Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 19,1,207–237 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

О ДВУХ КЛАССАХ АЛГЕБР БЛИЗКИХ ГРУППАМ

Янез Ушан

Institute of Mathematics, University of Novi Sad,
21000 Novi Sad, Dr Ilije Djuričića 4, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В работе определяются и рассматриваются классы алгебр среди которых, кроме групп, являются, например, клики [1] и полуклики [2]. Алгебры этых классов автор позволил себе назвать R-группами и L-группамы.

*

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1_1</u>. Пусть $\square$ бинарная операция в множестве G. Пусть, далее, f подстановка множества G, удовлетворяющая условию

(O) $$f \bullet f = I,$$

где $\bullet$ является умножением подстановок, а I единичная подстановка множества G. Объект $(G,\square,f)$ назовем R-группой[1)] тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>RG1</u> $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a \square b)\square c = a \square f(fb \square c)$; и

<u>RG2</u> $(\exists i \in G)(\exists j \in G)(\forall a \in G)(\exists {}^{\vartriangle}a \in G)(\exists a^{\vartriangle} \in G)(\exists {}^{\blacktriangle}a \in G)$

$(\exists a^{\blacktriangle} \in G)(a \square i = a \wedge j \square a = fa \wedge {}^{\vartriangle}a \square a = i \wedge$

$\wedge\ a \square a^{\vartriangle} = i \wedge {}^{\blacktriangle}a \square a = j \wedge a \square a^{\blacktriangle} = j)$.

1) правой-группой.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: quasigroups, groups, R-groups. L-groups, cliques, semicliques.

Примечание 1.

Если $f = I$, то речь идет о группах.

ЛЕММА 1. Пусть $\square$ бинарная операция в множестве G. Пусть, далее, f подстановка множества G, удовлетворяющая условию

$$f \bullet f = I, \tag{o}$$

где $\bullet$ умножение подстановок, а I единичная подстановка множества G. Тогда справедливо:

1° Если существуют $i, j \in G$ удовлетворяющие условию

$$a \square i = a \wedge j \square b = fb \text{ для любых } a, b \in G, \tag{1}$$

то имеет место:

$$fi = j^{1)} \text{ ; и} \tag{2}$$

2° не существуют больше чем один $i \in G$ и больше чем один $j \in G$ удовлетворяющие условию (1).

Доказательство.

а) Ввиду (1), находим, что имеет место:

$$j \square i = j \wedge j \square i = fi.$$

Отсюда получаем равенство (2).

б) Пусть существуют $i, j \in G$ и $\bar{i}, \bar{j} \in G$ удовлетворяющие условиям:

$$a \square i = a \wedge j \square a = fa \text{ и}$$

$$b \square \bar{i} = b \wedge \bar{j} \square b = fb$$

для любых $a, b \in G$, т.е., ввиду (2), условиям

$$a \square i = a \wedge fi \square a = fa \qquad \text{и}$$

[1] и: $fj = i$, ввиду (0).

$$b \mathbin{\square} \bar{i} = b \wedge f\bar{i} \mathbin{\square} b = fb$$

для любых $a, b \in G$. Отсюда, например, для $a = f\bar{i}$ и $b = i$, получаем, что имеют место равенства

$$f\bar{i} \mathbin{\square} i = f\bar{i} \quad \text{и} \quad f\bar{i} \mathbin{\square} i = fi,$$

т.е., что имеет место равенство

$$f\bar{i} = fi.$$

Так как f подстановка множества G, и утвреждение под б) доказано.

Учитывая определение 1_1 и лемму 1, находим что имеет место следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 2</u>. Пусть $(G, \square, f)$ R-группа. Тогда справедливо:

$\bar{1}$. если $i \in G$ и $j \in G$ удовлетворяют условию RG2, то имеет место:

(2) $$fi = j^{1)} \;; \quad \text{и}$$

$\bar{2}$. существуют в точности один $i \in G$ и в точности один $j \in G$ удовлетворяющие формуле под RG2.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 3</u>. Пусть $(G, \square, f)$ R-группа. Тогда в $(G; \square)$ выполняются законы сокращения:

$$(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a \mathbin{\square} c = b \mathbin{\square} c \Rightarrow a = b) \quad \text{и}$$

$$(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(c \mathbin{\square} a = c \mathbin{\square} b \Rightarrow a = b).$$

<u>Доказательство.</u>

а) Пусть $a, b, c \in G$ удовлетворяют условию $a \mathbin{\square} c = b \mathbin{\square} c$. Тогда, учитывая RG1, RG2 и утверждение 2, находим, что имеет место следующая цепь импликации:

1) и: $fj = i$, ввиду (0).

$$a \square c = b \square c \Rightarrow (a \square c) \square (fc)^{◣} = (b \square c) \square (fc)^{◣}$$

$$\Rightarrow a \square f(fc \square (fc)^{◣}) = b \square f(fc \square (fc)^{◣})$$

$$\Rightarrow a \square fj = b \square fj$$

$$\Rightarrow a \square i = b \square i$$

$$\Rightarrow a = b,$$

т.е., что имеет место импликация:

$$a \square c = b \square c \Rightarrow a = b.$$

б) Пусть $a, b, c \in G$ удовлетворяют условию $c \square a = c \square b$. Тогда, учитывая RG 1, RG2 и факт, что f подстановка множества G удовлетворяющая условию (0), находим, что имеет место следующая цепь импликации:

$$c \square a = c \square b \Rightarrow f(c \square a) = f(c \square b)$$

$$\Rightarrow f(ffc \square a) = f(ffc \square b)$$

$$\Rightarrow {}^{◢}(fc) \square f(ffc \square a) =$$

$$= {}^{◢}(fc) \square f(ffc \square b) \Rightarrow ({}^{◢}(fc) \square fc) \square a$$

$$= ({}^{◢}(fc) \square fc) \square b \Rightarrow j \square a = j \square b$$

$$\Rightarrow fa = fb \Rightarrow a = b,$$

т.е., что имеет место импликация:

$$c \square a = c \square b \Rightarrow a = b.$$

В самом деле, утверждение доказано.

Учитывая лемму 1 и утверждение 3, находим, что имеет место:

<u>ЛЕММА 4</u>. Пусть $(G, \square, f)$ R-группа. Тогда множества △, ◺, ◢ и ◣, определена следующим образом

$$\triangle \overset{\text{деф}}{=} \{ a, {}^{\triangle}a) | a \in G\},$$

$$\triangleright \overset{\text{деф}}{=} \{ a, a^{\triangleright}) | a \in G\},$$

$$\blacktriangle \overset{\text{деф}}{=} \{ a, {}^{\blacktriangle}a) | a \in G\} \text{ и}$$

$$\blacktriangleright \overset{\text{деф}}{=} \{(a, a^{\blacktriangleright}) | a \in G\},$$

вляются унарными операциями в множестве G.

