Univ. u Novom Sadu
Zb.Rad. Prirod.-Mat.Fak.
Ser.Mat. 19,2, 119-124 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

О n-КВАЗИГРУППАХ БОЛА

Янез Ушан

Institute of Mathematics, University of Novi Sad, 21000 Novi Sad, Dr Ilije Djuričića 4, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются n-квазигруппы Бола [2], т.е. n-квазигруппы удовливорящие тождествам под nB_L и nB_R, которые для $n = 2$ превращаются в левое и правое тождество Бола [3 - 5]. В n-квазигруппе Бола (Q,A) существует $\{1,n\}$-нейтральная операция [2], т.е. $(n-2)$-арная операция e удовлетворяющая условию (1); [1]. Таким образом, n-квазигруппы Бола для $n = 2$ являются лупами Муфанг [3-5]. В настоящей работе доказываются некоторые свойства n-квазигрупп Бола и для $n \geq 3$ находится одна характкризация n-квазигрупп Бола.

*

В [1] автором определено понятие $\{i,j\}$-нейтральной операции n-группоида; $n \in N \setminus \{1\}$, $i \neq j$, $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. В частности, $e : Q^{n-2} \to Q$ является $\{1,n\}$-нейтральной операцией n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

(1) $$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(x,a_1^{n-2},e(a_1^{n-2})) = x \wedge$$

AMS Mathematocs Subject Classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: quasigroups, groups, Moufang loops, $\{i,j\}$-neutral operations on n-groupoids.

$$\wedge \quad A(e(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x) = x).$$ [1]

Если $n = 2$, то речь идет о нейтральном элементе $e(\varnothing)$[1]. Иначе, в n-группоиде существует не больше чем одна $\{1,n\}$-нейтральная операция [1].

В [2] автором введены n-квазигруппы Бола. Речь идет о n-квазигруппах[2] (Q,A) удовлетворяющих тождествами:

$$nB_L \qquad A(A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-1}{x})), z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-2}{x}, A(x, z_1^{n-1})))$$

и

$$nB_R \qquad A(z_1^{n-1}, A(A(\overset{n-1}{x}, y), \overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1}, x), \overset{n-2}{x}, y), \overset{n-1}{x}).$$

Если $n = 2$, то в квазигруппе (Q,A) имеют место левое и правое тождество Бола [3-5]. В n-квазигруппе Бола существует $\{1,n\}$--нейтральная операция [2]. Таким образом, n-квазигруппы Бола для $n = 2$ являются лупами Муфанг.

Ввиду теоремы 9 из [2], имеет место следующее утверждение:

<u>ЛЕММА 1.</u> Если (Q,A) n-квазигруппа Бола и $n \geq 3$, то существует группа (Q,B) такая, что

$$A(x, b^{n-2}, y) = B(x, B(e(b_1^{n-2})^{-1}, y))$$

для любых $x, b^{n-2}, y \in Q$, где e $\{1,n\}$-нейтральная операция n--квазигруппы Бола (Q,A) и $^{-1}$ взятие обратного элемента в группе (Q,B).

Притом имеет место и следующее утверждение:

---

1) Последобательность $g_p, \ldots, g_q$ (где $p, \ldots, q$ последовательность натуральных чисел следующих друг за другом) для краткости обозначаем через g_p^q; в частности: $g_p^p = g_p$. Подобно, последовательность $\underbrace{a, \ldots, a}_{p}$ обозначаем через $\overset{p}{a}$. Далее, под g_p^{p-1}, $p \in N$, и под $\overset{0}{g}$ понимаем пустую последовательность (отсуствие последовательности). Притом, если речь идет о, например, g_1^3, g_1^0 (или $g_1^3, \overset{0}{e}$), то g_1^3, e_1^3 (или $g_1^3, \overset{0}{e}$) считаем последовательностью g_1^3, и если речь идет о e_1^0 (или $\overset{0}{e}$) в некоторых случаях будем обозначать через $\varnothing$; например $F(a_1^0)$ будем обозначать через $F(\varnothing)$.

2) [6].

