Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 18,2, 111–116 (1988)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

L'endofoncteur "extension" associé à un espace de fermeture

Achille ACHACHE , Arturo A.L. SANGALLI

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.
Université Claude Bernard (Lyon 1)
69622 Villeurbanne Cedex (France)

Département de Mathématiques
Champlain Regional College
Lennoxville, Québec
Canada J1M 2A1

Résumé.

Soit $\mathfrak{L}$ la catégorie des fonctions résiduées entre treillis complets. A partir d'un ensemble S, on définit l'endofoncteur F (pour un objet P et une flèche $r : P \longrightarrow Q$) par $F(P) = P^S$ et $(F(r))(v) = rv$. A partir de chaque partie $\cap$-stable $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{p}(S)$, on définit un endofoncteur $E_{\mathcal{F}}$ par $E_{\mathcal{F}}(P) = \{v \in P^S \ / \ \forall\, t \in P,\ v^{-1}(\uparrow t) \in \mathcal{F}\}$ et $(E_{\mathcal{F}}(r))(v) = \bigwedge \{w \in E_{\mathcal{F}}(Q) \ / \ rv \leq w\}$. L'opérateur de fermeture $\mu_{\mathcal{F}}(P) : F(P) \longrightarrow E_{\mathcal{F}}(P)$ permet alors de définir (pour chaque $\mathcal{F}$) un morphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\bullet} E_{\mathcal{F}}$.

Motivation - Dans [1], on associe, à tout espace de fermeture $(S, \mathcal{F})$ mis en présence du treillis complet L où $0 < 1$, la partie $\bigwedge$-stable de L^S :

$$\mathcal{G} = \{v \in L^S \ / \ \forall X \subset S,\ \bigwedge(v(X)) = \bigwedge(v(\bar{X}))\}.$$

L'opérateur de fermeture $\mathfrak{p}(S) \longrightarrow \mathcal{F}$ est alors la restriction à $\mathfrak{p}(S)$ de l'opérateur de fermeture $L^S \longrightarrow \mathcal{G}$.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 06A23
Key words and phrases: Category, complete lattices.

On va chercher à comprendre comment, pour $(S, \mathcal{T})$ fixé, $\mathfrak{G}$ évolue en fonction de L.

Notations et définitions de base.

Pour un élément a d'un ensemble (partiellement) ordonné, on notera $\downarrow a$ l'ensemble des minorants de a. On définit de même $\uparrow a$.

Pour des ensembles ordonnés P et Q, une application $r : P \longrightarrow Q$ est dite *résiduée* si et seulement si, $\forall q \in Q$, $\exists x \in P$ tel que $r^{-1}(\downarrow q) = \downarrow x$. Appelons alors *associée* de r la fonction $r' : Q \longrightarrow P$, $q \longmapsto x$, définie par l'égalité écrite. Observons alors, pour $(p, q) \in P \times Q$, l'implication réciproque $r(p) \leq q \iff p \leq r'(q)$. La fonction résiduée r est nécessairement croissante car, si les éléments x et y de P vérifient $x \leq y$, on a : $x \leq y \in r^{-1}(\downarrow(r(y))) = \downarrow(r'(r(y)))$, donc : $x \leq r'(r(y))$, d'où $r(x) \leq r(y)$.

Notons aussi que, pour $p \in P$, $r'^{-1}(\uparrow p) = \{q \in Q \ / \ r'(q) \geq p\} = \{q \in Q \ / \ r(p) \leq q\} = \uparrow(r(p))$.

Notons enfin que, si $r_1 : A_1 \longrightarrow A_2$ et $r_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ sont résiduées, on a, pour $x \in A_3$,

$$(r_2 r_1)^{-1}(\downarrow x) = r_1^{-1}(r_2^{-1}(\downarrow x)) = r_1^{-1}(\downarrow(r'_2(x))) = \downarrow(r'_1(r'_2(x))).$$

Donc $r_2 r_1$ est résiduée, et son associée est $(r_2 r_1)' = r'_1 r'_2$.

Introduisons la *catégorie* $\mathfrak{R}$ dont les objets sont les ensembles ordonnés et dont les flèches sont les fonctions résiduées. Introduisons aussi la *sous-catégorie pleine* $\mathfrak{L}$ (de $\mathfrak{R}$) dont les objets sont les treillis complets : les $\mathfrak{G}$ sont des objets particuliers de $\mathfrak{L}$.

Si, par exemple, $\varphi : X \longrightarrow X$ est un opérateur de fermeture d'un ensemble ordonné X, la surjection $\lambda : X \longrightarrow \varphi(X)$, $x \longmapsto \varphi(x)$ est une flèche de $\mathfrak{R}$ car, pour $a \in \varphi(X)$,

$$\lambda^{-1}(\downarrow a) = \{x \in X \ / \ \varphi(x) \leq a\} = \{x \in X \ / \ x \leq a\}.$$

Résultats.

Lemme 1 - *Etant donné un espace de fermeture* $(S, \mathcal{T})$, *un treillis complet* L *et une application* $v : S \longrightarrow L$, *il y a équivalence entre :*

a) $\forall X \subset S$, $\bigwedge(v(X)) = \bigwedge(v(\bar{X}))$,

b) $\forall t \in L$, $v^{-1}(\uparrow t) \in \mathcal{T}$.