Ввиду леммы 1 и леммы 4 имеет место:

<u>ТЕОРЕМА 5</u>. Пусть $(G,\square,f)$ R-группа. Пусть, далее, $\triangle$, $\triangleright$, $\blacktriangle$ и $\blacktriangleright$ унарные операции в G, а i нульарная операция в множестве G. Тогда R-группе $(G,\square,f)$ однозначно соответствует объект $(G,\square,f,\triangle,\triangleright,\blacktriangle,\blacktriangleright,i)$ удовлетворяющий условиям:

<u>VRG1</u> $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a \square b) \square c = a \square f(fb \square c)$;

<u>VRG2</u> $(\forall a \in G)(a \square i = a \wedge fi \square a = fa)$; и

<u>VRG3</u> $(\forall a \in G)({}^{\triangle}a \square a = i \wedge a \square a^{\triangleright} = i \wedge {}^{\blacktriangle}a \square a = fi \wedge$

$$\wedge\ a \square a^{\blacktriangleright} = fi).$$

И обратно.

<u>Примечание 2</u>.

Ввиду теоремы 5, объект $(G,\square,f,\triangle,\triangleright,\blacktriangle,\blacktriangleright,i)$, удовлетворяющий условиям VRG1 - VRG3, также, позволим себе назвать R-группой.

Ввиду монотонии и утверждения 3, имеет место:

<u>ЛЕММА 6</u>. Если $(G,\square,f)$ R-группа, то в $(G,\square)$ имеют место формулы:

(3_1) $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a = b \Leftrightarrow a \square c = b \square c)$ и

(3_2) $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a = b \Leftrightarrow c \square a = c \square b)$.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 7_1</u>. Пусть $(G,\square,f)$ R-группа. Тогда $(G,\square)$ квазигруппа и имеет место:

$$(4_1) \qquad a \,\square\, x = b \iff x = f({}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb) \qquad \text{и}$$

$$(4_2) \qquad y \,\square\, a = b \iff y = b \,\square\, (fa)^{\blacktriangle}.$$

<u>Доказательство</u>.

а) Учитывая факт, что f подстановка множества G удовлетворяющая условию (O), RG1 и RG2, ввиду леммы 6, находим, что имеет место следующая цепь эквиваленции:

$$\begin{aligned} a \,\square\, x = b &\iff f(a \,\square\, x) = fb \\ &\iff f(ffa \,\square\, x) = fb \\ &\iff {}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, f(ffa \,\square\, x) = {}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb \\ &\iff ({}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fa) \,\square\, x = {}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb \\ &\iff j \,\square\, x = {}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb \\ &\iff fx = {}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb \\ &\iff x = f({}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что имеет место эквиваленция:

$$(4_1) \qquad a \,\square\, x = b \iff x = f({}^{\blacktriangle}(fa) \,\square\, fb).$$

Ввиду леммы 4 и факта, что (4_1) имеет место для любых $a,b \in G$, из (4_1) находим, что уравнение $a \,\square\, x = b$ однозначно разрешимо для любых $a,b \in G$.

б) Учитывая RG1, RG2 и утверждение 2, ввиду леммы 6, находим, что имеет место следующая цепь эквиваленции:

$$\begin{aligned} y \,\square\, a = b &\iff (y \,\square\, a) \,\square\, (fa)^{\blacktriangle} = b \,\square\, (fa)^{\blacktriangle} \\ &\iff y \,\square\, f(fa \,\square\, (fa)^{\blacktriangle}) = b \,\square\, (fa)^{\blacktriangle} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ y \square fj = b \square (fa)^{◣}$$

$$\Leftrightarrow\ y \square i = b \square (fa)^{◣}$$

$$\Leftrightarrow\ y = b \square (fa)^{◣}.$$

Отсюда получаем что имеет место эквиваленция:

(4_2) $$y \square a = b \Leftrightarrow y = b \square (fa)^{◣}.$$

Ввиду лемы 4 и факта, что (4_2) имеет место для любых $a,b \in G$, из (4_2) находим, что уравнение $y \square a = b$ однозначно разрешимо для любых $a,b \in G$.

<u>Примечание 3</u>.

Учитывая утверждение 7_1, находим, что ◿, ◺, ◢ и ◣ являются подстановками множества G. Притом, если ◿ = ◺ (◢ = ◣), то ◿ (◢) удовлетворяет условию $◿ \bullet ◿ = I$ ($◢ \bullet ◢ = I$).

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 7_2</u>. Пуст $\square$ бинарная операция в множестве G. Пусть, далее, f подстановка множества G удовлетворяющая условию

(о) $$f \bullet f = I,$$

где $\bullet$ умножение подстановок а I единичная подстановка. Тогда, <u>если</u> имеет место RG1 и $(G,\square)$ является квазигруппой, то $(G,\square,f)$ является R-группой.

<u>Доказательство</u>.

а) Пусть a любой фиксированый элемент множества G. Так как $(G,\square)$ квазигруппа, то существует в точности один $i_a \in G$ такой, что имеет место

(а) $$a \square i_a = a.$$

Притом, для любого $b \in G$ существует в точности один $y \in G$ такой, что имеет место

(б) $$b = y \square fa.$$

Далее, учитывая RG1, (o), (a) и (б), находим, что имеет место следующая цепь равенств:

$$b \circ i_a = (y \circ fa) \circ i_a = y \circ f(ffa \circ i_a) =$$

$$= y \circ f(a \circ i_a) = y \circ fa =$$

$$= b.$$

Таким образом, мы доказали, что имеет место формула:

(в) $$(\exists! i \in G)(\forall x \in G) x \circ i = x.$$

б) Пусть a любой фиксированый элемент множества G. Так как $(G, \circ)$ квазигруппа, то существует в точности один $j_a \in$ $\in G$ такой, что имеет место

($\bar{a}$) $$j_a \circ a = fa.$$

Притом, для любого $b \in G$ существует в точности один $x \in G$ такой, что имеет место

($\bar{б}$) $$b = f(fa \circ x)^{1)}.$$

Далее, учитывая RG 1, ($\bar{a}$) и ($\bar{б}$), находим, что имеет место следующая цепь равенств:

$$j_a \circ b = j_a \circ f(fa \circ x) = (j_a \circ a) \circ x$$

$$= fa \circ x = fb.$$

Таким образом, мы доказали, что имеет место формула:

($\bar{в}$) $$(\exists! j \in G)(\forall y \in G) j \circ y = fy.$$

в) Ввиду (в) и ($\bar{в}$), находим, что имеют место равенства

---

1) $\Leftrightarrow fb = fa \circ x.$

$$j \square i = j \quad \text{и} \quad j \square i = fi,$$

т.е. равенство

(г) $$j = fi$$[1] .