ЛЕММА 2. [2][3)] Пусть (Q,B) группа, ε отображение множества Q^{n-2} в множество Q и $n \geq 3$. Пусть, далее, для $n=3$ ε подстановка множества Q, и для $n > 3$ (Q,ε) $(n-2)$-квазигруппа. Тогда, если

$$A(x,b_1^{n-2},y) \overset{\text{деф}}{=\!=} B(x,B(\varepsilon(b_1^{n-2})^{-1},y))$$

для любых $x,y,b_1^{n-2} \in Q$, то (Q,A) n-квазигруппа Бола и ε ее $\{1,n\}$-нейтральная операция.

* *

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть (Q,A) n-квазигруппа Бола и $n \geq 3$. Тогда в (Q,A) имеет место тождество $\langle 1,n\rangle$-ассоциативности, т.е. тождество:

$$A(A(x,a_1^{n-2},y),b_1^{n-2},z) = A(x,a_1^{n-2},A(y,b_1^{n-2},z)).$$

Доказательство.

Ввиду леммы 1, находим что имеют место равенства:

$$A(A(x,a_1^{n-2},y),b_1^{n-2},z) =$$

$$= B(B(x,B(e(a_1^{n-2})^{-1},y)),B(e(b_1^{n-2})^{-1},z)) \text{ и}$$

$$A(x,a_1^{n-2},A(y,b_1^{n-2},z)) =$$

$$= B(x,B(e(a_1^{n-2})^{-1},B(y,B(e(b_1^{n-2})^{-1},z))))$$

для любых $x,y,z,a_1^{n-2},b_1^{n-2} \in Q$; e является $\{1,n\}$-нейтральней операцией n-квазигруппы Бола (Q,A).

Отсюда, так как (Q,B) группа, находим, что утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если в n-квазигруппе (Q,A) имеет место тождество $\langle 1,n\rangle$-ассоциативности, то (Q,A) n-квазигруппа Бола.

Доказательство.

Учитывая факт, что в (Q,A) имеет место тождество

3) Теорема 10.

$\langle 1,n\rangle$-ассоциативности, находим, что в (Q,A) имеют место следующие равенства

(а) $$A(A(a_1^{n-1},A(a_n^{2n-1})),a_{2n}^{3n-2}) = A(a_1^{n-1},A(a_n^{2n-2},A(a_{2n-1}^{3n-2})))$$

и

(б) $$A(a_1^{n-1},A(A(a_n^{2n-1}),a_{2n}^{3n-2})) = A(A(A(a_1^n),a_{n+1}^{2n-1}),a_{2n}^{3n-2})$$

для любых $a_1^{3n-2} \in Q$.

Если, далее, положим

$$a_1^{n-1} = a_{n+1}^{2n-1} = \overset{n-1}{x}, a_n = y,\ a_{2n}^{3n-2} = z_1^{n-1} \quad \text{в (а); и}$$

$$a_1^{n-1} = z_1^{n-1},\ a_n^{2n-2} = a_{2n}^{3n-2} = \overset{n-1}{x},\ a_{2n-1} = y \quad \text{в (б)},$$

находим, что в (Q,A) имеют место тождества под nB_L и nB_R.

Таким образом, учитывая предположение, что (Q,A) n-квазигруппа, утверждение доказано.

Следствием утверждения 3 и утвержденил 4 является следующее утверждение:

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> <u>Если</u> $n \in N \setminus \{1,2\}$, <u>то</u> n-квазигруппа (Q,A) является n-квазигруппой Бола тогда и только тогда, когда в (Q,A) имеет место тождество $\langle 1,n\rangle$-ассоциативности.

Следствием утвержедия 3 является следующее:

<u>УТВЕРЖЕДНИЕ 6.</u> <u>Если</u> (Q,A) n-квазигруппа Бола и $n \geq 3$, то в (Q,A) имеют место следующее тождества:

<u>nLA</u> $$A(A(\overset{n}{x}),\overset{n-2}{x},y) = A(\overset{n-1}{x},A(\overset{n-1}{x},y));$$

<u>nRA</u> $$A(A(x,\overset{n-1}{y}),\overset{n-1}{y}) = A(x,\overset{n-2}{y},A(\overset{n}{y}));$$ и

nE $\quad A(A(\overset{n-1}{x}, y), \overset{n-1}{x}) = A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-1}{x}))$.[4)]

