Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 19,2, 105-118 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

n-РЕШЕТКИ

Янез Ушан

*University of Novi Sad, Institute of Mathematics,
21000 Novi Sad, Dr Ilije Djuričića 4, Yugoslavia*

РЕЗЮМЕ

В статье определяются A- и R-n-решетки как одно обобщение A- и R-решеток. Притом, в R-n-решетке точные верхние и точные нижние граньи определяются как (n-2)-арные операции. Устанавливается соотношение между A- и R-n-решетками и описывается изображение n-решеток с помощю решеток. Наконец, доказывается, что в конечных n-решетках существуют (однозначно определенные) (n-2)-арные операции O и E, являющиеся {1,n}-нейтральними операциями [1], в том же порядке, n-группоидов $(S,\cap)$ и $(S,\cup)$, и {1,n}-нулевими операциями, в том же порядке, n-группоидов $(S,\cap)$ и $(S,\cup)$.

*

<u>Определение 1.</u> Пусть $\cup$ и $\cap$ n-арные операции в множестве S и $n \in N\setminus\{1\}$. Объект $(S,\cup,\cap)$ назовем A-n-<u>решеткой</u> тогда и только тогда, когда имеют место равенства:

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N15.

Key words and phrases: n-groupoids, n-lattices, {1,n}-neutral operations on n-grupoids.

nAL$\tilde{1}$ $\quad \cup(x,a_1^{n-2},x) = x$[1],

nAL$\hat{1}$ $\quad \cap(x,a_1^{n-2},x) = x$,

nAL$\tilde{2}$ $\quad \cup(x,a_1^{n-2},y) = \cup(y,a_1^{n-2},x)$,

nAL$\hat{2}$ $\quad \cap(x,a^{n-2},y) = \cap(y,a_1^{n-2},x)$,

nAL$\tilde{3}$ $\quad \cup(\cup(x,a_1^{n-2},y),a_1^{n-2},z) = \cup(x,a_1^{n-2},\cup(y,a_1^{n-2},z))$,

nAL$\hat{3}$ $\quad \cap(\cap(x,a_1^{n-2},y),a_1^{n-2},z) = \cap(x,a_1^{n-2},\cap(y,a_1^{n-2},z))$, и

nAL4 $\quad \cup(x,a_1^{n-2},\cap(x,a_1^{n-2},y)) = x$,

nAL4 $\quad \cap(x,a^{n-2},\cup(x,a^{n-2},y)) = x$

для любых $x,y,z,a_1^{n-2} \in S$.

Если $n = 2$, то речь идет об определении A-решетки.[1]

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $(S,\cup,\cap)$ A-n-решетка. Пусть, далее,

(1) $\quad (x,a_1^{n-2},y) \in \leq \ \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \ \cup(x,a_1^{n-2},y) = y$

для любых $x,y,a_1^{n-2} \in S$. Тогда имеют место формулы:

nRL1 $\quad (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall x \in S)(x,a_1^{n-2},x) \in \leq$[1];

nRL2 $\quad (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall x \in S)(\forall y \in S)((x,a_1^{n-2},y) \in \leq \ \wedge$

$\wedge \ (y,a_1^{n-2},x) \in \leq \ \Rightarrow x = y)$; и

nRL3 $\quad (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall x \in S)(\forall y \in S)(\forall z \in S)((x,a_1^{n-2},y) \in \leq \ \wedge$

---

1) Последовательность $g_p,\ldots,g_q$ (где $p,\ldots,q$ последовательность натуральных чисел следующих друг за другом) для краткости обозначаем через g_p^q; в частности: $g_p^p = g_p$. Подобно, последовательность $\underbrace{a,\ldots,a}_{p}$ обозначаем через $\overset{p}{a}$. Далее, под g_p^{p-1}, $p \in N$, и под $\overset{0}{g}$ понимаем пустую последовательность (отсуствие последовательности). Притом, если речь идет о, например, g_1^3,e_1^0 (или $g_1^3,\overset{0}{e}$), то g_1^3,e_1^0 (или $g_1^3,\overset{0}{e}$) считаем последовательностью g_1^3, и если реч идет о e_1^0 (или $\overset{0}{e}$) в некоторых случаях будем обозначать через ⊠; например $F(a_1^0)$ будем обозначать через $F(⊠)$.