г) Учитывая (в), ($\bar{\text{в}}$) и (г), находим, что имеет место VRG2 из теоремы 5.

д) Ввиду предположения, что $(G,\square)$ квазигруппа, имеет место и VRG3 из теоремы 5.

Наконец, учитывая теорему 5, находим, что утверждение доказано.

Непосредственным следствием утверждения 7_1 и утверждения 7_2 является следующая:

<u>ТЕОРЕМА 8</u>. $(G,\square,f)$ является R-группой тогда и только тогда, когда имеет место RG1 и $(G,\square)$ является квазигруппой.

Нахождением решений уравнений

$$(a \square b) \square x = i, \quad y \square f(a \square b) = i,$$

$$(a \square b) \square u = j \quad \text{и} \quad v \square f(a \square b) = j,$$

полученых различними способами, ввиду утверждения 7_1, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>ТЕОРЕМА 9</u>. Пусть $(G,f,\text{◿},\text{◺},\text{◢},\text{◣},i)$ R-группа[2] . Тогда имеют место равенства:

(5_1) $$(a \square b)^{\text{◺}} = f((^{\text{◢}}b \square f^{\text{◢}}(fa)) \square fi);$$

(5_2) $$^{\text{◿}}(f(a \square b)) = (i \square (fb)^{\text{◣}}) \square a^{\text{◣}} ;$$

(5_3) $$(a \square b)^{\text{◣}} = f(^{\text{◢}}b \square f(^{\text{◢}}(fa))) \text{ и}$$

---

1) Ввиду (о), и: $fj = i$.

2) См. примечание 2.

$$(5_4) \qquad {}^{\blacktriangleleft}(f(a \square b)) = f((fb)^{\blacktriangleright}) \square a^{\blacktriangleright}$$

для любых $a,b \in G$.

Примечание 4.

Если $f = I$, то $(G,\square,^{-1},i)$, где $-1 = \triangleleft = \triangleright = \blacktriangleleft = \blacktriangleright$, является группой. Учитывая этот факт, мы находим, что каждое из равенств (5_1)-(5_4) сводится к равенству

$$(5) \qquad (a \square b)^{-1} = b^{-1} \square a^{-1}$$

для любых $a,b \in G$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $(G,\square,f)$ R-группа. Тогда квазигруппа, $(G,\square)$ изотопна[1)] некоторой группе $(G,*)$.

Доказательство.

Положим:

$$(6_1) \qquad a * b \overset{\text{деф}}{=\!=} a \square fb$$

для любых $a,b \in G$. Ввиду (o), равенство под (6_1) эквивалентно равенству

$$(6_2) \qquad a \square b = a * fb$$

для любых $a,b \in G$.

Используя (6_1) и (6_2) в RG1, находим, что имеет место равенство

$$(a * fb) * fc = a * ff(fb * fc)$$

для любых $a,b,c \in G$. Отсюда, ввиду факта, что f подстановка множества G удовлетворяющая (o), находим, что $(G,*)$ является полугруппой.

Далее, ввиду (6_1), $(G,\square)$ и $(G,*)$ изотопны. Отсюда,

1) например: [3-5].

учитывая утверждение 7_1, находим, что $(G,*)$ является и квазигруппой[1].

Таким образом, мы доказали, что $(G,*)$ является группой, изотопной квазигруппе $(G,\square)$.

Подобным способом доказивается следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 11</u>. Пусть $(G,*)$ группа, а f подстановка множества G удовлетворяющая условию (o)[2]. Пусть, далее, имеет место

$$a \square b \stackrel{\text{деф}}{=\!=} a * fb$$

для любых $a,b \in G$. Тогда $(G,\square,f)$ является R-группой.

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	6	5	2	1	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	1	6	3	2
6	6	3	2	5	4	1

Табл. 1_1

□	1	2	3	4	5	6
1	3	4	1	2	6	5
2	4	3	2	1	5	6
3	5	2	3	6	4	1
4	6	1	4	5	3	2
5	1	6	5	4	2	3
6	2	5	6	3	1	4

Табл. 1_2

На табл. 1_1 изображена группа $(\{1,\dots,6\},*)$ изоморфна группе подстановок множества $\{a,b,c\}$, т.е. группе $(\{a,b,c\}!,\mathrm{o})$[3]. На табл. 1_2 изображена квазигруппа $(\{1,\dots,6\},\square)$, где

$$x \square y \stackrel{\text{деф}}{=\!=} x * fy \quad \text{и}$$

$$f \stackrel{\text{деф}}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

---

[1] Изотоп квазигруппы и сам является квазигруппой; например [3-5].

[2] см. определение 1_1.

[3] $1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, $3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $5 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $6 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Так как f удовлетворяет условию (o)[1], ввиду утверждения 11, ({1,...,6},□,f) является R-группой. Притом имеет место:

$$i = 3,\ j = fi = f3 = 1^{2)};$$

$$⊿ = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,6);(5,4);(6,5)\};$$

$$◺ = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,5);(5,6);(6,4)\};$$

$$◢ = \{(1,5);(2,4);(3,1);(4,2);(5,6);(6,3)\};\ \text{и}$$

$$◣ = \{(1,3);(2,4);(3,6);(4,2);(5,1);(6,5)\}.$$

Заметим, что в рассматриваемой R-группе имеет место:

$$i \neq j \quad \text{и} \quad |\{⊿, ◺, ◢, ◣\}| = 4.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 12</u>. Существует R-группа (G,□,f,⊿,◺,◢,◣,i)[3] в которой справедливо:

$$fi \neq i \quad \text{и} \quad |\{⊿, ◺, ◢, ◣\}| = 4.$$

<u>ТЕОРЕМА 13_1</u>. Пусть (G,□,f,⊿,◺,◢,◣,i) R-группа. Пусть, далее,

(6_1) $$a * b \overset{\text{деф}}{=} a \,\square\, fb^{4)}$$

для любых a,b ∈ G. Тогда, если

(7) $$⊿ = ◺ = ◢ = ◣ = I,$$

то (G,*,f,i) группа, где i единица a fa ∈ G обратный элемент элемента a ∈ G для любого a ∈ G.

---

1) см. определение 1_1.

2) i = 3 правая единица в (G,□), a j = 1 единица в (G,*)!

3) см. примечание 2.

4) <=> a □ b = a * fb; (6_2).

Доказательство.

а) Ввиду доказательства теоремы 10, (G,*) группа.

