Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 18,1,45-55(1988)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

A_t-3-группоиды

Янез Ушан

Institute of Mathematics, University of Novi Sad,
Dr Ilije Djuričića 4, 21000 Novi Sad, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В [1] введены понятия A_t^3- и A_t^4-алгебр. В [2] дано такое определение A_t^m-квазигруппы (A_t^m-алгебры), что A_t^3- и A_t^4-алгебры оказываются ее частными случаями. В [3] доказано, что A_t^m-квазигруппы являются координатизационными системами конечных регулярных плоскостей, в которых прямые ℓ удовлетворяют условию $|\ell| \geq 3$. В [4] введены A_t-квазигруппы, являющиеся одним из обобщений A_t^m-квазигрупп, и показано, что A_t-квазигруппы являются координатизационными системами конечных 2H-геометрии в которых прямые ℓ удовлетворяют условию $|\ell| \geq 3$. В [6] введены A_t-3-квазигруппы являющиеся обобщением A_t-квазигрупп. В настоящей работе определяются и рассматриваются A_t-3-группоиды как обобщение A_t-квазигрупп. Показано, что A_t-3-группоиды являются координатизационными системами конечных 3H-геометрий. (Подобно, в [5] введены и рассматриваны A_t-группоиды.)

□

Пусть $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2\}$, 3-группоид. 3-Подгруппоид 3-группоида $(\mathfrak{C},A)$ порожден элементамы $a,b,c \in \mathfrak{C}$ будем обозначат через $([a,b,c],A)$ [1].

<u>Определение 1.</u> A_t-3-группоид назовем 3-группоид $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2\}$, тогда и только тогда, когда имеет место:

[1] $a \neq b \wedge a \neq c \wedge a \neq b \Rightarrow |[a,b,c]| \geq 3$.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.

Key words and phrases: A_t-quasigroups, A_t-groupoids, A_t-3-quasigroups, A_t-3-groupoids, 2H-geometry, 3H-geometry.

G1 $(\forall a \in G)(\forall b \in G)A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) = b$

для каждого $i \in \{1,2,3\}$[1)]; и

G2 $|\{a_1^3\}| = 3 \wedge |\{b_1^3\}| = 3 \wedge [a, a_2, a_3] \neq [b_1, b_2, b_3] \Rightarrow$

$\Rightarrow |[a_1, a_2, a_3] \cap [b_1, b_2, b_3]| \leq 2$

для любых $a_1^3,\ b_1^3 \in \mathfrak{C}$.

Утверждение 1. Пусть в 3-группоиде $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, имеет место G2. Тогда в $(\mathfrak{C}, A)$ имеет место:

G3 каждый 3-подгруппоид $([a,b,c], A)$, $|\{a,b,c\}| = 3$, порождает любая тройка попарно различных элементов множества $[a,b,c]$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathfrak{C}$ любые элементы удовлетворяющие условиям:

(1) $|\{a_1^3\}| = 3$,

(2) $|\{b_1^3\}| = 3$ и

(3) $b_1, b_2, b_3 \in [a_1, a_2, a_3]$.

Учитывая (2) и (3), находим, что имеет место:

(4) $|[a_1, a_2, a_3] \cap [b_1, b_2, b_3]| \geq 3$.

Далее, ввиду контрапозиции от G2, учитывая (1) и (2), находим, что имеет место:

(5) $|[a_1, a_2, a_3] \cap [b_1, b_2, b_3]| > 2 \Rightarrow [a_1, a_2, a_3] =$

$= [b_1, b_2, b_3]$.

Наконец, ввиду (4) и (5), находим, что утверждение доказано.

Утверждение 2. Если в 3-группоиде $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, имеет место G3, то в $(\mathfrak{C}, A)$ имеет место G2.

---

1) каждый $a \in \mathfrak{C}$ является единицей 3-группоида $(\mathfrak{C}, A)$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathfrak{C}$ любые элементы удовлетворяющие условию:

(а) $\quad |\{a_1^3\}| = 3 \wedge |\{b_1^3\}| = 3 \wedge [a_1, a_2, a_3] \neq [b_1, b_2, b_3].$

Предположим, что имеет место:

(б) $\quad |[a_1, a_2, a_3] \cap [b_1, b_2, b_3]| > 2$ [1].