$$\wedge\ (y,a_1^{n-2},z) \in \leq\ \Rightarrow (x,a^{n-2},z) \in \leq).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Учитывая (1), ввиду nAL$\tilde{1}$, находим, что имеет место формула под nRL1.

б) Пусть x,a_1^{n-2} и y любые элементы множества S удовлетворяющие условию

$$(x,a_1^{n-2},y) \in \leq\ \wedge (y,a_1^{n-2},x) \in \leq,$$

т.е., ввиду (1), условию

$$U(x,a_1^{n-2},y) = y \wedge U(y,a_1^{n-2},x) = x$$

Отсюда, ввиду nAL$\tilde{2}$, находим, что имеет место равенство $x = y$.

ц) Пусть x,a_1^{n-2},y и z любые элементы множества S удовлетворяющие условию

$$(x,a_1^{n-2},y) \in \leq\ \wedge\ (y,a_1^{n-2},z) \in \leq,$$

т.е., ввиду (1), условию

$$U(x,a_1^{n-2},y) = y \wedge U(y,a_1^{n-2},z) = z.$$

Отсюда, учитывая nAL$\tilde{3}$, находим, что имеет место следующая цепь равентств:

$$\begin{aligned} z &= U(U(x,a_1^{n-2},y),a_1^{n-2},z) = \\ &= U(x,a_1^{n-2},U(y,a_1^{n-2},z)) = \\ &= U(x,a_1^{n-2},z), \end{aligned}$$

т.е. равенство

$$U(x,a_1^{n-2},z) = z.$$

Таким образом, ввиду (1), имеет место и формула под nRL3.

Если $n = 2$, то $\leq$ из утверждения 1 является (бинарным) PAT отношением.

<u>УТВЕРЖДЕНИЕ 2.</u> <u>Если</u> $(S,\cup,\cap)$ A-n-решетка, <u>то</u> имеет место эквивалентность

$$(\bar{1}) \qquad \cap(x,a_1^{n-2},y) = x \Leftrightarrow \cup(x,a_1^{n-2},y) = y \text{ [2]}$$

для любых $x,y,a_1^{n-2} \in S$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

а) Учитывая nAL4, находим, что имеет место следующая цепь импликаций

$$\cup(x,a_1^{n-2},y) = y \Rightarrow \cap(x,a_1^{n-2},\cup(x,a_1^{n-2},y)) =$$

$$= \cap(x,a_1^{n-2},y) \Rightarrow x = \cap(x,a_1^{n-2},y)$$

для любых $x,y,a_1^{n-2} \in S$. Отсюда находим, что имеет место импликация

$$\cup(x,a_1^{n-2},y) = y \Rightarrow \cap(x,a_1^{n-2},y) = x$$

для любых $x,y,a_1^{n-2} \in S$.

б) Подобно, учитывая nAL4, nAL$\bar{3}$ и nAL$\tilde{3}$, находим, что имеет место следующая цепь импликаций

$$\cap(x,a_1^{n-2},y) = x \Rightarrow \cup(y,a_1^{n-2},\cap(x,a_1^{n-2},y)) =$$

$$= \cup(y,a_1^{n-2},x) \Rightarrow y = \cup(y,a_1^{n-2},x)$$

$$\Rightarrow \cup(x,a_1^{n-2},y) = y$$

для любых $x,y,a_1^{n-2} \in S$. Отсюда находим, что имеет место импликация

$$\cap(x,a_1^{n-2},y) = x \Rightarrow \cup(x,a_1^{n-2},y) = y$$

---

[2] см. (1).

