называется [1] почти-n-разбиением множества $\mathfrak{T}$ тогда и только тогда когда выполняются следующие условия:

<u>NH1</u> $$(\forall A_1 \in \mathfrak{T})\ldots(\forall A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \ell \in \mathcal{L})\{A_1^n\} \subseteq \ell); \text{ и}$$

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N15
Key words and phrases: <Nn,E>-net, (n+1)-distance function.

NH2 $(\forall \ell \in \mathcal{L})(\exists A_1 \in \mathfrak{T}) \dots (\exists A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \ \wedge$

$\wedge \ \{A_1^n\} \subseteq \ell \ \wedge \ (\forall \ell' \in \mathcal{L})(\ell' \neq \ell \Rightarrow \{A_1^n\} \nsubseteq \ell'))$.

Высказывания под NH1 и NH2 являются следствиями следующих высказываний:

H1 $(\forall A_1 \in \mathfrak{T}) \dots (\forall A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists ! \ell \in \mathcal{L})\{A_1^n\} \subseteq \ell)$; и

H2 $(\forall \ell \in \mathcal{L})|\ell| \geq n; \ n \in \mathbb{N}$.

Множество $\mathcal{L}$ называется n-разбиением[1] тогда и только тогда, когда выполняются условия под H1 и H2. Очевидно имеет место: если $\mathcal{L}$ является n-разбиением множества $\mathfrak{T}$, то $\mathcal{L}$ является Nn-разбиением множества $\mathfrak{T}$. Обратное не имеет место: пример 1.3 из [1].

Объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ называется [1] Nn-геометрией (n-геометией) тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ является Nn-разбиением (n-разбиением) множества $\mathfrak{T}$.

Пусть $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ Nn-геометрия; $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $\{L_i | i \in I\}$ разбиение множества $\mathcal{L}$. Притом, пусть $\parallel$ бинарное отношение в $\mathcal{L}$. Объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ называется [1] <nN,E>-сетью тогда и только тогда, когда имеет место:

E1 $\parallel$ является РСТ отношением в $\mathcal{L}$; и

E2 $(\forall A \in \mathfrak{T})(\forall \ell \in \mathcal{L})(\exists ! \ell' \in \mathcal{L})(\ell' \parallel \ell \wedge A \in \ell')$[2].

Притом, если $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ является n-геометрией, то $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ называется <n,E>-сетью.

Примером <2,E>-сети является объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$, где $\mathfrak{T}$ множество всех точек плоскости евклидовой геометрии, $\mathcal{L}$-можество всех прямых той же плоскости и $\parallel$-отношение параллельности в множестве $\mathcal{L}$. Далее, примером <N3,E>-сети, неявляющейся <3,E>-сетью, является объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$, где $\mathfrak{T}$ множество всех точек евклидовой геометрии, $\mathcal{L}$-множество всех плоскостей той же геометрии и $\parallel$-от-

---

1) Разбиением Хармантиса типа n, короче: nH-разбиением [3]. n-разбиение определено Хармантисом в [2].

2) аксиома евклидовой параллельности.

ношение параллельности в множестве $\mathfrak{L}$.

Множество $\{A_1^n\} \subseteq \mathfrak{T}$ называется <u>скелетным</u> <u>множеством</u> тогда и только тогда, когда имеет место

$$(\exists! \ell \in \mathfrak{L})\{A_1^n\} \subseteq \ell \quad [1]$$

Множество всех скелетных множеств $\langle Nn, E\rangle$-сети $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ обозначаем через $\mathfrak{S}$[1]. Притом, имеет место:

$$[A_1^n] \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} \ell, \ \{A_1^n\} \subseteq \ell \ \wedge \ \{A_1^n\} \in \mathfrak{S} \\ \{A_1^n\}, \ \{A_1^n\} \notin \mathfrak{S} \end{cases} \quad [1].$$

Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ $\langle Nn, E\rangle$-сеть; $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, d яавляется отображением множества $\mathfrak{T}^{n+1}$ в множество $R \setminus R^-$, где R множество всех действительных чисел, а R^- множество всех отрицательных действительных чисел. Отображение d называется [1] функцией (n+1)-расстояния в $\langle Nn, E\rangle$-сети $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

<u>M0</u> $\quad d(A_{\alpha 1}, \dots, A_{\alpha n}, B) = d(A_1^n, B)$ для каждого $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, каждого $B \in \mathfrak{T}$ и каждого $\alpha \in \{1, \dots, n\}!$;