Preuve.

1). Soit d'abord une application $v : S \longrightarrow L$ quelconque et $X \subset S$. Fixons, un moment, notre attention sur l'ensemble :

$$Y = \bigcap \{ v^{-1}(\uparrow t),\ X \subset v^{-1}(\uparrow t) \}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Y &= \bigcap \{ v^{-1}(\uparrow t),\ \bigwedge(v(X)) \geq t \} \\ &= \{ y \in S \,/\, \forall t \in L, (\bigwedge(v(X)) \geq t \Rightarrow v(y) \geq t) \} \\ &= \{ y \in S \,/\, v(y) \geq \bigwedge(v(X)) \} = v^{-1}(\uparrow(\bigwedge(v(X)) \}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\bigwedge(v(Y)) \geq \bigwedge(v(X))$.

2). Montrons a) $\Rightarrow$ b). Posons, pour $t \in L$, $v^{-1}(\uparrow t) = H$. Si, $z \in \bar{H}$, $v(z) \geq \bigwedge(v(\bar{H})) = \bigwedge(v(H))$, donc $v(z) \geq t$ et $z \in H$. Ainsi, $\bar{H} \subset H$, et donc $H = \bar{H} \in \mathcal{F}$.

3). Montrons b) $\Rightarrow$ a). L'ensemble Y est, d'après sa définition, dans $\mathcal{F}$, donc $X \subset \bar{X} \subset Y$. Par suite, $\bigwedge(v(Y)) \leq \bigwedge(v(\bar{X})) \leq \bigwedge v(X)$, et donc $\bigwedge(v(X)) = \bigwedge(v(\bar{X}))$. ■

L'ensemble $\mathfrak{G}$ défini précédemment apparaît donc sous un nouvel éclairage, qui sera le seul pris en compte dans la suite de l'article.

La condition b) du lemme 1 permet de retrouver aisément le fait que $\mathfrak{G}$ est une partie $\bigwedge$-stable de L^S.

Proposition 2. *L'endofoncteur* $E_{\mathcal{F}}$.

Fixons un ensemble S.

A chaque partie $\cap$*-stable* $\mathcal{F}$ *de* $\mathfrak{P}(S)$ *on peut associer un foncteur :*

$$E_{\mathcal{F}} : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$$

défini par :

$$E_{\mathcal{F}}(P \xrightarrow{r} Q) = (E_{\mathcal{F}}(P) \xrightarrow{E_{\mathcal{F}}(r)} E_{\mathcal{F}}(Q))$$

où :

$$E_{\mathcal{F}}(P) = \{v \in P^S \,/\, \forall t \in P, v^{-1}(\uparrow t) \in \mathcal{F}\}$$

et

$$(E_{\mathcal{F}}(r))(v) = \bigwedge \{w \in E_{\mathcal{F}}(Q) \,/\, r\,v \leq w\}.$$

Preuve - Montrons, d'une part que $E_{\mathcal{F}}(r)$ est une flèche de $\mathcal{L}$, d'autre part que, pour des flèches $P \xrightarrow[r_1]{} R \xrightarrow[r_2]{} Q$ de $\mathcal{L}$, on a : $(E_{\mathcal{F}}(r_2)) \circ (E_{\mathcal{F}}(r_1)) = E_{\mathcal{F}}(r_2\, r_1)$.

1). Premier point.

Pour $w \in E_{\mathcal{F}}(Q)$, on a (avec des notations évidentes) :

$$(E_{\mathcal{F}}(r))^{-1}(\downarrow w) = \{v \in E_{\mathcal{F}}(P) \,/\, \overline{rv} \leq w\} = \{v \in E_{\mathcal{F}}(P) \,/\, rv \leq w\} = \{v \in E_{\mathcal{F}}(P) \,/\, v \leq r'w\}.$$

Mais, pour $t \in P$, $(r'w)^{-1}(\uparrow t) = w^{-1}(r'^{-1}(\uparrow t)) = w^{-1}(\uparrow(r(t))) \in \mathcal{F}$. Donc $r'w \in E_{\mathcal{F}}(P)$.

Ainsi, $(E_{\mathcal{F}}(r))^{-1}(\downarrow w) = \downarrow r'w$, avec $r'w \in E_{\mathcal{F}}(P)$. On en conclut que $E_{\mathcal{F}}(r)$ est une application résiduée, d'associée $E_{\mathcal{F}}(Q) \longrightarrow E_{\mathcal{F}}(P)$ définie par $w \longmapsto r'w$.

2). Deuxième point.