б) Ввиду (7), имеют место равенства:

$$a \square a = i \quad и \quad a \square a = fi^{1)}$$

для любого $a \in G$. Отсюда следует, что

$$fi = i.$$

в) Ввиду б) ($fi = i$), имеет место

$$a \square i = a \quad и \quad i \square a = fa$$

для любого $a \in G$. Отсюда, учитывая (6_1), находим, что имеет место

$$a * fi = a \quad и \quad i * fa = fa$$

для любого $a \in G$. Таким образом, ввиду б) ($fi = i$) и факта, что f подстановка множества G, i является единицей группы ($G,*$).

г) Ввиду (7), имеет место равенство

$$a \square a = i$$

для любого $a \in G$. Отсюда, ввиду (6_1), находим, что

$$a * fa = i$$

для любого $a \in G$, т.е., что fa правый обратный элемент элемента $a \in G$ для любого $a \in G$. Таким образом, ввиду факта, что ($G,*$) группа, мы доказали, что fa обратный элемент элемента $a \in G$ для любого $a \in G$.

Теорема доказана.

Подобным способом доказывается и следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 13_2. Пусть ($G,*,f,i$) группа, где i единица а f унарная операция - взятие обратного элемента. Пусть, далее,

(6_2) $$a \square b = a * fb$$

[1] $fi = j$; см. утверждение 2.

для любых $a,b \in G$. Тогда $(G,\square,f,$◿,◺,◢,◣$,i)$ R-группа в которой имеют место равенства

$$◿ = ◺ = ◢ = ◣ = I^{1)} .$$

Учитывая равенства под (7) из теоремы 13_1 в равенстве под (5_4) из теоремы 9, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 14</u>. Если в R-группе $(G,\square,f,$◿,◺,◢,◣$,i)$ имеют место равенства

$$◿ = ◺ = ◢ = ◣ = I^{1)},$$

то имеет место равенство

$$f(a \square b) = b \square a \tag{8}$$

для любых $a,b \in G$.

Притом, обратное не имеет место. На табл. 1_1 изображена группа $(\{1,\ldots,6\},*)$ изоморфна группе подстановок множества $\{a,b,c\}$, т.е. группе $(\{a,b,c\}!,\bullet)$. На табл. 1_3 изображена квазигруппа $(\{1,\ldots,6\},\square)$, где

$\square$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	6	5	4
2	2	1	4	5	6	3
3	3	6	5	4	1	2
4	4	5	6	3	2	1
5	5	4	1	2	3	6
6	6	3	2	1	4	5

Табл. 1_3

$$x \square y \overset{\text{деф}}{=} x * fy \quad \text{и}$$

$$f \overset{\text{деф}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как f удовлетворяет условию (o)[2], ввиду утверждения 11, $(\{1,\ldots,6\},\square,f)$ является R-группой. Непосредствено из табл. 1_3 находим, что имеет место:

$$i = 1, \quad j = fi = f1 = 1; \quad \text{и}$$

---

1) равенства под (7) из теоремы 13_1.

2) см. определение 1_1.

◿ = ◺ = ◢ = ◣ = {(1,1);(2,2);(3,5);(4,6);(5,3);(6,4)} ≠ I. Притом, проверкой находим, что имеет место равенство:

$$f(a \square b) = b \square a$$

для любых $a,b \in G$. Таким образом имеет место:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 15</u>. Существует R-группа (G,□,f,◿,◺,◢,◣,i) неудовлетворяющая условию под (7) из теоремы 13_1 в которой имеет место равенство

(8) $$f(a \square b) = b \square a$$

для любых $a,b \in G$.

Притом имеет место следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 16</u>. Пусть в R-группе (G,□,f,◿,◺,◢,◣,i) имеет место равенство

(8) $$f(a \square b) = b \square a$$

для любых $a,b \in G$. Тогда справедливо:

$\bar{1}$. $fi = i$; и

$\bar{2}$. ◿ = ◺ = ◢ = ◣ .

<u>Доказательство</u>.

Из равенства под (8) для $a = b = i$ вытекает равенство

$$f(i \square i) = i \square i.$$

Отсюда, ввиду VRG2 из теоремы 5, вытекает равенство

$$fi = i.$$

Далее, из

$$^{◿}a \square a = i \quad \text{и} \quad ^{◢}a \square a = i\text{[1)]},$$

ввиду (8) и $fi = i$, вытекают равенства

1) мы уже доказали, что $j = fi = i$; $\bar{1}$.

$$a \,\square\, {}^{◿}a = i \quad \text{и} \quad a \,\square\, {}^{◢}a = i\,.$$

Таким образом, ввиду утверждения 3, мы доказали, что имеет место равенства:

$$◿ = ◺ = ◢ = ◣\,.$$

Утверждение доказано.

Притом, обратное не имеет место. На табл. 1_1 изображена группа $(\{1,\dots,6\},*)$ изоморфна группе подстановок множества $\{a,b,c\}$, т.е. группе $(\{a,b,c\}!,\circ)$. На табл. 1_4 изображена квазигруппа $(\{1,\dots,6\},\square)$, где

□	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	6	3	4
2	2	1	6	5	4	3
3	3	6	1	4	5	2
4	4	5	2	3	6	1
5	5	4	3	2	1	6
6	6	3	4	1	2	5

Табл. 1_4

$$x \,\square\, y \overset{\text{деф}}{=\!=} x * fy \quad \text{и}$$

$$f \overset{\text{деф}}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как f удовлетворяет условию (o), ввиду утверждения 11, $(\{1,\dots,6\},\square,f)$ является R-группой. Непосредствено из табл. 1_4 находим, что имеет место:

$$i = 1, \quad j = fi = f1 = 1;$$

$$◿ = ◺ = ◢ = ◣ = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,6);(5,5);(6,4)\}; \text{ и}$$

$$f(3 \,\square\, 4) = f4 = 6 \neq 4 \,\square\, 3 = 2.$$

Таким образом имеет место:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 17</u>. Существует R-группа $(G,\square,f,◿,◺,◢,◣,i)$ в которой не имеет место формула

$$(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \,\square\, b) = b \,\square\, a$$

и имеют место $\bar{1}$ и $\bar{2}$ из утверждения 16.

Притом имеет место следующее утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 18.</u> Пусть в R-группе $(G, \square, f, \triangleleft, \triangleright, \blacktriangleleft, \blacktriangleright, i)$ имеет место равенство

$$f(a \square b) = fa \square fb \tag{9}$$

для любых $a, b \in G$[1]. Тогда справедливо:

$\bar{1}$. $fi = i$; и

$\bar{2}$ $\triangleleft = \triangleright = \blacktriangleleft = \blacktriangleright$.

<u>Доказательство</u>.