для любых $x, y, a_1^{n-2} \in S$.

* *

Пусть

$$\overrightarrow{S^{n-2}S} \overset{\text{деф}}{=\!=} \{f \mid f : S^{n-2} \to S\}.$$

Если $n = 2$, то $\overrightarrow{S^{n-2}S}$ является множеством всех нульарных операций в множестве S, именно:

$$\overrightarrow{S^{o}S} = \{\{(\varnothing, a)\} \mid a \in S\}.$$

Так как нульарная операция

$$f = \{(\varnothing, a)\}$$

однозначно определена элементом $a \in S$ и $f(\varnothing) = a$, то $\overrightarrow{S^{o}S}$ будем обозначат и через S, т.е. то будем считать, что

$$(0) \qquad \overrightarrow{S^{o}S} = S.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2_1. Пусть $\leq$ n-арное отношение, $n \in N\backslash\{1\}$, в множестве S удовлетворяющее условыям nRL1-nRL3. Пусть, далее, $D \subseteq S$. Тогда:

1° $M \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ назовем верхней гранью множества D в $(S, \leq)$ тогда и только тогда, когда имеет место условые:

$$(\text{B}) \qquad (\forall a_i \in S)^{n-2}(\forall x \in S)(x \in D \Rightarrow (x, a_1^{n-2}, M(a_1^{n-2})) \in \leq\,);$$ и

2° $m \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ назовем нижней гранью множества D в $(S, \leq)$ тогда и только тогда, когда имеет место условые:

$$(\text{H}) \qquad (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall x \in S)(x \in D \Rightarrow (m(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x) \in \leq).$$

Притом, множество всех верхних граней и множество всех нижних граней множества D в $(S, \leq)$, в том же порядке, обозначим через

$G(D/\leq)$ и $\mathcal{D}(D/\leq)$.

Если $n = 2$, то, ввиду (C), речь идет об определении верхней и нижней грани множества $D \subseteq S$ в $(S,\leq)$.

УТВРЕЖДЕНИЕ 3. Пусть $\leq$ n-арное отношение, $n \in N \setminus \{1\}$, в множестве S удовлетворяющее условиям nRL1-nRL3. Пусть, далее, $D \subseteq S$. Тогда:

$\bar{1}$ существует не больше чем одна $M_D \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ удовлетворяющая условию

(M) $$M_D \in G(D/\leq) \wedge (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall X \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(X \in G(D/\leq)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (M_D(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, X(a_1^{n-2})) \in \leq); \text{ и}$$

$\bar{2}$ существует не больше чем одна $m_D \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ удовлетворяющая условию

(m) $$m_D \in \mathcal{D}(D/\leq) \wedge (\forall a_i \in S)_1^{n-2}(\forall X \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(X \in \mathcal{D}(D/\leq) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (X(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, m_D(a_1^{n-2})) \in \leq).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть M_D и $\bar{M}_D$ удовлетворяют условию под (M). Тогда имеет место конъюнкция

$$(M_D(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, \bar{M}_D(a_1^{n-2})) \in \leq \wedge (\bar{M}_D(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, M_D(a_1^{n-2})) \in \leq$$

для любых $a_1^{n-2} \in S$. Отсюда, ввиду nRL2, находим, что имеет место равенство

$$\bar{M}_D(a_1^{n-2}) = M_D(a_1^{n-2})$$

для каждых $a_1^{n-2} \in S$.

