Univ. u Novom Sadu
Zb.Rad. Prirod.-Mat.Fak.
Ser.Mat. 19,2, 125-137 (1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ (n,m)-ГРУППОИДОВ

Янез Ушан

*Institute of Mathematics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, Dr I. Djuričića 4
Yugoslavia*

РЕЗЮМЕ

В статье вводится понятие (i,j)-нейтральной операцией в (n,m)-группоиде как одно обобщение (i,j)-нейтральной операции в n-группоиде [1], и, таким образом, как одно обобщение нульарной операцией - взятие единицы в группоиде (определение 1). Понятие определено для (n,m)-группоидов (Q,A), $A : Q^n \to Q^m$, $(n,m) \in N^2$, удовлетворяющих условию: $n \geq 2m$. Притом: $i \in \{1,\dots,n-2m+1\}$, $j \in \{m+1,\dots,n-m+1\}$ и $j-i \geq m$. В (n,m)-группоиде $(n \geq 2m)$ не существует больше чем одна (i,j)-нейтральная операция для каждого $(i,j) \in N^2$. Основной результат относится к (n,m)-группам и (n,m)-полугруппам [2-4] (определение 2_1 и 2_2): если $n \geq 3m$, то (n,m)-полугруппа (Q,A) является (n,m)-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) обладает $(1,n-m+1)$-нейтральной операцией.

Пусть A отображение множества Q^n в множество Q^m и $(n,m)\in(N\cup\{0\})\times N$. Если $m = 1$, то речь идет о n-арной операцией. Притом, в частности, для $n = 0$ $(m = 1)$ речь идет о нульарной операцией в множестве Q. Иначе, A называется (n,m)-арной операци-

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.
Key words and phrases: n-groupoides, (n,m)-groupoides, (n,m)-semigroups, n-groups, (n,m)-groups, (i,j)-neutral operations on (n.m)-groupoids.

ей в множестве Q. Если, притом, $n = 0$, то речь идет о обобщении нульарной операцией ($(A : Q^0 \to Q^m,\ m \in N)$. В примере $(n,m)) \in N^2$, упорядоченная пара (Q,A) называется (n,m)-группоидом. Притом, $(n,1)$-группоид является n-группоидом.

Определение 1. Пусть (Q,A) (n,m)-группоид и $n \geq 2m$. Пусть, далее, $e_{\{i,j\}}$, где $i \in \{1,\dots,n-2m+1\}$, $j \in \{m+1,\dots,n-m+1\}$ и $j - i \geq m$, отображение множества Q^{n-2m} в множество Q^m. $(n-2m,m)$-арную операцию $e_{\{i,j\}}$ назовем $\{i,j\}$-нейтральной операцией (n,m)-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место формула:

$$(1)\qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m}(\forall x_t \in Q)_1^m(A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, x_1^m, a_{j-m}^{n-2m}) = (x_1^m) \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, x_1^m, a_i^{j-m-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_{j-m}^{n-2m}) = (x_1^m))^{1)}.$$

Если $m = 1$, то (1) превращается в:

$$(\forall a_t \in Q)_1^{n-2}(\forall x \in Q)(A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}), a_i^{j-2}, x, a_{j-1}^{n-2}) = x$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, x, a_i^{j-2}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2}), a_{j-1}^{n-2}) = x).$$

Таким образом, если $m = 1$, то (Q,A) является n-группоидом, $n \in N \setminus \{1\}$, и $e_{\{i,j\}}$ $\{i,j\}$-нейтральной операцией в n-группоиде (Q,A), введеной автором в [1].

Если $n = 2m$, то (1) превращается в

$$(\forall x_t \in Q)_1^m(A(e_{\{1,m+1\}}(\varnothing), x_1^m) = (x_1^m) \wedge$$

$$\wedge\ A(x_1^m, e_{\{1,m+1\}}(\varnothing)) = (x_1^m))^{1)}.$$

1) Последовательность $g_p,\dots,g_q$ (где $p,\dots,q$ последовательность натуральных чисел следующих друг за другом) для краткости обозначаем через g_p^q; в частности: $g_p^p = g_p$. Подобно, последовательность $\overbrace{a,\dots,a}^{s}$ обозначаем через $\overset{s}{a}$. Далее, под g_p^{p-1}, $p \in N$, и под $\overset{0}{g}$ понимаем пустую последовательность (отсуствие последовательности). Притом, если речь идет о, например, g_1^3, e_1^0 (или $g_1^3, \overset{0}{e}$), то g_1^3, e_1^0 (или $g_1^3, \overset{0}{e}$) считаем последовательностю g_1^3, и если речь идет о e_1^0 (или $\overset{0}{e}$) в некоторых случаях будем обозначать через $\varnothing$; например $F(a_1^0)$ будем обозначать через $F(\varnothing)$.