<u>M1</u> $\quad d(A_1^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{A_1^{n+1}\} \subseteq \ell$ для каждого $A_1^{n+1} \in \mathfrak{T}$;

<u>M2</u> $\quad (\forall \{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall \{B_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n] \parallel [B_1^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \{\bar{B}_1^n\} \in \mathfrak{S})([\bar{B}_1^n] = [B_1^n] \ \wedge \ d(A_1^n, B_1) = d(\bar{B}_1^n, A_1)))$; и

<u>M3</u> $\quad (\forall \{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall \{C_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n] \parallel [C_1^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \{\bar{C}_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall C \in \mathfrak{T})(\forall B \in \mathfrak{T})([\bar{C}_1^n] = [C_1^n] \ \wedge \ C \in [C^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A_1^n, B) \le d(A_1^n, C) + d(\bar{C}_1^n, B)))$.

Притом, имеет место [1]: если $(\mathfrak{T}, d)$ метрическое пространство, то d является 2-расстоянием в $\langle 1, E\rangle$-сети $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}, \{\mathfrak{S}\})$, и обратное. Ввиду этого утверждения, объект $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$, где $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ $\langle Nn, E\rangle$-сеть, а d является (n+1)-расстоянием в $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$, называет-

1) Если $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ является $\langle Nn, E\rangle$-сетью, то $\mathfrak{S}$ является PNH-разбиением множества $\mathfrak{T}$ [3] удовлетворяющим условию: $(\forall s \in \mathfrak{S})|s| = n$. Притом, если $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ является $\langle n, E\rangle$-сетью, то $\mathfrak{S}$ является n-разбиением множества $\mathfrak{T}$ удовлетворяющим условию: $(\forall s \in \mathfrak{S})|s| = n$.

ся и (n+1)-метрическим пространством [1].

Примером 3-метрического пространства является объект $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$, где $\mathfrak{C}$ множество всех точек плоскости евклидовой геометрии, $\mathfrak{L}$ множество всех прямых той же плоскости, $\parallel$-отношение параллельности в множестве $\mathfrak{L}$, а $d(A_1^3)$ является площадью треугольника с вершинами A_1,A_2 и A_3 [1]. Примером 4-метрического пространства является объект $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$, где $\mathfrak{C}$ множество всех точек евклидовой геометрии, $\mathfrak{L}$ -множество всех плоскостей той же геометрии, $\parallel$ -отношение параллельности в множестве $\mathfrak{L}$, а $d(A_1^4)$ является объемом треугольной пирамиды с вершинами A_1,A_2,A_3 и A_4 [1].

Пусть $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$ (n+1)-метрическое пространство. Пусть, далее, $\{A_1^n\}$ скелетное множество, т.е. пусть $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$. Притом, пусть $\varepsilon \in R^+$. Подмножество $K]A_1^n,\varepsilon[$ множества $\mathfrak{C}$ называется [1] открытим шаром с центром в скелетном множестве $\{A_1^n\}$ радиус которого $\varepsilon \in R^+$ тогда и только тогда, когда имеет место:

$$(1)\qquad K]A_1^n,\varepsilon[\stackrel{\text{деф}}{=} \{X \mid X \in \mathfrak{C} \wedge d(A_1^n,X) < \varepsilon\}\ .$$

Закрытый шар с центром в скелетном множестве $\{A_1^n\}$ радиуса $\varepsilon \in R^+$, в обозначении $K[A_1^n,\varepsilon]$, определен [1] следующим образом:

$$(\bar{1})\qquad K[A_1^n,\varepsilon] \stackrel{\text{деф}}{=} \{X \mid X \in \mathfrak{C} \wedge d(A_1^n,X) \leq \varepsilon\}.$$

Множество $A \subseteq \mathfrak{C}$ называется [1] открытым множеством в (n+1)-метрическом пространстве $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$ тогда и только тогда, когда имеет место:

$$(2)\qquad (\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\{A_1^n\} \subseteq A \wedge [A_1^n] \subseteq A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists\varepsilon \in R^+)K]A_1^n,\varepsilon[\subseteq A).$$

Притом, $A \subseteq \mathfrak{C}$ называется [1] закрытым множеством в (n+1)-метрическом пространстве $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C} \setminus A$ является открытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$.