Из (б) получаем, что существуют

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathfrak{C}$$

такие, что имеет место

(ц) $\quad |\{c_1^3\}| = 3 \wedge c_1^3 \in [a_1, a_2, a_3] \wedge c_1^3 \in [b_1, b_2, b_3].$

Из (ц), наконец, ввиду (G3), находим, что имеет место

$$[a_1, a_2, a_3] = [c_1, c_2, c_3] \quad \text{и} \quad [c_1, c_2, c_3] = [b_1, b_2, b_3],$$

т.е., что имеет место

$$[a_1, a_2, a_3] = [b_1, b_2, b_3].$$

Так как это равенство противоречит условию (а), находим, что утверждение доказано.

Учитывая определение 1, утверждение 1 и утверждение 2, непосредственно находим, что имеет место следующее утверждение:

Теорема 3. 3-Группоид $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2\}$, удовлетворяющий условию G1 является A_t-3-группоидом тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию G3.

Определение 2. A_t^m-3-группоид назовем 3-группоид $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2\}$, тогда и только тогда, когда имеет место G1 и следующее условие:

G4 $\quad |\{a_1, a_2, a_3\}| = 3 \Rightarrow |[a_1, a_2, a_3]| = m \in N \setminus \{1,2\}$

для любых $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{C}$.

Утверждение 4. Если 3-группоид $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \setminus \{1,2\}$, A_t^m-3-группоид, то $(\mathfrak{C}, A)$ является A_t-3-группоидом.

[1] $\neg |[a_1, a_2, a_3] \cap [b_1, b_2, b_3]| \leq 2.$

<u>Доказательство.</u> Пусть $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathfrak{C}$ любые элементы удовлетворяющие условию:

$$|\{a_1^3\}| = 3 \wedge |\{b_1^3\}| = 3 \wedge b_1,b_2,b_3 \in [a_1,a_2,a_3].$$

Ввиду условий $|\{b_1^3\}| = 3$ и $b_1^3 \in [a_1,a_2,a_3]$, находим, что имеет место:

$$[b_1,b_2,b_3] \subseteq [a_1,a_2,a_3].$$

Отсюда, ввиду G4, находим, что имеет место равенство

$$[b_1,b_2,b_3] = [a_1,a_2,a_3],$$

т.е., что в $(\mathfrak{C},A)$ имеет место G3. Таким образом, ввиду теоремы 3 и требования, что в A_t^m-3-группоиде имеет место G1, утверждение доказано.

3-Квазигруппы удовлетворяющие условиям G1 и G4 называются A_t^m-квазигруппамы. Подобное, 3-квазигруппы удовлетворяющие условиям G1 и G2 (G3) называются A_t-3-квазигруппамы [6].

На множестве из трех элементов не существует A_t^m-3-квазигруппа [6]. На табл. 1_1-1_3 изображен A_3^3-3-группоид. A_4^4-3-квазигруппы и A_5^5-3-квазигруппы существуют: табл. 1_1-1_4 и табл. 2_1-2_5 в [6].

A_1	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	1
3	3	1	1

Табл. 1_1

A_2	1	2	3
1	2	1	2
2	1	2	3
3	2	3	2

Табл. 1_2

A_3	1	2	3
1	3	3	1
2	3	3	2
3	1	2	3

Табл. 1_3

$(A(x,y,z) \overset{\text{деф}}{=} A_x(y,z); x,y,z \in \{1,2,3\}.)$

Непосредственным следствием утверждения 1 и определения 2 является следующее утверждение:

<u>Следствие 5.</u> Если $(\mathfrak{C},A)$ A_t-3-группоид, то $([a_1,a_2,a_3],A)$, $|\{a_1^3\}| = 3$, A_m^m-3-группоид для любых $a_1,a_2,a_3 \in \mathfrak{C}$; $m = |[a_1,a_2,a_3]|$.

В некоторых построениях A_t-3-группоидов особую роль играют A_m^m-3-группоиды. Подобно, в некоторых построениях A_t-3-квазигрупп: A_m^m-3-квазигруппы. A_m^m-3-квазигруппы известны только для $m = 4$ и $m = 5$ [6]. В продолжении, впервые, мы покажем, что A_m^m-3-группоиды существуют для каждого $m \in N \setminus \{1,2\}$.