Таким образом, если $n = 2m$, то $i = 1$, $j = m+1$ и $e_{\{1,m+1\}}$ является (o,m)-арной операцией в множестве Q (т.е. $e_{\{1,m+1\}}: Q^o \to Q^m$). Притом, в частности, для $m = 1$ речь идет о нульарной операции $e_{\{1,2\}}$ - взятие единицы $e_{\{1,2\}}(\emptyset)$ в группоиде (Q,A).

Теорема 1. В (n,m)-группоиде, $n \geq 2m$ не существует больше чем одна $\{i,j\}$-нейтральная операция для каждого $(i,j) \in$ $\in \{(a,b) \mid a \in \{1,\dots,n-2m+1\} \wedge b \in \{m+1,\dots,n-m+1\} \wedge b-a \geq m\}$.

Доказательство.

Пусть существуют $e_{\{i,j\}}: Q^{n-2m} \to Q^m$ и $\bar{e}_{\{i,j\}}: Q^{n-2m} \to$ $\to Q^m$ удовлетворяющих условиям:

$$A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, x_1^m, a_{j-m}^{n-2m}) = (x_1^m) \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, x_1^m, a_i^{j-m-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}) a_{j-m}^{n-2m}) = (x_1^m) \quad \text{и}$$

$$A(a_1^{i-1}, \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, y_1^m, a_{j-m}^{n-2m}) = (y_1^m) \wedge$$

$$\wedge\ A(a_1^{i-1}, y_1^m, a_i^{j-m-1}, \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_{j-m}^{n-2m}) = (y_1^m)$$

для каждого $(a_1^{n-2m}, x_1^m, y_1^m) \in Q^n$.

Отсюда находим, что имеют место равенства

$$A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_{j-m}^{n-2m}) =$$

$$= \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}) \quad \text{и}$$

$$A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, \bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_{j-m}^{n-2m}) =$$

$$= e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m})$$

для любого $(a_1^{n-2m}) \in Q^{n-2m}$, откуда получим, что

$$\bar{e}_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}) = e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m})$$

для каждого $(a_1^{n-2m}) \in Q^{n-2m}$.

Утверждение доказано.

Учитывая факт, что формула под (1) эквивалентна формуле:

$$(\bar{1})\qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m}(\forall x_t \in Q)_1^m A(a_1^{i-1}, e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}),\ a_i^{j-m-1},$$
$$x_1^m, a_{j+m}^{n-2m}) = (x_1^m) \ \wedge$$
$$\wedge\ (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m}(\forall x_t \in Q)_1^m A(a_1^{i-1}, x_1^m, a_i^{j-m-1},$$
$$e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m}), a_{j+m}^{n-2m}) = (x_1^m),$$

подобним способом (из доказательства утверждения 1) доказывается следующее утверждение:

<u>Утверждение 2.</u> Пусть (Q,A) (n,m)-группоид, $n \geq 2m$. Пусть, далее, существуют отображения $e_{(i,j)}: Q^{n-2m} \to Q^m$ и $e_{(j,i)}: Q^{n-2m} \to Q^m$, где $i \in \{1,\ldots,n-2m+1\}$, $j \in \{m+1,\ldots,n-m+1\}$ i $j-i \geq m$, удовлетворяющие условиям:

$$(1_L)\qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m}(\forall x_t \in Q)_1^m A(a_1^{i-1}, e_{(i,j)}(a_1^{n-2m}), a_i^{j-m-1}, x_1^m,$$
$$a_{j+m}^{n-2m}) = (x_1^m) \ \text{и}$$

$$(1_R)\qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m}(\forall x_t \in Q)_1^m A(a_1^{i-1}, x_1^m, a_i^{j-m-1}, e_{(j,i)}(a_1^{n-2m}),$$
$$a_{j+m}^{n-2m}) = (x_1^m).$$

Тогда имеют место равенства:

$$e_{(i,j)}(a_1^{n-2m}) = e_{(j,i)}(a_1^{n-2m}) = e_{\{i,j\}}(a_1^{n-2m})$$

для каждого $(a_1^{n-2m}) \in Q^{n-2m}$, где $e_{\{i,j\}}$ $\{i,j\}$-нейтральная операция (n,m)-группоида (Q,A).