Пустое множество и множество $\mathfrak{C}$ является открытыми и закрытыми множествами в (n+1)-метрическом пространстве $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$ [1]. Притом, существуют (n+1)-метрические пространства $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$ обладающие множествами $A \in \mathfrak{C}$ и $A \notin \{\emptyset,\mathfrak{C}\}$ являющиеся открытыми и закрытыми множествами в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$; см. [1].

Также справедливо [1]:

а) Если $\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_m$, $m \in \mathbb{N}$, открытые множества в $(n+1)$-метрическом пространстве $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\parallel,d)$, то $\bigcap_{i=1}^{m}\mathcal{O}_i$ открытое множество в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\parallel,d)$;

б) существуют $(n+1)$-метрические пространства $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\parallel,d)$ обладающие открытыми множествами $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathfrak{C}$ и $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathfrak{C}$ объединение которых, т.е. $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, не является откытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\parallel,d)$.

¤ ¤

В настоящей работе рассматриваются $(n+1)$-метрические пространства $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\parallel,d)$ удовлетворяющие следующим условиям:

<u>E3</u> Для каждых двух различных блоков $\ell,\ell' \in \mathcal{L}$ имеет место одно и только одно из соотношении: $\ell \parallel \ell'$; $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$;

<u>M4</u>$_1$
$$(\forall\alpha \in R^+)(\forall\{A_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathcal{S})([A_1^n] \parallel [B_1^n] \wedge$$
$$\vee [A_1^n] \neq [B_1^n] \wedge d(A_1^n,B_1) = d(B_1^n,A_1) \wedge$$
$$\wedge\ \alpha < d(A_1^n,B_1) \Rightarrow (\exists X \in \mathfrak{C})(d(B_1^n,X) = \alpha \wedge$$
$$\wedge\, d(A_1^n,X) = d(A_1^n,B_1) - \alpha));$$

<u>M4</u>$_2$
$$(\forall\alpha \in R^+)(\forall\{A_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathcal{S})([A_1^n] \parallel [B^n] \wedge$$
$$\wedge [A_1^n] \neq [B_1^n] \wedge d(A_1^n,B_1) = d(B_1^n,A_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists Y \in \mathfrak{C})(\exists Z \in \mathfrak{C})(d(B_1^n,Y) = \alpha \wedge d(A_1^n,Y) = \alpha +$$
$$+ d(A_1^n,B_1) \wedge d(A_1^n,Z) = \alpha \wedge d(B_1^n,Z) = \alpha + d(B_1^n,A_1)));$$ и

<u>M5</u>
$$(\forall\{A_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall\{\bar{A}_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall X \in \mathfrak{C})(\forall Y \in \mathfrak{C})([\bar{A}_1^n] = [A_1^n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d(A_1^n,X) < d(A_1^n,Y) \Rightarrow d(\bar{A}_1^n,X) < d(\bar{A}_1^n,Y))).$$

Приведенные примери 3-метрического пространства и 4-метрического пространства удовлетворяют условиям E3, M4$_1$, M4$_2$ и M5.

Такие $(n+1)$-метрические пространства мы рассматривали уже в [1]. Здесь позволим их назвать: R-$(n+1)$-метрические пространства.

Притом, имеет место следующее утверждение [1]:

Лемма 1. В каждом R-(n+1)-метрическом пространстве $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ имеет место:

а) открытый шар в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ является открытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$;

б) открытый шар в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ не яавляется закрытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$;

ц) закрытый шар в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ является закрыткм множеством в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$; и

д) закрытый шар в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ не яавляется открытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$.

□ □ □

Условиям E3, $M4_1$, $M4_2$ и M5 удовлетворяют и 2-метрические пространства $(\mathfrak{C},\mathcal{S},\{\mathcal{S}\}^{1)},d)$, где $\mathfrak{C} = R^m$, $m \in \mathbb{N}$, а $d((a_1),(b_1)) \overset{\text{деф}}{=} (\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ - для каждого $m \in \mathbb{N}$. Притом, примеры приведнных 3-метрического пространства, 4-метрического пространства и 2-метрического пространства для $m = 1$ удовлетворяют и следуюущему условию:

K1
$$(\forall\{A_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathcal{S})(\forall\ \varepsilon_1 \in R^+)(\forall\varepsilon_2 \in R^+)([A_1^n]\|[B_1^n] \wedge$$
$$\wedge\ K]A_1^n,\varepsilon_1[\ \cap\ K]B_1^n,\varepsilon_2[\ \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists\{C_1^n\} \in \mathcal{S})(\exists\varepsilon \in R^+)([C_1^n]\|[A_1^n] \wedge$$
$$\wedge\ K]A_1^n,\varepsilon_1[\ \cap\ K]B_1^n,\varepsilon_2[\ = K]C_1^n,\varepsilon[)).$$

Однако, условию K1 не удовлетворяют выше приведенные 2-метричецкие пространства при $m \geq 2$.