а) Ввиду предположения, что f автоморфизм квазигруппы $(G, \square)$, имеет место равенство

$$f(i \square i) = fi \square fi.$$

Отсюда, ввиду VRG2 из теоремы 5, находим, что имеет место равенство

$$fi = fi \square fi.$$

Отсюда, как так, ввиду VRG2 из теоремы 5, имеет место равенство

$$fi = fi \square i,$$

учитывая утверждение 3, находим, что

$$fi = i.$$

б) Ввиду равенства $i = fi$ $(= j)$, на основании утверждения 3, имеют место равенства

$$\triangleleft = \blacktriangleleft \quad \text{и} \quad \triangleright = \blacktriangleright.$$

в) Ввиду VRG2 из теоремы 5 и равенства $fi = i$, имеют место равенства

$$({}^{\triangleleft}a \square a) \square (fa)^{\triangleright} = i \square (fa)^{\triangleright} = f((fa)^{\triangleright}) \quad \text{и}$$

---

[1] т.е.: пусть f автоморфизм квазигруппы $(G, \square)$.

$$\text{⊿}a \;\square\; f(fa \;\square\; (fa)^{\text{◺}}) = \text{⊿}a \;\square\; i = \text{⊿}a.$$

Отсюда, ввиду VPG1 из теоремы 5, находим, что имеет место равенство

$$f((fa)^{\text{◺}}) = \text{⊿}a,$$

т.е., ввиду (o), равенство

$$(fa)^{\text{◺}} = f(\text{⊿}a).$$

г) Ввиду предположения, что f автоморфизм квазигруппы $(G,\square)$ и равенства $fi = i$, находим, что имеют место равенства

$$i = fi = f(\text{⊿}a \;\square\; a) = f(\text{⊿}a) \;\square\; fa,$$

т.е. равенство:

$$f(\text{⊿}a) \;\square\; fa = i.$$

Отсюда, ввиду равенства доказаного под в), находим, что имеет место равенство:

$$(fa)^{\text{◺}} \;\square\; fa = i.$$

Отсюда, как так, ввиду VRG3, имеет место и равенство

$$fa \;\square\; (fa)^{\text{◺}} = i,$$

учитывая факт, что f подстановка множества G, находим, что

$$\text{⊿} = \text{◺}.$$

Наконец, отсюда, ввиду равенств доказаных под б), находим, что

$$\text{⊿} = \text{◺} = \text{◢} = \text{◣}.$$

Утверждение доказано.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 19</u>. Пусть $(G,\square,f,\text{⊿},\text{◺},\text{◢},\text{◣},i)$ R-группа. Тогда, <u>если</u>

(10) $$fi = i,$$

то имеет место:

(10_1) $$(fa)^{◺} = f({}^{⊿}a);$$

(10_2) $${}^{⊿}(fa) = f(a^{◺}); \quad \text{и}$$

(10_3) $$(a \,\square\, b)^{◺} = f({}^{⊿}b \,\square\, a^{◺})^{1)},$$

для любых $a, b \in G$.

Доказательство.

а) Равенство под (10_1) доказано в рамках доказательства утверждения 18 под в).

б) Так как f подстановка множества G, удовлетворяющая условию (о), мы из равенства под (10_1) получаем равенство

$$a^{◺} = f({}^{⊿}(fa))$$

для любого $a \in G$. Отсюда, ввиду факта, что f подстановка множества G удовлетворяющая условию под (о), находим, что имеет место равенство под (10_2) для любого $a \in G$.

в) Равенство под (10_3) является частным случаем каждого из равенств под (5_1)-(5_4) из теоремы 9. В самом деле, ввиду справедливости равенств под (10), (10_1), (10_2), так как при $fi = i$ имеют место равенства ${⊿} = {◢}$ и ${◺} = {◣}$, каждое из равенств под (5_1)-(5_4) превращается в равенство под (10_3) для любого $a \in G$.

На табл. 1_1 изображена группа $(\{1,\dots,6\},*)$, изоморфная группе подстановок множества $\{a,b,c\}$, т.е. группе $(\{a,b,c\}!, \circ)$. На табл. 1_5 изображена квазигруппа $(\{1,\dots,6\},\square)$, где

$$x \,\square\, y \overset{\text{деф}}{=} x * fy \quad \text{и}$$

$$f \overset{\text{деф}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

1) Если $fi = i$, то ${◢} = {⊿}$ и ${◣} = {◺}$.

□	1	2	3	4	5	6
1	1	2	6	5	4	3
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	4	1	2	5
4	4	5	3	2	1	6
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	1	4	5	2

Табл. 1_5

Так как f удовлетворяет условию (o), ввиду утверждения 11, ({1,...,6},□,f) является R-группой. Непосредствено из табл. 1_5 находим, что имеет место:

i = 1, fi = 1 (= i);

◿ = {(1,1);(2,2);(3,6);(4,3);(5,4);(6,5)};

◺ = {(1,1);(2,2);(3,4);(4,5);(5,6);(6,3)}; и

◢ = ◿ ≠ ◣ = ◺ .

Таким образом имеет место:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 20.</u> Существует R-группа (G,□,f,◿,◺,◢,◣,i) в которой имеет место

fi = i; и

◢ = ◿ ≠ ◺ = ◣ .

Если имеют место равенства ◿ = ◺ = ◢ = ◣, то имеет место равенство fi = i. Отсюда, ввиду утверждения 19, находим, что имеет место утверждение:

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 21</u>. Пусть (G,□,f,◿,◺,◢,◣,i) R-группа. Тогда, если

(11) ◿ = ◺ = ◢ = ◣ ,

<u>то</u> имеет место:

(11_1) fi = i;

(11_2) $(fa)^{◺} = f(a^{◺})$[1] ; и

[1] т.е.: ◺ • f = f • ◺ . Притом, смотри примечание 3.

(11$_3$) $$(a \square b)^{\text{◺}} = f(b^{\text{◺}} \square a^{\text{◺}}),$$

для любых $a, b \in G$.

Учитывая утверждение 16 и утверждение 21, находим, что имеет место:

<u>ТЕОРЕМА 22.</u> Если в R-группе $(G, \square, f, \text{◿}, \text{◺}, \text{◢}, \text{◣}, i)$, справедлива формула

<u>VRG4</u>[1] $$(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \square b) = b \square a$$[2],

тогда имеет место:

$\bar{1}$. $fi = i$;

$\bar{2}$. $\text{◿} = \text{◺} = \text{◢} = \text{◣}$; и

$\bar{3}$. $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(a \square b)^{\text{◺}} = a^{\text{◺}} \square b^{\text{◺}}$

Учитывая утверждение 18 и утверждение 21, находим, что имеет место:

<u>ТЕОРЕМА 23.</u> Если в R-группе $(G, \square, f, \text{◿}, \text{◺}, \text{◢}, \text{◣}, i)$ справедлива формула

<u>VRG5</u>[1] $$(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \square b) = fa \square fb$$[3],

тогда имеет место:

$\bar{\bar{1}}$ $fi = i$;

$\bar{\bar{2}}$ $\text{◿} = \text{◺} = \text{◢} = \text{◣}$; и

$\bar{\bar{3}}$ $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(a \square b)^{\text{◺}} = (fb)^{\text{◺}} \square (fa)^{\text{◺}}$.