* *

Обобщая понятие n-группы Дёрнте [5], Г. Чупона в [3] определил понятие (n,m)-группы следующим образом:

Определение 2_1. [3-4][2)] Пусть A отображение множества Q^n в множество Q^m, где $n > m$ и $n,m \in N$. Объект (Q,A) называется (n,m)-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) удовлетворяет следующим условиям:

$$1° \ (\forall a_i \in Q_i)_1^{2n-m} \ A(A(a_1^n),a_{n+1}^{2n-m}) = A(a_1^j,A(a_{j+1}^{j+n}),a_{j+n+1}^{2n-m})$$

для каждого $j \in \{1,\ldots,n-m\}$; и

2° каждое из уравнений $A(x_1^m,a_1^{n-m}) = (b_1^m)$ и $A(a_1^{n-m},y_1^m) = (b_1^m)$ разрешимо однозначно для любых a_1^{n-m}, $b_1^m \in Q$.

Притом имеет место и следующее опеределение [2]:

Определение 2_2. [2-4] (n,m)-группоид (Q,A), $n > m$, называется (n,m)-полугруппой тогда и только тогда, когда имеет место условие под 1°.

Утверждение 3. Если (Q,A) (n,m)-группа и $n \geq 2m$, то (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией.

Доказательство.

Пусть (Q,A) (n,m)-группа и $n \geq 2m$. Пусть, далее a_1^{n-2m}, c_1^m любые элементы множества Q. Тогда, ввиду 2° из определения 2_1, уравнение

$$\text{(a)} \qquad A(x_1^m,a_1^{n-2m},c_1^m) = (c_1^m)$$

обладает единстевенным решением по неизвестной (x_1^m). Решение

2) В работе под [4] находим обзор результатов по теории (n,m)-групп и (n,m)-полугрупп. Притом, в [4] доказываются новые результаты работающих в Семинаре "Векторско вредносни полугрупи и групи" - Скопје. Иначе, все работы в сборнике "Vector valued semigroups and groups" относятся к теории (n,m)-группоидов.

этого уравнения обозначим через

$$e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}).$$

Притом, для каждого $(c_1^m) \in Q^m$ $e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}$ является отображением множества Q^{n-2m} в множество Q^m.

Пусть, далее, (c_1^m) фиксированный элемент множества Q. Тогда, ввиду 2° из определения 2_1, для каждого $(b_1^m) \in Q^m$ существует в точности один $(y_1^m) \in Q^m$ удовлетворяющий уравнению

$$(б) \qquad (b_1^m) = A(c_1^m, \overset{n-2m}{c_1}, y_1^m).$$

Далее, учитывая (а), (б) и 1° из определения 2_1, находим, что имеет место следующая цепь равенств:

$$\begin{aligned} &A(e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}), a_1^{n-2m}, b_1^m) = \\ &= A(e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}), a_1^{n-2m}, A(c_1^m, \overset{n-2m}{c_1}, y_1^m)) = \\ &= A(A(e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}), a_1^{n-2m}, c_1^m), \overset{n-2m}{c_1}, y_1^m) = \\ &= A(c_1^m, \overset{n-2m}{c_1}, y_1^m) = (b_1^m), \end{aligned}$$

откуда получаем, что имеет место формула:

$$(\forall a_t \in Q)_1^{n-2m} (\forall b_t \in Q)_1^m \; A(e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}), a_1^{n-2m}, b_1^m) = (b_1^m).$$

Притом, так как $e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}$ одно и то же отображение для каждого $(c_1^m) \in Q^m$, $e^{(c_1^m)}_{(1,n-m+1)}$ обозначим через $e_{(1,n-m+1)}$. В самом деле, мы доказали, что в (n,m)-группе, $n \geq 2m$, <u>существует</u> отображение $e_{(1,n-m+1)} : Q^{n-2m} \to Q^m$ удовлетворяющее условию:

$$(ц) \qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m} (\forall x_t \in Q)_1^m \; A(e_{(1,n-m+1)}(a_1^{n-2m}), a_1^{n-2m}, x_1^m) = (x_1^m)\,^{3)}.$$

[3] см. формулу под (1_L) из утверждения 2 для $i = 1$ и $j = n-m+1$.