Таким же способом доказывается, что имеет место утверждение под $\bar{2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2_2. Пусть $\leq$ n-арное, $n \in N \setminus \{1\}$, отношение в множестве S удовлетворяющее условыям nRL1-nRL3. Пусть, далее,

$D \subseteq S$. Тогда

1' $M_D \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ назовем <u>точной верхней гранью</u> множества D тогда и только тогда, когда M_D удовлетворяет условию (M); и

2' $m_D \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ назовем <u>точной нижней гранью</u> множества D тогда и только тогда, когда m_D удовлетворяет условию (m). Притом M_D и m_D в том же порядке, обозначим через $\sup_{\leq} D$ ($\sup D$) и $\inf_{\leq} D$ ($\inf D$).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2_3</u>. Пусть $\leq$ n-арное, $n \in N \setminus \{1\}$, отношение в множестве S. Объект $(S,\leq)$ назовем R-n-<u>решеткой</u> тогда и только тогда, когда $\leq$ удовлетворяет формулам nRL1-nRL3 и условию

<u>nRL4</u> $$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(\exists M \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(\exists m \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(M = \\ = \sup_{\leq}\{x,y\} \wedge m = \inf_{\leq}\{x,y\}).$$

<u>ТЕОРЕМА 4.</u> Пусть $(S,\cup,\cap)$ A-n-решетка. Пусть, далее,

(1) $$(x,a_1^{n-2},y) \in \leq \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \cup(x,a_1^{n-2},y) = y\,^{3)}.$$

Тогда $(S,\leq)$ является R-n-решеткой.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Ввиду утверждения 1, $\leq$ удовлетворяет условиям nRL1-nRL3.

Пусть, далее, (a_1^{n-2}) любой элемент множества S^{n-2}. Притом, пусть:

(α) $$\underset{\smile}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \cup(x,a_1^{n-2},y);$$

(β) $$\overset{\frown}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \cap(x,a_1^{n-2},y);\ \text{и}$$

(γ) $$(x,y) \in \leq_{(a_1^{n-2})} \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (x,a_1^{n-2},y) \in \leq$$

для каждого $(x,y) \in S^2$.

Учитывая (α), (β) и определение 1, находим, что для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$ объект

---

[3] $\Leftrightarrow \cap(x,a_1^{n-2},y) = x$; утверждение 2.

$$(S, \underbrace{(a_1^{n-2})}, \overbrace{(a_1^{n-2})})$$

является A-решеткой. Далее, учитывая (γ), (1) и (α) (или (β)), находим, что

$$(S, \le_{(a_1^{n-2})})$$

R-решетка соответствующая A-решетке

$$(S, \underbrace{(a_1^{n-2})}, \overbrace{(a_1^{n-2})})$$

для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Отсюда находим, что

$$M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}) = \sup_{\le_{(a_1^{n-2})}} \{x,y\} = \underbrace{(a_1^{n-2})}(x,y) \text{ и}$$

$$m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}) = \inf_{\le_{(a_1^{n-2})}} \{x,y\} = \overbrace{(a_1^{n-2})}(x,y)$$

для каждого $(x,y) \in S^2$ и каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Притом, если множество всех верхних и множество всех нижних граньи $z \in S$ множества $\{x,y\}$ в $(S, \le_{(a_1^{n-2})})$, в том же порядке, обозначим через

$$G(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \text{ и } D(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}),$$

то имеют место импликации

$$z \in G(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \Rightarrow (M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}), z) \in \le_{(a_1^{n-2})} \text{ и}$$

$$z \in D(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \Rightarrow (z, m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})) \in \le_{(a_1^{n-2})}$$

для всех $z \in S$, каждого $(x,y) \in S^2$ и каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Отсюда, далее, если обозначим через

$$G(\{x,y\}/\le) \text{ и } D(\{x,y\}/\le)$$

множества всех $(n-2)$-арных операции X в S, в том же порядке, удовлетворяющих условиям

$$X \in G(\{x,y\}/\le) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (\forall a_i \in S)_1^{n-2} X(a_1^{n-2}) \in$$

$$\in G(\{x,y\}/\leq_{(a_1^{n-2})}) \text{ и}$$

$$X \in \mathcal{D}(\{x,y\}/\leq) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (\forall a_i \in S)_1^{n-2} X(a_1^{n-2}) \in$$

$$\in \mathcal{D}(\{x,y\}/\leq_{(a_1^{n-2})})$$

для всех $X \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$ и каждого $(x,y) \in S^2$, ввиду (γ), находим, что имеют место импликации

$$X \in G(\{x,y\}/\leq) \Rightarrow (M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, X(a_1^{n-2})) \in \leq \quad \text{и}$$

$$X \in \mathcal{D}(\{x,y\}/\leq) \Rightarrow (X(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})) \in \leq$$