Утверждение 2. Пусть $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ R-(n+1)-метрическое пространство удовлетворяющие условию K1. Пусть, далее,

(3)
$$K_{(\ell,\|)} \overset{\text{деф}}{=} \{K]A_1^n,\varepsilon[\ |\{A_1^n\} \in \mathcal{S} \wedge [A_1^n]\|\ \ell \wedge \varepsilon \in R^+\} \quad \text{и}$$

---

1) $\mathcal{S}/\| = \{\mathcal{S}\}$.

(4) $\mathfrak{O}_{(\ell,\|)} \overset{\text{деф}}{=} \{O \mid O = \cup \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \in P(\mathfrak{K}_{(\ell,\|)})\}$.

Тогда, если $O_1,\dots,O_m \in \mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$, то $\bigcap_{i=1}^{m} O_i \in \mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$O_1,\dots,O_m \in \mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$$

<u>непустые</u> множества.[1] Пусть, далее,

$$O_1 = \cup\mathfrak{A}^{(1)},\dots,O_m = \cup\mathfrak{A}^{(m)},$$

где

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \{A^{(1)}_{i_1} \mid i_1 \in I^{(1)}\},\dots,\mathfrak{A}^{(m)} = \{A^{(m)}_{i_m} \mid i_m \in I^{(m)}\}.^{2)}$$

Таким образом, имеет место

(а) $$O_1 = \bigcup_{i_1 \in I^{(i)}} A^{(1)}_{i_1},\dots,O_m = \bigcup_{i_m \in I^{(m)}} A^{(m)}_{i_m}.$$

Притом, ввиду требования, что $O_i \neq \emptyset$, $i \in \{1,\dots,m\}$, имеют место и следующие неравенства:

(б) $$I^{(1)} \neq \emptyset,\dots,I^{(m)} \neq \emptyset.$$

Учитывая (а) и (б), ввиду соответствующей дистрибутивности[3], находим, что имеет место равенство:

(ц) $$O_1 \cap \dots \cap O_m = \bigcup_{(i_1,\dots,i_m)\in I^{(1)}\times\dots\times I^{(m)}} (A^{(1)}_{i_1}\cap\dots\cap A^{(m)}_{i_m}).$$

Так как $A^{(1)},\dots,A^{(m)}$ открытые шары из множества $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$, то, ввиду условия K1, $A^{(1)}_{i_1} \cap \dots \cap A^{(m)}_{i_m}$ или открытый шар из $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$ или пустое множество. Отсюда, учытывая (ц), (4) и равенство $\cup\emptyset = \emptyset$, находим, что имеет место:

---

1) Так как $\emptyset \in P(\mathfrak{K}_{(\ell,\|)})$, ввиду (4) и равенства $\cup\emptyset = \emptyset$, находим, что имеет место: $\emptyset \in \mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$.

2) $A^{(1)}_{i_1},\dots,A^{(m)}_{i_m}$ яавляются открытыми шарами из множества $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$

3) [4], стр. 120: $I \neq \emptyset \wedge K \neq \emptyset \Rightarrow (\bigcup_{i\in I} X_i)\cap(\bigcup_{k\in K} Y_k) = \bigcup_{(i,k)\in I\times K}(X_i \cap Y_k)$.

(д) $\quad O_1 \cap \ldots \cap O_m \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$.

Притом, непосредственно находим, что (д) имеет место если среди множеств $O_1,\ldots,O_m$ -пустые множества.

Утврeждение 3. Пусть $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ R-(n+1)-метрическое пространство. Пусть, далее, множества $\mathcal{K}_{(\ell,\|)}$ и $\mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ определены, в том же порядке, через (3) и (4) из утверждения 2. Тогда, если $O_j \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$, $j \in J$, $J \neq \emptyset$, то $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$.