Подобным способом доказывается, что существует и отображение $e_{(n-m+1,1)} : Q^{n-2m} \to Q^m$, удовлетворяющее условию:

$$(\text{ц}') \qquad (\forall a_t \in Q)_1^{n-2m} (\forall x_t \in Q)_1^m \, A(x_1^m, a_1^{n-2m}, e_{(n-m+1)}(a_1^{n-2m})) = $$

$$= (x_1^m) \text{ [4]}.$$

Наконец, учитывая факт, что существуют отображения $e_{(1,n-m+1)} : Q^{n-2m} \to Q^m$ и $e_{(n-m+1,1)} : Q^{n-2m} \to Q^m$ удовлетворяющие, в том же порядке, условиям (ц) и (ц'), ввиду утверждения 2, находим, что существует отображение $e_{\{1,n-m+1\}} : Q^{n-2m} \to Q^m$ такое, что

1) $e_{\{1,n-m+1\}} = e_{(1,n-m+1)} = e_{(n-m+1)}$; и

2) $e_{\{1,n-m+1\}}$ является $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией в (n,m)-группе (Q,A).

Утверждение доказано.

Лемма 4. Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$ [5]. Тогда, если $n \geq 3m$, то в (Q,A) имеют место импликации:

$$(\alpha) \qquad A(a_1^m, c_1^{n-m}) = A(b_1^m, c_1^{n-m}) \Rightarrow (a_1^m) = (b_1^m); \text{ и}$$

$$(\beta) \qquad A(c_1^{n-m}, a_1^m) = A(c_1^{n-m}, b_1^m) \Rightarrow (a_1^m) = (b_1^m)$$

для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^{n-m} \in Q$.

Доказательство.

В каждом (n,m)-группоиде имеет место монотония. Таким образом, в частности, имеют место импликации:

$$(\bar{\alpha}) \qquad (a_1^m) = (b_1^m) \Rightarrow A(a_1^m, c_1^{n-m}) = A(b_1^m, c_1^{n-m}); \text{ и}$$

---

[4] см. формулу под (1_R) из утверждения 2 для $i = 1$ и $j = n-m+1$.

[5] определение 1.

$$(\bar{\beta}) \qquad (a_1^m) = (b_1^m) \Rightarrow A(c_1^{n-m}, a_1^m) = A(c_1^{n-m}, b_1^m)$$

для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^{n-m} \in Q$.

Пусть a_1^m, b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m} любые элементы множества Q удовлетворяющие равенству:

$$A(a_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}) = A(b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}).$$

Отсюда, ввиду $(\bar{\alpha})$, 1° из определения 2_1 и определения 1, находим, что имеет место следующая цепь импликаций:

$$A(a_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}) = A(b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}) \Rightarrow$$

$$A(A(a_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}), e(d_1^{n-2m}), \overset{n-3m}{c_1}, e(c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) =$$

$$A(A(b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}), e(d_1^{n-2m}), \overset{n-3m}{c_1}, e(c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) \Rightarrow$$

$$A(a_1^m, A(c_1^m, d_1^{n-2m}, e(d_1^{n-2m})), \overset{n-3m}{c_1}, e(c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) =$$

$$A(b_1^m, A(c_1^m, d_1^{n-2m}, e(d_1^{n-2m})), \overset{n-3m}{c_1}, e(c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) \Rightarrow$$

$$A(a_1^m, c_1^m, \overset{n-3m}{c_1}, e((c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) = A(b_1^m, c_1^m, \overset{n-3m}{c_1}, e(c_1^m, \overset{n-3m}{c_1})) \Rightarrow$$

$$(a_1^m) = (b_1^m).$$

Таким образом, ввиду факта, что $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = \top$, мы доказали, что имеет место импликация

$$A(a_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}) = A(b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m}) \Rightarrow (a_1^m) = (b_1^m)$$

для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^m, d_1^{n-2m} \in Q$, т.е., что имеет место импликация под (α) для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^{n-m} \in Q$.

Подобным способом доказывается, что имеет место импликация под (β) для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^{n-m} \in Q$.

Лемма доказана.

Следствием леммы 4 является следующее утверждение:

<u>Лемма 5.</u> Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает

$\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$[5]. Тогда, <u>если</u> $n \geq 3m$, <u>то</u> каждое из уравнений

$$A(x_1^m, a_1^{n-m}) = (b_1^m) \quad \text{и} \quad A(a_1^{n-m}, y_1^m) = (b_1^m)$$

(по неизвестных (x_1^m) и (y_1^m)) обладает не больше чем одним решением для любых $a_1^{n-m}, b_1^m \in Q$.