Клика введена в [1] как объект $(G, \square, f)$ (где $\square : G^2 \to G$, $f \in G!$, $f \circ f = I$ и $f \neq I$) удовлетворяющий условиям:

<u>C1</u> $$(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a \square b) \square c = a \square (b \square fc);$$

---

1) см. теорему 5.

2) см. (8) из утверждения 16.

3) см. (9) из утверждения 18.

C2 $(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \square b) = b \square a$[1];

C3 $(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \square b) = fa \square fb$[2]; и

C4 $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\exists x \in G) a \square x = b$.

Притом, в клике имеет место:

ЛЕММА 24_1.[1] Если $(G,\square,f)$ клика, то $(G,\square)$ квазигруппа.

Полуклика введена в [2] как обобщение клики. В самом деле, полуклика объект $(G,\square,f)$ (где $\square : G^2 \to G$, $f \in G!$, $f \circ f = I$ и $f \neq I$) удовлетворяющий условиям:

SC1 $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(a \square b) \square c = a \square f(fb \square c)$[3];

SC2 $(\forall a \in G)(\forall b \in G) f(a \square b) = b \square a$[1]; и

SC3 $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\exists x \in G) a \square x = b$.

Притом, в полуклике имеет место:

ЛЕММА 24_2.[2] Если $(G,\square,f)$ полуклика, то $(G,\square)$ квазигруппа.

Очевидно, что клика полуклика удовлетворяющая условию VRG5 из теоремы 23. Притом, ввиду теоремы 8, леммы 24_1 и леммы 24_2, находим что имеет место:

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. а) $(G,\square,f)$ является полукликой тогда и только тогда, когда $(G,\square,f)$ R-группа удовлетворяющая условию VRG4 и $f \neq I$. б) $(G,\square,f)$ является кликой тогда и только тогда, когда $(G,\square,f)$ R-группа удовлетворяющая условию VRG4, условию VRG5 и $f \neq I$.

Таким образом, утверждения 13-16 и 22, в самом деле, относятся к полукликам. Притом, теорема 13_2, в соответствующем виде, рассмотрена уже в [2].

---

1) VRG4 из теоремы 22.

2) VRG5 из теоремы 23.

3) RG1 из определения 1_1 и VRG1 из теоремы 5.

На табл. 1_2 изображена R-группа удовлетворяющая условиям:

$$i \neq j \quad \text{и} \quad |\{ ⊿, ◺, ◢, ◣ \}| = 4.$$

В утверждениях 16 и 18 речь идет о <u>двух достаточных</u> условиях для спроведливости равенств:

$$j = i \quad \text{и} \quad ⊿ = ◺ = ◢ = ◣ .$$

Притом, на табл. 1_3 и 1_4 изображены соответствующие R-группы. На табл. 1_5 изображена R-группа удовлетворяющая условиям:

$$j = i \quad \text{и} \quad ⊿ = ◢ \neq ◺ = ◣ .$$

На табл. 1_6 изображена R-группа удовлетворяющая условиям:

$$j \neq i \quad \text{и} \quad ⊿ = ◺ \neq ◢ = ◣ .$$

Притом, имеет место:

$$a \,\square\, b \overset{\text{деф}}{=\!=} a * fb, \; f \overset{\text{деф}}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{и}$$

$(\{1,\ldots,6\},*)$ изображена на табл. 1_1.

$\square$	1	2	3	4	5	6
1	2	1	3	6	5	4
2	1	2	4	5	6	3
3	6	3	5	4	1	2
4	5	4	6	3	2	1
5	4	5	1	2	3	6
6	3	6	2	1	4	5

Табл. 1_6

$\square$	1	2	3	4	5	6
1	2	1	3	4	5	6
2	1	2	4	3	6	5
3	6	3	5	2	1	4
4	5	4	6	1	2	3
5	4	5	1	6	3	2
6	3	6	2	5	4	1

Табл. 1_7

На табл. 1_7 изображена R-группа удовлетворяющая условиям:

$$j \neq i \;\; (i = 2,\; j = 1), \quad ⊿ \neq ◺ \quad \text{и} \quad ◢ = ◣ .$$

Притом, имеет место:

$$a \,\square\, b \overset{\text{деф}}{=\!=} a * fb, \quad f \overset{\text{деф}}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{и}$$

$(\{1,\ldots,6\},*)$ изображена на табл. 1_1.

□	1	2	3	4	5	6
1	2	1	4	3	6	5
2	1	2	3	4	5	6
3	6	3	2	5	4	1
4	5	4	1	6	3	2
5	4	5	6	1	2	3
6	3	6	5	2	1	4

Табл. 1_8

На табл. 1_8 изображена R-группа удовлетворяющая условиям:

$$i \neq j \quad (i = 2,\ j = 1),$$

◿ = ◺ и ◢ ≠ ◣.

Притом, имеет место:

$$a \,\square\, b \ \underline{\underline{\text{деф}}}\ a * fb\ ,$$

$$f\ \underline{\underline{\text{деф}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } (\{1,\ldots,6\},*)$$

изображена на табл. 1_1.

Непосредствено находим, что квазигруппа $(\{1,\ldots,6\},\square)$ изображена на табл. 1_8 является лупой, где единица $i = 2$. Отсюда, ввиду теоремы 10, на основании теоремы Алберта,[1] находим, что $(\{1,\ldots,6\},\square)$ является группой (изоморфной группе $(\{1,\ldots,6\},*)$ изображеной на табл. 1_1)[2]. Подобним способом, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>ТЕОРЕМА 26</u>. Пусть $(G,\square,f)$ R-группа. Тогда, если $(G,\square)$ обладает левой единицей, то $(G,\square)$ является группой.

* *

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1_2</u>. Пусть ♦ бинарная операция в множестве G . Пусть, далее, f подстановка множества G, удовлетворяющая условию

$$\text{(o)} \qquad f \bullet f = I,$$

где • является умножением подстановом, а I единичная подстановка множества G. Объект $(G,♦,f)$ назовем L-группой[3] тогда и только тогда, когда имеет место:

---

[1] например: [3-5].

[2] Притом: $f \neq I$.

[3] левой-группой.