Пусть $\mathfrak{T}$ начальная часть множества натуральных чисел. Притом, пусть:

$$\mathfrak{T} = \{1,2,\ldots,t\} \subseteq N, \quad |\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2\}.$$

Если положим

$$A(x,y,z) \overset{\text{деф}}{=} A_x(y,z), \quad x \in \mathfrak{T},$$

находим, что тернарный группоид $(\mathfrak{T},A)$ выражается системой бинарных группоидов $(\mathfrak{T},A_x)$, $x \in \mathfrak{T}$.[1)]

а) Реализация аксиомы G1 изображена на системе табл. 2_x.

A_x	1	2	...	x	...	t-1	t
1	x			1			
2		x		2			
⋮							
x	1	2		x		t-1	t
⋮							
t-1				t-1		x	
t				t			x

$, \; x \in \{1,2,\ldots,t\}$

Табл. 2_x

На системе табл. 2_x, $x \in \{1,2,\ldots,t\}$ заполнено $3(t-1)+1 = 3t-2$ клеток произведений $A(x,y,z)$. Притом, клетки заполняют произведения и только произведения $A(x,y,z)$ удовлетворяющие условию $|\{x,y,z\}| \leq 2$.

б) Далее, пусть в $A(x,y,z)$ x,y,z удовлетворяют условию:

$$y = a, \; z = b, \; a < b, \; x \neq a \quad \text{и} \quad x = b^{2)}.$$

Притом, для выбраных a,b, $a < b$, пусть элементы $x \in \mathfrak{T} \setminus \{a,b\}$

---

1) см. табл. 1_1-1_3; табл. 1_1-1_4 и 2_1-2_5 в [1]

2) $|\{x,y,z\}| = 3$.

"круговое упорядочены" способом изображенным на рис. 1, где имеет место

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{t-2}$$

и $<$ порядок из N.

Для <u>каждых</u> a, b, $a < b$ положим:

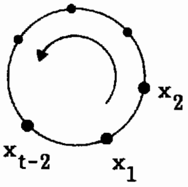


Рис. 1

$$A(x_1,a,b) = x_2, A(x_2,a,b), \ldots$$

$$\ldots, A(x_{t-3},a,b) =$$

$$= x_{t-2}, A(x_{t-2},a,b) = x_1.$$

Отсюда, находим, что каждый из

$$x_j \in \mathfrak{C} \setminus \{a,b,x_i\}$$

выражается как некоторое A-произведение элементов a,b,x_i.[1)] Например:

$$x_2 = A(x_1,a,b), x_3 = A(A(x_1,a,b),a,b), \text{ итд.}$$

ц) Способами из а) и б) мы построили <u>частичный</u> 3-группоид удовлетворяющий условиям G1 и G3. Поэтому, ввиду теоремы 3, если пустые клетки заполним любыми элементамы, мы получаем A_m^m-3-группоид. Таким образом, учитывая табл. 1_1–1_3, мы доказали, что имеет место следующее утверждение:

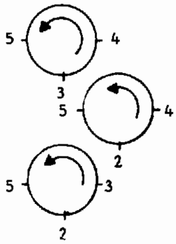
<u>Теорема 6.</u> A_m^m-3-группоиды существуют для каждого $m \in N \setminus \{1,2\}$.

<u>Пример.</u> Пусть $\mathfrak{C} = \{1,2,3,4,5\}$.
Учитывая а) и построение из б), именно:

$$A(3,2,1) = 4,\ A(4,1,2) = 5,\ A(5,1,2) = 3$$

$$A(2,1,3) = 4,\ A(4,1,3) = 5,\ A(5,1,3) = 5$$

$$A(2,1,4) = 3,\ A(3,1,4) = 5,\ A(5,1,4) = 5$$



1) Притом имеет место: $A(x_i,a,a) = x_i$, $A(a,b,b) = a$, и тому подобное; G1.