для всех $X \in \overrightarrow{S^{n-2}S}$, любого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$ и каждого $(x,y) \in S^2$. Таким образом, ввиду определении 2_2 и 2_3, теорема доказана.

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> Пусть $(S,\leq)$ R-n-решетка. Пусть, далее,

(2) $$\cup(x,a_1^{n-2},y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \sup_{\leq}\{x,y\}(a_1^{n-2})[= M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})] \text{ и}$$

(3) $$\cap(x,a_1^{n-2},y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \inf_{\leq}\{x,y\}(a_1^{n-2})[= m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})] .$$

Тогда $(S,\cup,\cap)$ является A-n-решеткой.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Пусть (a_1^{n-2}) любой элемент множества S^{n-2}. Притом, пусть

(a) $$(x,y) \in \leq_{(a_1^{n-2})} \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (x,a_1^{n-2},y) \in \leq$$

для всех $x,y \in S$. Отсюда, ввиду определения 2_3, находим, что $\leq_{(a_1^{n-2})}$ является РАТ отношением в множестве S для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Пусть, далее, множества $G(\{x,y\}/\leq_{(a_1^{n-2})})$ и $\mathcal{D}(\{x,y\}/\leq_{(a_1^{n-2})})$, где x и y любые элементы множества S, определены следующим образом:

$$z \in G(\{x,y\}/\leq_{(a_1^{n-2})}) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (\exists X \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(X \in G(\{x,y\}/\leq) \wedge$$

$$\wedge\, z = X(a_1^{n-2})) \text{ и}$$

$$z \in \mathcal{D}(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (\exists X \in \overrightarrow{S^{n-2}S})(X \in \mathcal{D}(\{x,y\}/\le) \wedge$$

$$\wedge\ z = X(a_1^{n-2}))$$

для всех $z \in S$ и каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$; речь идет о множествах всех верхней и нижней грани множества $\{x,y\}$ в $(S,\le_{(a_1^{n-2})})$. Отсюда, ввиду предположения, что $(S,\le)$ R-n-решетка и определения (a), находим, что имеют место импликации

$$z \in \mathcal{G}(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \Rightarrow (M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}),z) \in \le_{(a_1^{n-2})} \quad \text{и}$$

$$z \in \mathcal{D}(\{x,y\}/\le_{(a_1^{n-2})}) \Rightarrow (z,m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})) \in \le_{(a_1^{n-2})}$$

для всех $z \in S$ и каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Таким образом, если

$$\underset{\smile}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} M_{\{x,y\}}(a_1^{n-2}) \quad \text{и}$$

$$\overset{\frown}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} m_{\{x,y\}}(a_1^{n-2})$$

для всех $x,y \in S$, то $(S,\underset{\smile}{(a_1^{n-2})},\overset{\frown}{(a_1^{n-2})})$ A-решетка соответствующая R-решетке $(S,\le_{(a_1^{n-2})})$ для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Отсюда, наконец, учитывая (2) и (3), находим, что теорема доказана.

На табл. 1_1-1_4, 2_1-2_4 описана A-3-решетка $(\{1,2,3,4\},\cup,\cap)$. Притом: $\cup(x,a,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \underset{\smile}{a}(x,y)$ (табл. 1_1-1_4) и $\cap(x,a,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \overset{\frown}{a}(x,y)$ (табл. 2_1-2_4). На системе диаграмм 3_1-3_4 изображена соответствующая R-3-решетка $(\{1,2,3,4\},\le)$. Притом: $(x,a,y) \in \le \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \le_a$.