$\underline{LG1}$ $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G) f(a \blacklozenge fb) \blacklozenge c = a \blacklozenge (b \blacklozenge c)$; и

$\underline{LG2}$ $(\exists i \subset G)(\exists j \in G)(\forall a \in G)(\exists\, {}^{\leftarrow\square}a \in G)(\exists a^{\square\rightarrow} \in G)(\exists\, {}^{\leftarrow\blacksquare}a \in G)$

$(\exists a^{\blacksquare\rightarrow} \in G)(i \blacklozenge a = a \wedge a \blacklozenge j = fa \wedge {}^{\leftarrow\square}a \blacklozenge a = i \wedge$

$\wedge\, a \blacklozenge a^{\square\rightarrow} = i \wedge {}^{\leftarrow\blacksquare}a \blacklozenge a = j \wedge a \blacklozenge a^{\blacksquare\rightarrow} = j)$.

<u>Примечание 1´</u>.
Если $f = I$, то речь идет о группах.

Пусть $(G,\blacklozenge,f)$ L-группа. Пусть, далее,

(к) $$a \square b \overset{\text{деф}}{=} b \blacklozenge a$$

(для любых $a,b \in G$. Тогда LG1 и LG2 превращаются, в том же порядке, в:

(а) $(\forall a \in b)(\forall b \in G)(\forall c \in G)(c \square b) \square a = c \square f(fb \square a)$; и

(б) $(\exists i \in G)(\exists j \in G)(\forall a \in G)(\exists\, {}^{\leftarrow\square}a \in G)(\exists a^{\square\rightarrow} \in G)($

$(\exists\, {}^{\leftarrow\blacksquare}a \in G)(\exists a^{\blacksquare\rightarrow} \in G)(a \square i = a \wedge j \square a = fa \wedge$

$\wedge\, a \square {}^{\leftarrow\square}a = i \wedge a^{\square\rightarrow} \square a = i \wedge a \square {}^{\leftarrow\blacksquare}a = j \wedge a^{\blacksquare\rightarrow} \square a = j)$.

Формула под (а), в самом деле, является формулом под RG1 из определения 1_1. Если, далее, в формуле под (б)

$${}^{\leftarrow\square}a,\ a^{\square\rightarrow},\ {}^{\leftarrow\blacksquare}a \text{ и } a^{\blacksquare\rightarrow},$$

в том же порядке, обозначим через

$$a^{\vartriangle},\ {}^{\vartriangle}a,\ a^{\blacktriangle} \text{ и } {}^{\blacktriangle}a,$$

то формула под (б) превращется в формулу под RG2 из определения 1_1. Таким образом, $(G,\square,f)$ R-группа. Подобним способом, находим, что если $(G,\square,f)$ R-группа и имеет место

$(\bar{к})$ $$a \blacklozenge b \overset{\text{деф}}{=} b \square a$$

для любых a,b ∈ G, то $(G,\blacklozenge,f)$ является L-группой.

В самом деле, мы доказали, что имеет место следующее утверждение:

<u>ТЕОРЕМА 27.</u> а) Если $(G,\blacklozenge,f)$ L-группа и имеет место

(к) $$a \,\square\, b \overset{\text{деф}}{=\!=} b \blacklozenge a$$

для любых a,b ∈ G , то $(G,\square,f)$ R-группа; и

б) Если $(G,\square,f)$ R-группа и имеет место

($\bar{к}$) $$a \blacklozenge b \overset{\text{деф}}{=\!=} b \,\square\, a$$

для любых a,b ∈ G, то $(G,\blacklozenge,f)$ L-группа.

Учитывая теорему 27 и ее доказательство, находим, что имеют место, например, следующие два утверждения:

<u>ТЕОРЕМА 5´.</u> Пусть $(G,\blacklozenge,f)$ L-группа. Пусть, далее, $\overset{\leftarrow\square}{}$, $\overset{\square\rightarrow}{}$, $\overset{\leftarrow\blacksquare}{}$ и $\overset{\blacksquare\rightarrow}{}$ унарные операции в G, а i нульарная операция в множестве G. Тогда L-группе $(G,\blacklozenge,f)$ однозначно соответствует объект $(G,\blacklozenge,f,\overset{\leftarrow\square}{},\overset{\square\rightarrow}{},\overset{\leftarrow\blacksquare}{},\overset{\blacksquare\rightarrow}{},i)$ удовлетворяющий условиям:

<u>VLG1</u> $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)f(a \blacklozenge fb) \blacklozenge c = a \blacklozenge (b \blacklozenge c)$;

<u>VLG2</u> $(\forall a \in G)(i \blacklozenge a = a \wedge a \blacklozenge fi = fa)$; и

<u>VLG3</u> $(\forall a \in G)({}^{\leftarrow\square}a \blacklozenge a = i \wedge a \blacklozenge a^{\square\rightarrow} = i \wedge {}^{\leftarrow\blacksquare}a \blacklozenge a = j \wedge$
$\wedge\, a \blacklozenge a^{\blacksquare\rightarrow} = j)$.

И обратно.[1)]

<u>ТЕОРЕМА 8´.</u> $(G,\blacklozenge,f)$ является L-группой тогда и только тогда, когда имеет место LG1 и $(G,\blacklozenge)$ являетcя квазигруппой.

Пусть $(G,\blacklozenge,f)$ L-группа. Пусть, далее, имеет место:

[1)] Ввиду теоремы 5´, объект $(G,\blacklozenge,f,\overset{\leftarrow\square}{},\overset{\square\rightarrow}{},\overset{\leftarrow\blacksquare}{},\overset{\blacksquare\rightarrow}{},i)$ удовлетворяющий условиям VLG1-VLG3, также, позволим себе назвать L-группой.

(и) $$a * b \overset{\text{деф}}{=\!=} fa \diamond b$$ [1]

для любых $a,b \in G$. Отсюда, ввиду определения 1_2 ($f \in G$!) и теоремы 8´, находим, что $(G,*)$ квазигруппа. Далее, учитывая (и) и LG1, находим, что $(G,*)$ является и полугруппой. Таким образом, ввиду (и)[1] и определения изотопии[3], мы доказали, что имеет место следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 28. Пусть $(G,\diamond,f)$ L-группа. Тогда квазигруппа $(G,\diamond)$ изотопна некоторой группе $(G,*)$.

Подобным способом доказивается следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. Пусть $(G,*)$ группа, а f подстановка множества G удовлетворяющая условию (о)[2]. Пусть, далее, имеет место

$$a \diamond b \overset{\text{деф}}{=\!=} fa * b$$

для любых $a, b \in G$. Тогда $(G,\diamond,f)$ является L-группой.

ТЕОРЕМА 30. Если (G,Δ,f) является R-группой и L-группой, то (G,Δ) является группой.

Доказательство.