$A(3,1,5) = 3$, $A(3,1,5) = 4$, $A(4,1,5) = 2$

$A(1,2,3) = 4$, $A(4,2,3) = 5$, $A(5,2,3) = 1$

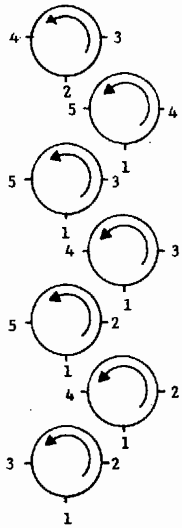
$A(1,2,4) = 3$, $A(3,2,4) = 5$, $A(5,2,4) = 1$

$A(1,2,5) = 3$, $A(3,2,5) = 4$, $A(4,2,5) = 1$

$A(1,3,4) = 2$, $A(2,3,4) = 5$, $A(5,3,4) = 1$

$A(1,3,5) = 2$, $A(2,3,5) = 4$, $A(4,3,5) = 1$

$A(1,4,5) = 2$, $A(2,4,5) = 3$, $A(3,4,5) = 1$



получаем табл. 3_1-3_5. Если в табл. 3_1-3_5 пустые клетки заполним любыми элементами из $\mathfrak{T} = \{1,2,3,4,5\}$, мы получаем систему таблиц изображающую один из A_5^5-3-группоидов. Притом, полученные A_5^5-3-группоиды не являются A_5^5-3-квазигруппами.

A_1	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	3	3
3	3		1	2	2
4	4			1	2
5	5				1

Табл. 3_1

A_2	1	2	3	4	5
1	2	1	4	3	3
2	1	2	3	4	5
3		3	2	5	4
4		4		2	3
5		5			2

Табл. 3_2

A_3	1	2	3	4	5
1	3	4	1	5	4
2		3	2	5	4
3	1	2	3	4	5
4			4	3	1
5			5		3

Табл. 3_3

A_4	1	2	3	4	5
1	4	5	5	1	2
2		4	5	2	1
3			4	3	1
4	1	2	3	4	5
5				5	4

Табл. 3_4

A_5	1	2	3	4	5
1	5	3	2	2	1
2		5	1	1	2
3			5	1	3
4				5	4
5	1	2	3	4	5

Табл. 3_5

□ □

Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество и пусть непустое множество $\mathcal{L}$ множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$. Множество $\mathcal{L}$ называется разбиением Хартманиса типа 3 множества $\mathfrak{T}$.[1)] тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

H1 $(\forall A_1 \in \mathfrak{T})(\forall A_2 \in \mathfrak{T})(\forall A_3 \in \mathfrak{T})(|\{A_1^3\}| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists! \ell \in \mathcal{L})(A_1 \in \ell \wedge A_2 \in \ell \wedge A_3 \in \ell)$; и

H2 $(\forall \ell \in \mathcal{L})|\ell| \geq 3$ [7].

Объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ позволим себе назвать 3H-геометрия [8]. Притом, элементы множества $\mathfrak{T}$ назовем точками, а элементы множества $\mathcal{L}$ линиями (или блокамы).

Непосредственным следствием условия H1 является условие:

H3 $(\forall \ell \in \mathcal{L})(\forall \ell' \in \mathcal{L})(\ell \neq \ell' \Rightarrow |\ell \cap \ell'| \leq 2)$.

Таким же следствием условия H1 является условие:

H1 $(\forall A_1 \in \mathfrak{T})(\forall A_2 \in \mathfrak{T})(\forall A_3 \in \mathfrak{T})(|\{A_1^3\}| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \ell \in \mathcal{L})(A_1 \in \ell \wedge A_2 \in \ell \wedge A_3 \in \mathcal{L})$.

Притом, очевидно, имеет место:

(н) H1 $\Leftrightarrow$ H1´ $\wedge$ H3.

1) короче: 3H-разбиением множества $\mathfrak{T}$.

Пусть $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, A_t-3-группоид. Пусть, далее,

$$\mathfrak{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a_1, a_2, a_3] \mid a_1^3 \in \mathfrak{C} \wedge |\{a_1^3\}| = 3\}.$$

Притом, элементы множества $\mathfrak{C}$ назовем точками, а элементы множества $\mathfrak{L}$ линиями.