Далее, учитывая лемму 4 и монотонии вида $(\bar{\alpha})$ и $(\bar{\beta})$ из доказательства леммы 4, находим, что имеет место и следующее утверждение:

<u>Лемма 6</u>. Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$. Тогда, <u>если</u> $n \geq 3m$, <u>то</u> имеют место эквивалентности

$$(\hat{\alpha}) \qquad A(a_1^m, c_1^{n-m}) = A(b_1^m, c_1^{n-m}) \Leftrightarrow (a_1^m) = (b_1^m) \quad \text{и}$$

$$(\hat{\beta}) \qquad A(c_1^{n-m}, a_1^m) = A(c_1^{n-m}, b_1^m) \Leftrightarrow (a_1^m) = (b_1^m)$$

для любых $a_1^m, b_1^m, c_1^{n-m} \in Q$.

На основании леммы 6, учитывая доказательство леммы 4, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>Лемма 7.</u> Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$[5]. Тогда, <u>если</u> $n \geq 3m$, <u>то</u> имеют место эквивалентности

$$A(x_1^m, a_1^m, b_1^{n-2m}) = (c_1^m) \Leftrightarrow$$

$$(x_1^m) = A(c_1^m, e(b_1^{n-2m}), \overset{n-3m}{a_1}, e(a_1^m, \overset{n-3m}{a_1})) \quad \text{и}$$

$$A(b_1^{n-2m}, a_1^m, y_1^m) = (c_1^m) \Leftrightarrow$$

$$(y_1^m) = A(e(\overset{n-3m}{a_1}, a_1^m), \overset{n-3m}{a_1}, e(b_1^{n-2m}), c_1^m)$$

для любых $a_1^m, b_1^{n-2m}, c_1^m, x_1^m, y_1^m \in Q$.

Ввиду леммы 5, леммы 7 и определения 2_1, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>Утверждение 8.</u> Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$. Тогда, <u>если</u> $n \geq 3m$, <u>то</u> (Q,A) является (n,m)-группой.

Учитывая доказательство леммы 4, ввиду леммы 7 и утверждения 8, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>Утверждение 9.</u> Пусть (Q,A) (n,m)-полугруппа и (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией e; $n \geq 2m$[5]. Тогда, <u>если</u> $n > 3m$, <u>то</u> имеют место равенства

$$A(c_1^m,e(b_1^{n-2m}),\overset{n-3m}{x},e(a_1^m,\overset{n-3m}{x})) =$$

$$A(c_1^m,e(b_1^{n-2m}),\overset{n-3m}{y},e(a_1^m,\overset{n-3m}{y})) \quad и$$

$$A(e(\overset{n-3m}{x},a_1^m),\overset{n-3m}{x},e(b_1^{n-2m}),c_1^m) =$$

$$A(e(\overset{n-3m}{y},a_1^m),\overset{n-3m}{y},e(b_1^{n-2m}),c_1^m)$$

для любых $a_1^m,b_1^{n-2m},c_1^m,x,y \in Q$.[6]

Наконец, учитывая утверждение 3 и утверждение 8, находим, что имеет место следующее утверждение:

<u>Теорема 10.</u> <u>Если</u> $n \geq 3m$, <u>то</u> (n,m)-полугруппа (Q,A) является (n,m)-группой тогда и только тогда, когда (Q,A) обладает $\{1,n-m+1\}$-нейтральной операцией.

---

[6] Для $n = 3m$ $\overset{n-3m}{x}$ и $\overset{n-3m}{y}$ являются пустимы последовательностями.

* * *

Примечание.

Г. Чупона мне обратил внимание на факт, что результат из теормы 10 для $m = 1$ (теорема 7 из [1]) в иной форме уже известен. Именно, в [6] и [7], в том же порядке, доказаны следующие утверждения:

а) n-полугруппа $Q([\ ])$ является n-группой ($n \geq 3$) тогда и только тогда, когда существует одна $(n-2)$-арная операция $(\ )^{-1}$ в Q такая, что для каждых $x_1,\ldots,x_{n-2},y \in Q$ имеют место равенства:

$$[yx_1 \ldots x_{n-2}(x_1 \ldots x_{n-2})^{-1}] = y =$$

$$= [(x_1 \ldots x_{n-2})^{-1}x_1 \ldots x_{n-2}y]$$

([6], стр. 11); и

б) Пусть $(G;f,g)$ универсальная алгебра, где f n-арная ассоциативная операция, g $(n-2)$-арная операция и $n > 2$. Тогда имеет место: $(G;f,g)$ является n-группой тогда и только тогда, когда

$$f(y,x_j^{n-2},g(x_1^{n-2}),x_1^{j-1}) = y \quad \text{и}$$

$$f(x_k^{n-2},g(x_1^{n-2}),x_1^{k-1},y) = y$$

для некоторых $1 \leq k,\ j \leq n-2$ и всех $y,x_1,\ldots,x_{n-2} \in G$ ([7], Corollary 5).

Притом, в [6] и [7] не встречаются сознания о том, что операции $(\ )^{-1}$ и g являются обобщением нульарной операцией - взятие единицы в группоиде, и, что речь идет о однозначно определеных операциях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ушан Я., Нейтральные операции n-группоидов, Review of Reserach Faculty of Science University of Novi Sad, Math. Ser., 18-2, 1988, 117-126.

[2] Трпеновски Б.,Чупона Ѓ., [n,m]-группоиди, Билтен ДМФ СРМ. Скопје, 21,,1970, 19-29.

[3] Čupona Ǵ., Vector valued semigroups, Semigroup Forum, 26, 1983, 65-74.

[4] Čupona Ǵ., Celakoski N., Markovski S., Dimovski D., Vector valued groupoids, semigroups and groups, Macedonian Academy of Sciences and Arts, Skopje, 1988, 1-78.

[5] Dörnte W., Untersuchengen über einen verlgemeinerten Gruppenbegriff, Math. Z., 29, 1928, 1-19.

[6] Celakoski N., On some axiom systems for n-groups, Математички билтен, книга 1 (XXVII), Скопје, 1977, 5-14.

[7] Dudek W.A., Głazek K. and Gleichgewicht B., A note on the axioms of n--groups, Colloquia Math. Societatis János Bolyai, 29. Universal Algebra, Esztergom (Hungary), 1977, 195-202.

REZIME

NEUTRALNE OPERACIJE (n,m)-GRUPOIDA

U radu se uvodi pojam $\{i,j\}$ -neutralne operacije (n,m)-grupoida kao jedno uopštenje $\{i,j\}$ -neutralne operacije n-grupoida [1], i, na taj način, kao jedno uopštenje nularne operacije - fiksiranje neutralnog elementa u grupoidu (definicija 1). Pojam je definisan za (n,m)-grupoide (Q,A) $(A:Q^n \to Q^m,\ (n,m) \in N^2)$ koji zadovoljavaju uslov: $n \geq 2m$. Pri tom: $i \in \{1,\dots,n-2m+1\}$, $j \in \{m+1,\dots,n-m+1\}$ i $j-i \geq m$. U (n,m)-grupoidu za svako $(i,j) \in N^2$. Osnovni rezultat rada odnosi se na (n,m)-grupe i (n,m)-polugrupe [3-4] (definicije 2_1 i 2_2): ako je $n \geq 3m$, onda je (n,m)-polugrupa (Q,A) (n,m)-grupa tada i samo tada, kada (Q,A) ima $\{1,n-m+1\}$-neutralnu operaciju.

SUMMARY

NEUTRAL OPERATIONS ON (n,m)-GROUPOIDS

In this paper the notion of $\{i,j\}$ -neutral operation of (n,m)-groupoid as a generalization of $\{i,j\}$ -neutral operation of n-groupoid [1] is given. In this way, as a generalization of a nular operation - a neutral element is fixed in the groupoid (Definition 1). This notion is defined for (n,m)-groupoids (Q,A) $(A:Q^n \to Q^m,\ (n,m) \in N^2)$ which satisfy the condition: $n \geq 2m$. In addition: $i \in \{1,\dots,n-2m+1\}$, $j \in \{m+1,\dots,n-m+1\}$ and $j-i \geq m$. In (n,m)-groupoid there is at most one $\{i,j\}$-neutral operation for each $(i,j) \in N^2$. The main result of this paper is concerning (n,m)-groups and (n,m)-semigroups [3-4] (Definitions 2_1 and 2_2): If $n \geq 3m$, then an (n,m)-semigroup (Q,A) is an (n,m)-group if and only if (Q,A) has an $\{1,n-m+1\}$ -neutral operation.

Received by the editrors September 24, 1990.