Учитывая утверждение 6 (nE), находим, что имеет место и следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если (Q,A) n-квазигруппа Бола и $n \geq 3$, то в (Q,A) имеют место следующие тождества

nM1 $\quad A(A(A(\overset{n-1}{x}, y), \overset{n-1}{x}), z_1^{n-1}) =$

$$= A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-2}{x}, A(x, z_1^{n-1}))); \text{ и}$$

nM2 $\quad A(z_1^{n-1}, A(\overset{n-1}{x}, A(y, \overset{n-1}{x}))) = A(A(A(z_1^{n-1}, x), \overset{n-2}{x}, y), \overset{n-1}{x})$.

Для $n = 2$ nM1 и nM2 являются тождествами Муфанг. Таким образом, утверждение 7 имеет место и для $n = 2$ [3-5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ушан Я., Нейтральные операции n-группоидов, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Math. Ser., 18-2, 1988, 117-126.

[2] Ушан Я., n-квазишруппы Бола, Review of Research Faculty of Science University of Novi Sad, Math. Ser., 19-1, 1989, 185-205.

[3] Bruck R.H., A Survey of Binary Systems, Berlin - Heidelberg - Göttingen, Springer Verlag, 1958.

[4] Белоусов В.Д., Основы теории квазигрупп и луп, "Наука", Москва", 1967.

[5] Dénes J. and Keedwell A.D., Latin Squares and their Applications, Akademiai Kiadó, Budapest, 1974.

[6] Белоусов В.Д., n-арние квазигруппы, "Штиинца", Кишинев, 1972.

REZIME

O n-KVAZIGRUPAMA BOLA

U radu se razmatraju n-kvazigrupe Bola [2], tj. n-kvazigrupe (Q,A),

---

4) Утверждение имеет место и для $n = 2$ [3-5]; для $n = 2$ n-квазигруппа Бола является лупой Муфанг.

$n \in N \setminus \{1\}$, u kojima važe zakoni pod nB_L i nB_R, koji se pri $n = 2$ svode na levi i desni Bolov zakon [3-5]. U n-kvazigrupama Bola postoji $\{1,n\}$-neutralna operacija [2], tj. $(n-2)$-arna operacija e koja zadovoljava uslov pod (1). Na taj način, n-kvazigrupe Bola pri $n = 2$ jesu lupe Moufang [3-5]. Svaka n-kvazigrupa Bola pri $n \geq 3$ može se predstaviti superpozicijom jedne binarne grupe i jedne $(n-2)$-kvazigrupe (odnosno permutacije pri $n = 3$)[2]. U ovom radu se utvrđuju neka svojstva n-kvazigrupa Bola i, za $n \geq 3$, nalazi jedna njena karakterizacija.

SUMMARY

ON BOL'S n-QUASIGROUPS

In this paper Bol's n-quasigroups are considered [2], i.e. n-quasigroups (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, satisfying the laws

$$A(A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-1}{x})),z_1^{n-1}) = A(\overset{n-1}{x},A(y,\overset{n-2}{x},A(x,z_1^{n-1})));$$

and

$$A(z_1^{n-1},A(A(\overset{n-1}{x},y),\overset{n-1}{x})) = A(A(A(z_1^{n-1},x),\overset{n-2}{x},y)^{n-1}),$$

which, for $n = 2$, reduce to the left and right Bol's laws [3-5]. In Bol's n-quasigroups (Q,A) there exists $\{1,n\}$-neutral operation [2], i.e. $(n-2)$-ary operation e satisfying the condition

$$(\forall a_i \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(x,a_1^{n-2},e(a_1^{n-2})) = x \land \land A(e(a_1^{n-2}),a_1^{n-2},x) = x) \qquad [1].$$

In this way, Bol's n-quasigroups for $n = 2$ are Moufang's loops [3-5]. Each Bol's n-quasigroup, $n \geq 3$, can be represented by superposition of one binary group and one $(n-2)$-ary quasigroup (permutation for $n = 3$) [2]. In this paper some properties of Bol's n-quasigroups are established and for $n \geq 3$ a characterization of them is given.

Received by the editors June 1, 1990.