Так как $([a_1, a_2, a_3], A_4)$, $|\{a_1^3\}| = 3$, существует для любых $a_1^3 \in \mathfrak{C}$, в построенном объекте $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ имеет место H1′. Далее, ввиду G2, в $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ имеет место H3. Отсюда, ввиду (н), $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ удовлетворяет условию H1. Далее, так как при $|\{a_1^3\}| = 3$ имеет место неравенство $|[a_1, a_2, a_3]| \geq 3$ для всех $a_1^3 \in \mathfrak{C}$, находим, что $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ удовлетворяет и условию H2. Таким образом, мы доказали, что имеет место следующее утверждение:

Теорема 7. Если $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, A_t-3-группоид, то $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$, где

$$\mathfrak{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a_1, a_2, a_3] \mid a_1^3 \in \mathfrak{C} \wedge |\{a_1^3\}| = 3\},$$

3H-геометрия.

Теорема 8. Каждой 3H-геометрии $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$, $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, соответствует A_t-3-группоид $(\mathfrak{C}, A)$.

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ конечная 3H-геометрия; $|\mathfrak{C}| = t \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.[1] Ввиду теоремы 6, находим, что имеет место:

1° на каждой линии ℓ_i, $i \in I$, можно определить тернарную операцию $A^{(i)}$, $i \in I$, такую, что $(\ell_i, A^{(i)})$, $i \in I$, становится A_m^m-3-группоидом; $m = |\ell_i|$.

Учитывая H1 и 1°, находим, что имеет место:

2° для любых попарно различных $a, b, c \in \mathfrak{C}$ существует одна и только одна (из, в 1° выбранных) $A^{(i)}$, $i \in I$, такая, что $A^{(i)}(a,b,c) \in \ell_i \subseteq \mathfrak{C}$.

Ввиду H1, любые $a, b \in \mathfrak{C}$ является элементамы по меньшей мере одного множества ℓ_i, $i \in I$. Отсюда, учитывая 1° и следствие 5, находим, что имеет место:

---
[1] H2.

3^o для любых $a,b \in \mathfrak{C}$ существует по меншей мере одна (из, в 1^o выбранных) $A^{(i)}$, $i \in I$, такая, что

$$A^{(i)}(a,a,b) = A^{(i)}(a,b,a) = A^{(i)}(b,a,a) = b$$

для всех $i \in I$, удовлетворяющих условию $a,b \in \ell_i$.

Далее, ввиду 2^o и 3^o, имеет место:

4^o $(\mathfrak{C},A)$, где

$$A \overset{\text{деф}}{=} \bigcup_{i \in I} A^{(i)},$$

является 3-группоидом.

Ввиду 3^o, имеет место:

5^o В 3-группоиде $(\mathfrak{C},A)$ имеет место G1.

Ввиду H1, H2, 1^o, 2^o и 3^o, имеет место:

6^o В группоиде $(\mathfrak{C},A)$ имеет место G2.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Szamkolowicz,L., On the problem of existence of finits regular planes, Colloq. Math., 9 (1962), 245-250.

[2] Пухарев, Н. К., Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях, Сибирский Мат. Ж., Том. VI, No. 4 (1965), 892-899.

[3] Siftar, J., On the existence of A_n^k-quasigroups, Glasnik Mat., Vol. 18(38), 1983, 217-219.

[4] Ушан,Я., A_t-квазигруппы, Зб. рад. Природ.-Мат. Фак. Унов. у Новом Саду, Сер. за Мат. 15(2), 1985, 141-154.

[5] Ušan J., A_t-groupoids, Proceedings of the Conference "Algebra and Logic" - Cetinje 1986, Novi Sad 1987, 209-219.

[6] Ушан,Я., A_t^m- и A_t-3-квазигруппы, Review of research Faculty of Science University of Novi Sad, Math. Ser., 16-1, 1986, 143-159.

[7] Hartmanis, J., Generalized Partitions and Lattice Embedding Theorems, Proc. od Symposium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc., (1961), 22-30.

[8] Ушан, Я., k-<2>-полусети, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Math. Ser., 16-2, 1986, 173-196.

REZIME

A_t - 3 GRUPOIDI

U radu se uvode i razmatraju A_t-3-grupoidi kao uopštenje A_t-3-kavzigrupa. Pokazano je da su A_t-3-grupoidi koordinatizacioni sistemi konačnih 3H-geometrija.

Received by the editors March 16, 1988.