Учитывая определение 1_1 и определение 1_2, находим, что (G,Δ) обладает левой единицей и правой единицей, и поэтому, единицей. Таким образом, ввиду теоремы 8´, (G,Δ) лупа[3]. Далее, так как, ввиду теоремы 28, лупа (G,Δ) изотопна некоторой группе $(G,*)$, то, на основании теоремы Алберта[3], (G,Δ) является группой.

Теорема доказана.

На табл. 2_1 изображена циклическая группа $(\{1,2,3,4\},*)$. На табл. 2_2 и табл. 2_3 изображены квазигруппы $(\{1,2,3,4\},\square)$ и $(\{1,2,3,4\},\diamond)$, где

$$x \square y \overset{\text{деф}}{=\!=} x * fy,$$

---

1) ввиду (о), имеет место: $a*b = fa \diamond b \Leftrightarrow fa * b = a \diamond b$.

2) см. определение 1_2 (определение 1_1).

3) например: [3-5].

$$x \diamond y \overset{\text{деф}}{=} fx * y, \quad \text{и}$$

$$f \overset{\text{деф}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.^{1)}$$

Так как f удовлетворяет условию (o)[2] , то, ввиду утверждения 11, ({1,2,3,4},□,f) явлется R-группой,а, ввиду утверждения 29, ({1, 2,3,4},♦,f) является L-группой. Отсюда, так как □ = ♦, на основании теоремы 30, находим, что ({1,2,3,4},□) = ({1,2,3,4},♦) является группой. Притом, $f \neq I$![3]

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	2	1
4	4	3	1	2

Табл. 2_1

□	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	1	2
4	3	4	2	1

Табл. 2_2

♦	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	1	2
4	3	4	2	1

Табл. 2_3

Примечание 5.

({1,...,6},□,f), где квазигруппа ({1,...,6},□) изображена на табл. 1_8 и имеет место

$$f \overset{\text{деф}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

является R-группой. Притом, ({1,...,6},□) является группой! Но ({1,...,6},□,f) не является и L-группой. В самом деле, имеет место:

$$f(3 \,\square\, f4) \,\square\, 5 = 6 \quad \text{и} \quad 3 \,\square\, (4 \,\square\, 5) = 2.$$

Пусть (Q,A) квазигруппа (где $A : Q^2 \to Q$). Парастрофные операции операции A (^{-1}A, A^{-1}, $\overset{*}{A}$, $(\overset{*}{A}{}^{-1})$ и $(^{-1}\overset{*}{A})$ определени следующим образом[4]:

$$^{-1}A(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(z,y) = x;$$

1) $f \neq I$.

2) $f \circ f = I$.

3) см. и примечани 1 и 1'.

4) например: [3-5].

$$A^{-1}(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(x,z) = y;$$

$$\overset{*}{A}(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(y,x) = z;$$

$$(\overset{*}{A}{}^{-1})(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(y,z) = x^{1)}; \quad \text{и}$$

$$({}^{-1}\overset{*}{A})(x,y) = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(z,x) = y^{2)}.$$

Если (Q,A) группа и f унарная операция - взятие обратного элемента, то имеет место:

$$^{-1}A(a,b) = A(a,fb) \quad \text{и}$$

$$A^{-1}(a,b) = A(fa,b).$$

Отсюда, ввиду утверждения 11 и утверждения 29, в том же порядке, находим, что имеет место:

$$(Q,\ ^{-1}A,f) \quad R\text{-группа; и}$$

$$(Q,A^{-1},f) \quad L\text{-группа.}$$

Отсюда, ввиду теоремы 27, находим, что имеет место:

$$(Q,({}^{-1}\overset{*}{A}),f) \quad L\text{-группа; и}$$

$$(Q,(\overset{*}{A}{}^{-1}),f) \quad R\text{-группа.}$$

Мы доказали следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 31. Пусть (Q,A) группа и f унарная операция - взятие обратного элемента. Тогда

а) $(Q,\ ^{-1}A,f)$ и $(Q,(\overset{*}{A}{}^{-1}),f)$ R-группы; и

б) (Q,A^{-1},f) и $(Q,({}^{-1}\overset{*}{A}),f)$ L-группы.[3]

---

[1] притом, имеет место: $(\overset{*}{A}{}^{-1}) = {}^{-1}(\overset{*}{A})$.

[2] притом, имеет место: $({}^{-1}\overset{*}{A}) = (\overset{*}{A})^{-1}$.

[3] притом, $(Q,\overset{*}{A})$ группа.

Примечание 6.

Правое и левое деление в квазигруппе (Q,A), в том же порядке, определени следующим образом:

$$x \setminus y = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(x,z) = y; \quad \text{и}$$
$$x \,/\, y = z \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} A(z,x) = y.$$

Таким образом, ввиду определений парастрофов квазигруппы (Q,A), находим, что имеет место:

$$\setminus = A^{-1} \quad \text{и} \quad / = (\overset{*}{{}^{-1}A}).$$

Отсюда, ввиду теоремы 31, находим, что имеет место: если (Q,A) группа и f унарная операция - взятие обратного элемента, то $(Q,\setminus,f)$ и $(Q,/,f)$ являются L-группамы.

Примечание 7.

В [6] В. Дэвидэ-ом введени и рассматривани группоиды и квазигруппы $(Q,\cdot)$ удовлетворяющие условию

$$(\forall a \in Q)(\forall b \in Q)(\forall c \in Q)(a \cdot b) \cdot c = f_1 a \cdot (f_2 b \cdot f_3 c),$$

где f_1, f_2, f_3 унарные операции в Q. В частности рассматриван случай когда $(Q,\cdot)$ квазигруппа а f_1, f_2 и f_3 ее автоморфизмы. Эту структуру автор называет А-группа. Таким образом, клики являются и специальными А-группамы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Parrack, C.A.: Cliques Math. Gaz., 1966, 50, № 371, 43-46.

[2] Ушан, Я.: Некоторые замечаний о кликах и обобщение на n-арные полуклики, Мат. весник, 4(19), 1967, 307-317.

[3] Булоусов, В.Д.: Основы теории квазигрупп и луп, "Наука", Москва, 1967.

[4] Dénes J. and Keedwell A.D.: Latin Squares and their Aplications, Ákadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

[5] Ušan J.: Uvod v teorijo kvazigrup, Postdiplomski seminar iz matematike, Univ. v Ljubljani, Inštitut za mat., fiz. in meh., Ljubljana, 1986.

[6] Devidé V.: Über eine Klasse von Gruppoiden, Glasnik mat., fiz. i astr., 10 (1955), 265-268.

REZIME

O DVE KLASE ALGEBRI BLISKIH GRUPAMA

U radu se uvode i razmatraju dve klase algebri među kojima se pored grupa nalaze, na primer, klike [1] i poluklike [2].

Received by the editors November 22, 1989.