$\underset{\smile}{1}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

Табл. 1_1

$\underset{\smile}{2}$	1	2	3	4
1	1	2	1	4
2	2	2	2	2
3	1	2	3	4
4	4	2	4	4

Табл. 1_2

$\underset{\smile}{3}$	1	2	3	4
1	1	1	3	3
2	1	2	3	4
3	3	3	3	3
4	3	4	3	4

Табл. 1_3

$\underset{\smile}{4}$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	2
3	1	3	3	3
4	1	2	3	4

Табл. 1_4

1	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

Табл. 2_1

2	1	2	3	4
1	1	1	3	1
2	1	2	3	4
3	3	3	3	3
4	1	4	3	4

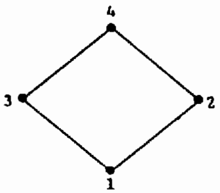
Табл. 2_2

3	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	2	2	2
3	1	2	3	4
4	2	2	4	4

Табл. 2_3

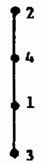
4	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	2	4
3	3	2	3	4
4	4	4	4	4

Табл. 2_4



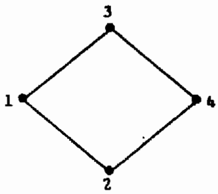
$\leq_1$

Диаг. 3_1



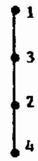
$\leq_2$

Диаг. 3_2



$\leq_3$

Диаг. 3_3



$\leq_4$

Диаг. 3_4

* * *

В [1] автором определенно понятие (i,j)-нейтральной операции n-группоида; $n \in N \setminus \{1\}$, $i \neq j$, $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$. В частности, $e : Q^{n-2} \to Q$ является $(1,n)$ - нейтральной операцией n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(\varepsilon) \qquad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(x,a_1^{n-2},e(a_1^{n-2})) = x \wedge$$
$$\wedge A(e(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x).$$

Если $n = 2$, то речь идет о нейтральном элементе группоида. Иначе, в n-группоиде существует <u>не больше чем одна</u> $(1,n)$-нейтральная операция [1]. Подобно определим $(1,n)$-нулевую операцию n-группоида; $n \in N \setminus \{1\}$:

Пусть (Q,A) n-группоид, $n \in N \setminus \{1\}$. $(n-2)$-арную операцию O в множестве Q назовем $(1,n)$-нулевой операцией n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(\omega) \qquad (\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(x,a_1^{n-2},O(a_1^{n-2})) = O(a_1^{n-2}) \wedge$$
$$\wedge\ A(O(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = O(a_1^{n-2})).$$

Если $n = 2$, то речь идет о нулю группоида. Иначе, в n-группоиде существует <u>не больше чем одна</u> $\{1,n\}$-нулевая операция. Именно, из предположения

$$A(\bar{O}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},O(a_1^{n-2})) = O(a_1^{n-2}) \text{ и}$$
$$A(\bar{O}(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},O(a_1^{n-2})) = \bar{O}(a_1^{n-2})$$

для любых $a_1^{n-2} \in Q$, находим, что

$$\bar{O}(a_1^{n-2}) = O(a_1^{n-2})$$

для любых $a_1^{n-2} \in Q$.

<u>ТЕОРЕМА 6.</u> Пусть $(S,\cup,\cap)$ A-n-решетка и $|S| \in N$. Тогда существуют (однозначно определение) $(n-2)$-арные операции O и E такие, что

а) O и E $\{1,n\}$-нейтральные операции, в том же порядке, n-группоидов $(S,\cup)$ и $(S,\cap)$; и

б) O и E $\{1,n\}$-нулевые операции, в том же порядке, n-группоидов $(S,\cup)$ и $(S,\cap)$.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u>