Pour $w \in E_{\mathcal{F}}(Q)$, on a :

$$((E_{\mathcal{F}}(r_2))(E_{\mathcal{F}}(r_1)))^{-1}(\downarrow w) = (E_{\mathcal{F}}(r_1))^{-1}((E_{\mathcal{F}}(r_2))^{-1}(\downarrow w) = (E_{\mathcal{F}}(r_1))^{-1}(\downarrow r'_2\, w) = \downarrow r'_1\, r'_2\, w$$
$$= \downarrow((r_2\, r_1)'(w)) = (E_{\mathcal{F}}(r_2\, r_1))^{-1}(\downarrow w).$$

Les fonctions $\alpha = (E_{\mathcal{F}}(r_2))(E_{\mathcal{F}}(r_1))$ et $\beta = E_{\mathcal{F}}(r_2\, r_1)$ vérifient donc, pour tout $w \in E_{\mathcal{F}}(Q)$, $\alpha^{-1}(\downarrow w) = \beta^{-1}(\downarrow w)$. Pour $v \in E_{\mathcal{F}}(P)$, on a donc $v \in \alpha^{-1}(\downarrow(\alpha(v))) = \beta^{-1}(\downarrow(\alpha(v)))$, d'où $\beta(v) \leq \alpha(v)$. De même $\alpha(v) \leq \beta(v)$. Donc : $\alpha = \beta$. ∎

Dans le même contexte, on a la proposition suivante.

Proposition 3. *Un morphisme fonctoriel* $F \xrightarrow{\bullet} E_{\mathcal{F}}$.

Soit F *l'endofoncteur* $E_{\wp(S)}$. *L'opérateur de fermeture* $\mu_P : P^S \longrightarrow F_{\mathcal{F}}(P)$ *(associé à un treillis complet* P *) permet de définir un morphisme fonctoriel* $\mu : F \xrightarrow{\bullet} E_{\mathcal{F}}$.

Preuve - Utilisons le fait (vu au cours de la démonstration de la proposition 2) que, pour $w \in E_{\mathcal{F}}(Q)$, $r'w$ appartient à $E_{\mathcal{F}}(P)$ et que la fonction résiduée $E_{\mathcal{F}}(r)$ a pour associée : $w \longmapsto r'w$.

On a, pour $v \in P^S$ (avec des notations évidentes) :

$$((E_{\mathcal{F}}(r))(\mu_P))(v) = (E_{\mathcal{F}}(r))(\bar{v})$$

$$= \bigwedge \{ w \in E_{\mathcal{F}}(Q) \ / \ r\bar{v} \leq w \}$$

$$\begin{tikzcd} E_{\mathcal{F}}(P) \arrow[r, "E\mathcal{F}(r)"] & E_{\mathcal{F}}(Q) \\ P^S \arrow[u, "\mu_P"] \arrow[r, "F(r)"'] & Q^S \arrow[u, "\mu_Q"'] \end{tikzcd}$$

Mais, pour $v \in P^S$ et $w \in E_{\mathcal{F}}(Q)$, on a :

$$r\bar{v} \leq w \Leftrightarrow \bar{v} \leq r'w \Leftrightarrow v \leq r'w \Leftrightarrow rv \leq w.$$

Donc : $((E_{\mathcal{F}}(r))(\mu_P))(v) = \bigwedge \{ w \in E_{\mathcal{F}}(Q) \ / \ rv \leq w \} = \mu_Q(rv) = ((\mu_Q)\, F(r))(v).$

Ainsi le diagramme dessiné est commutatif.

On voit qu'à tout espace de fermeture $(S, \mathcal{F})$ on peut associer l'endofoncteur "extension" $E_{\mathcal{F}}$ et le morphisme fonctoriel $\mu : F \xrightarrow{\bullet} E_{\mathcal{F}}$.

Il reste maintenant à examiner le lien avec l'extension de KAN (voir [3]).

L'ambiance du «séminaire de Mathématiques Floues» du Pr. D. PONASSE (Lyon, FRANCE) et celle de l'«East European Category Seminar' 88» (février - mars 1988, Predela, BULGARIE) organisé par le Pr. V. TOPENTCHAROV ne sont pas étrangères à l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

[1] A. ACHACHE, *How to fuzzify a closure space*, J. Math. Anal. Appl., 130 (1988), 538-544.

[2] T.S. BLYTH, M.F. JANOWITZ, *Residuation Theory*, Pergamon Press, 1972.

[3] S. Mac LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1971.

Abstract.

Let $\mathfrak{L}$ be the category of residuated mappings between complete lattices. From a set S, an endofunctor F can be defined (for an object P and an arrow $r : P \longrightarrow Q$) by $F(P) = P^S$ and $(F(r))(v) = rv$. From each $\cap$-closed subset $\mathfrak{F}$ of $\wp(S)$, an endofunctor $E_{\mathfrak{F}}$ cans be defined by $E_{\mathfrak{F}}(P) = \{v \in P^S \,/\, \forall t \in P,\ v^{-1}(\uparrow t) \in \mathfrak{F}\}$ and $(E_{\mathfrak{F}}(r))(v) = \bigwedge \{w \in E_{\mathfrak{F}}(Q) \,/\, rv \leq w\}$. By means of the closure operator $\mu_{\mathfrak{F}}(P) : F(P) \longrightarrow E_{\mathfrak{F}}(P)$, it can then be defined (for each $\mathfrak{F}$) a functorial morphism : $F \xrightarrow{\bullet} E_{\mathfrak{F}}$.

Received by the editors February 23 ,1989.