Доказательство. Пусть

$$O_j \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)},\ j \in J,\quad J \neq \emptyset.$$

Пусть, далее,

(a) $$O_j = \bigcup \mathbb{A}^{(j)},$$

где

(б) $$\mathbb{A}^{(j)} = \bigcup_{i_j\in I(j)} A^{(j)}_{i_j} \quad \text{или} \quad \mathbb{A}^{(j)} = \emptyset.$$

Притом:

$$A^{(j)}_{i_j} \in \mathcal{K}_{(\ell,\|)},$$

т.е. $A^{(j)}_{i_j}$ являются открытыми шарами из множества $\mathcal{K}_{(\ell,\|)}$.

Ввиду (а) и (б) имеет место:

(ц) $$\bigcup_{j\in J} O_j = \bigcup_{j\in J}\ \bigcup_{i_j\in I(j)} A^{(j)}_{i_j},$$

где некоторые из $A^{(j)}_{i_j}$ позволим себе считать пустыми множествами, если соответствующее $\mathbb{A}^{(j)}$ пустое множество.

Так как правая часть в равенстве под (ц), в самом деле, является объединением открытых шаров из $\mathcal{K}_{(\ell,\|)}$ или пустых множеств[1), ввиду (4), находим, что имеет место:

---

1) например, имеет место: $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} M^j_i = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} M^j_i$.

$$\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathfrak{O}_{(\ell,\|)}.$$

Утверждение 4. Пусть $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L}, \|, d)$ R-(n+1)-метрическое пространство. Пусть, далее, множества $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$ и $\mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$ определены, в том же порядке, через (3) и (4) из утверждения 2. Тогда имеет место

$$\bigcup K_{(\ell,\|)} = \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Очевидно имеет место:

$$\bigcup K_{(\ell,\|)} \subseteq \mathfrak{C}.$$

Пусть имеет место

$$A \in \mathfrak{C}.$$

Тогда, ввиду E2, существует $\{\bar{A}_1^n\} \in \mathfrak{S}$ такое, что

$$A \in [\bar{A}_1^n] \wedge [\bar{A}_1^n] \| \ell.$$

Отсюда, ввиду определения (3), находим, что имеет место

$$A \in K\,]\bar{A}_1^n, \varepsilon[$$

для любого $\varepsilon \in R^+$. Таким образом, имеет место

(б) $$A \in \bigcup \mathfrak{K}_{(\ell,\|)}.$$

Из (а) и (б), наконец, получаем, что справедливо и:

$$\mathfrak{C} \subseteq \bigcup \mathfrak{K}_{(\ell,\|)}.$$

Утверждение 5. Пусть $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L}, \|, d)$ R-(n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условию K1. Пусть, далее, множества $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$ и $\mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$ определены, в том же порядке, через (3) и (4) из утверждения 2. Тогда $(\mathfrak{C}, \mathfrak{O}_{(\ell,\|)})$ является топологически пространством.

Доказательство. Утврeждение имеет место ввиду следук щих фактов:

а) имеет место: $\mathcal{O}_{(\ell,\|)} \subseteq P(\mathfrak{C})$[1] ;

б) имеет место: $\emptyset \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$[2] ;

ц) имеет место: $\mathfrak{C} \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$[3] ;

д) любое объединение элементов из $\mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ является элементом множества $\mathcal{O}_{(\ell,\|)}$[4]; и

е) $O_1,\dots,O_m \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)} \Rightarrow O_1 \cap \dots \cap O_m \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ для любых $O_1,\dots,O_m \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$[5] .

<u>Утверждение 6.</u> Пусть $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ R-(n+1)-метрическое пространство. Пусть, далее, множества $\mathcal{K}_{(\ell,\|)}$ и $\mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ определени, в том же порядке, через (3) и (4) из утверждения 2. Тогда элементы множества $\mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ являются открытыми множествами в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$.

<u>Доказательство.</u>

а) $\emptyset$ и $\mathfrak{C}$ являются открытыми множествами в $(\mathfrak{C},\mathcal{L},\|,d)$ [1].

б) Пусть $O \in \mathcal{O}_{(\ell,\|)}$ удовлетворяет условию:

(а) $O \neq \emptyset$ и $O \neq \mathfrak{C}$.

$б_1$) Пусть $\{B_1^n\} \in \mathcal{B}$ удовлетворяет условию:

$\{B_1^n\} \nsubseteq O$ и $[B_1^n] \nsubseteq O$[6].

Тогда формула под (2) имеет место (ввиду: $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = \top$).

$б_2$) Пусть $\{B_1^n\} \in \mathcal{B}$ удовлетворяет условиям:

$\{B_1^n\} \subseteq O$ и $[B_1^n] \nsubseteq O$.