Пусть (a_1^{n-2}) любой элемент множества S^{n-2}. Положим:

$$(\alpha) \qquad \underset{\smile}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \cup(x,a_1^{n-2},y) \text{ и}$$

$$(\beta) \qquad \overset{\frown}{(a_1^{n-2})}(x,y) \overset{\text{деф}}{=\!=} \cap(x,a_1^{n-2},y)$$

для любых $x,y \in S$. Отсюда, учитывая определение 1, находим, что

$$(S,\underset{\smile}{(a_1^{n-2})},\overset{\frown}{(a_1^{n-2})})$$

решетка для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Далее, так как $|S| \in N$, находим, что для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$ существуют однозначно определение элементы $O(a_1^{n-2})$ и $E(a_1^{n-2})$ удовлетворяющие условиям:

$$(\forall x \in S)(\underbrace{(a_1^{n-2})}(x, O(a_1^{n-2})) = x \wedge$$

$$\wedge \underbrace{(a_1^{n-2})}(O(a_1^{n-2}), x) = x);$$

$$(\forall x \in S)(\overbrace{(a_1^{n-2})}(x, E(a_1^{n-2})) = x \wedge$$

$$\wedge \overbrace{(a_1^{n-2})}(E(a_1^{n-2}), x) = x);$$

$$(\forall x \in S)(\overbrace{(a_1^{n-2})}(x, O(a_1^{n-2})) = O(a_1^{n-2}) \wedge$$

$$\wedge \overbrace{(a_1^{n-2})}(O(a_1^{n-2}), x) = O(a_1^{n-2})); \text{ и}$$

$$(\forall x \in S)(\underbrace{(a_1^{n-2})}(x, E(a_1^{n-2})) = E(a_1^{n-2}) \wedge$$

$$\wedge \underbrace{(a_1^{n-2})}(E(a_1^{n-2}), x) = E(a_1^{n-2}))$$

для каждого $(a_1^{n-2}) \in S^{n-2}$. Отсюда, наконец, учитывая (α) и (β), ввиду (ε) и (ω), находим, что теорема доказана.

А-3-решетка $(\{1,2,3,4\}, \cup, \cap)$ определена на табл. 1_1-1_4, 2_1-2_4 удовлетворяет условию $|S| \in N$ из теоремы 6. Притом опрерации O и E являются подстановки:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Автор и Б. Шешеля в ряде работ рассматривали различные обобщения РАТ отношении на n-арный случай. Например: On some generalizations of reflexive, antisymetric and tranzitive relations, Proceedings of the Symposium n-ary structures, Skopje 1982, 175-183.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ушан Я., Нейтральные операции n-группидов, Review of Research Faculty of Science, Mathematics series, 1988, 18-2, 117-126.

REZIME

n-MREŽE

U radu se definišu A- i R-n-mreže kao jedno uopštenje A- i R-mreža. Pri tom, u R-n-mrežama tačna gornja i tačna donja ograničenja se definišu kao (n-2)-arne operacije. Utvrđuje se odnos između A- i R-n-mreža i opisuje predstavljanje n-mreža pomoću mreža. Na kraju se dokazuje da u svakoj konačnoj n-mreži postoje (jednoznačno određene) (n-2)-arne operacije O i E takve da su {1,n}-neutralne operacije [1], redom, u n-grupoidima (S,∪) i (S,∩), te da su {1,n}-nulte operacije, redom, u n-grupoidima (S,∩) i (S,∪).

SUMMARY

n-LATTICES

In this paper we define A- and R-n-lattices as a generalization of A- and R-lattices. In a R-n-lattice the exsact upper and the exact lower bounds are defined as (n-2)-ary operations. A relationship between A- and R-n-lattices is established and a representation of n-lattices using lattices is described. Finally, it is proved that in each finite n-lattice there exist the unique (n-2)-ary operations O and E which are {1,n}-neutral operations [1], respectively, in n-groupoids (S,∪) and (S,∩), and also {1,n}-null operations, respectively, in n-groupoids (S,∩) and (S,∪).

Received by the editors June 01, 1990.