Тогда формула под (2) имеет место (также, ввиду: $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = \top$).

$б_3$) Пусть $\{B_1^n\} \in \mathcal{B}$ удовлетворяют условиям

(б) $\{B_1^n\} \subseteq O$ и $[B_1^n] \subseteq O$[7].

---

1) ввиду определений (3) и (4).
2) ввиду соотношении: $\emptyset \in P(\mathcal{K}_{(\ell,\|)})$ и $\cup\, \emptyset = \emptyset$.
3) ввиду утверждения 4.
4) ввиду утверждения 3.
5) ввиду утверждения 2.
6) имеет место: $\{B_1^n\} \nsubseteq O \Rightarrow [B_1^n] \nsubseteq O$.
7) имеет место: $[B_1^n] \subseteq O \Rightarrow \{B_1^n\} \subseteq O$.

Ввиду E3, имеет место:

или

$(ц_1)$ $[B_1^n] \parallel \ell$

или

$(ц_2)$ $[B_1^n] \cap \ell \neq \emptyset,$

где ℓ параметр множества $\mathfrak{O}_{(\ell,\parallel)}$.

Предположим, что имеет место $(ц_2)$. Далее, предположим, что $A \in \mathfrak{C}$ любая точка удовлетворяющая условию:

$$A \notin O$$

(такие точки существуют, ввиду предположения $O \neq \mathfrak{C}$.) Тогда, ввиду E2, существует блок $\bar{\ell} \in \mathfrak{L}$ удовлетворяющий условию:

$$A \in \bar{\ell} \text{ и } \bar{\ell} \parallel \ell.$$

Притом, ввиду теоремы 5 из [1], имеет место:

$$\bar{\ell} \cap O = \emptyset.$$

Отсюда, ввиду предположения, что имеет место возможност $(ц_2)$, учитывая E2 и E3, находим,что имеет место соотношение

$$[B_1^n] \cap \bar{\ell} \neq \emptyset,$$

т.е., что

$$[B_1^n] \not\subseteq O.$$

Так как $[B_1^n] \subseteq O$, мы, ввиду E3, доказали, что имеет место:

(д) $[B_1^n] \parallel \ell.$

Из (д), ввиду предположения (б), учитываяа определения (3) и (4), находим, что существует открытый шар $K]\bar{A}_1^n, \varepsilon[\subsetneq O$ такой, что имеет место:

$$[B_1^n] \subseteq K]\bar{A}_1^n,\varepsilon[.$$

Отсюда, наконец, ввиду леммы 1 под а), находим, что утверждение доказано.

Непосредствении следствием утверждения 5 и утверждения 6 является следующее утвреждение:

Теорема 7. Пусть $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$ R-(n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условию K1. Пусть, далее, множества $\mathfrak{K}_{(\ell,\|)}$ и $\mathfrak{O}_{(\ell,\|)}$ определени, в том же порядке, через (3) и (4) из утверждения 2. Тогда:

а) $(\mathfrak{C},\mathfrak{O}_{(\ell,\|)})$ является топологическим пространством; и

б) откытые множества топологического пространства $(\mathfrak{C},\mathfrak{O}_{(\ell,\|)})$ являются открытыми множествами R-(n+1)-метрического пространства удовлетворяющего условию K1 $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ушан Я., <Nn,E>-сети с (n+1)-расстоянием, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad - Math. Ser., 17-2 (1987),

[2] Hartmanis J., Genaralized Partitions and Lattice Embedding Theory, Proc. of Symphosium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory Amer. Math. Soc., (1961), 22-30.

[3] Ушан Я., Частичные A_t-группоиды, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad - Math. Ser., 17-2, (1987).

[4] Бурбаки Н., Теороя множеств, Издательство "Мир", Москва 1965.

REZIME

O JEDNOJ KLASI <Nn,E> REŠETAKA SA (n+1)-RASTOJANJEM

U jednom ranijem radu [1] autor uvodi i razmatra strukturu $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$, gde je $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|)$ <Nn,E>-rešetka a d preslikavanje skupa $\mathfrak{C}^{n+1}$ u skup $R \setminus R^-$ koje zadovoljava određene uslove. Pri tom, struktura (𝕮,𝕷,∥,d), na određeni način, predstavlja uopštenje metričkog prostora (𝕮,d). U ovom radu se nastavlja izučavanje jedne klase strukture (𝕮,𝕷,∥,d).

Received by the editors March 16, 1988.