Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 21, 1 (1991), 127-133

Review of Research
Faculty of Science
Mathematics Series

ZUR APPROXIMATION VON FIXPUNKTEN BEI MENGENWERTIGEN OBERHALBSTETIGEN KOMPAKTEN ABBILDUNGEN

S. Hahn und **S. Juckelandt**
Pädagogische Hochschule "Karl Friedrich Wilhelm Wander" Dresden
Sektion Mathematik
Wigardstraße 17, DDR, Dresden, 8060

Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß ein bekanntes Verfahren zur Berechnung eines Fixpunktes für den Fixpunktsatz von Kakutani auch auf allgemeinere Fixpunktsätze angewendet werden kann.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 47H10, 54H25, 58C30
Kennwörter: Mengenwertige oberhalbstetige Abbildungen, Simpliciale Approximation von Fixpunkten, Merrill-Algorithmus

1. Einleitung

Sei K eine nichtleere Teilmenge des m-dimensionalen euklidischen Raumes R^m. Mit co$K, \partial K,$ int$K$, und $\overline{K}$ bezeichnen wir die konvexe Hülle, den Rand, das Innere bzw. die Abschließung von K. Das Symbol ac(K) bezeichne das System aller nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Teilmengen von K. Sei $M \subseteq R^m$. Die ("mengenwertige") Abbildung $F : M \to$ ac(K) heißt oberhalbstetig, wenn für jedes $x_0 \in M$ und jede offene Menge $G \subseteq R^m$ mit $F(x_0) \subseteq G$ eine Umgebung U von x_0 existiert, so daß $F(x) \subseteq G$ für jedes $x \in U \cap M$ gilt. F heißt kompakt, wenn F oberhalbstetig und $F(M)$ eine beschränkte Teilmenge des R^m ist. Wenn $F(M)$ beschränkt ist, ist die Oberhalbstetigkeit äquivalent mit der Abgeschlossenheit des Graphen $\mathrm{Gr}F := \{(x,y) : x \in M,\ y \in F(x)\}$ in $M \times K$. Kakutani bewies folgenden fundamentalen Fixpunktsatz

Satz von Kakutani. Es seien C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge von R^m und $F : C \to \mathrm{ac}(C)$ eine oberhalbstetige Abbildung. Dann hat F einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein $x \in C$ mit $x \in F(x)$.

Der klassische Beweis von Kakutani wurde von Lüthi [3] (vgl. auch [2], [6]) ausgebaut, um ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung eines solchen Fixpunktes zu erhalten. Dazu werden Triangulationen des R^m verwendet. Zum Begriff der Triangulation und des Simplex verweisen wir auf [2], [3], [6]. Den Grundgedanken von Lüthi verwenden wir, um für den folgenden allgemeinen (auch für lokalkonvexe Räume gültigen) Fixpunktsatz aus [1] ein Konstruktionsverfahren zu entwickeln.

Theorem 1. *Es seien $U \subseteq R^m$ eine abgeschlossene Umgebung eines Punktes $a \in R^m$ und K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von R^m mit $a \in K$. Weiter sei $F : U \cap K \to \mathrm{ac}(K)$ eine kompakte Abbildung mit folgender Eigenschaft*

$$(*) \qquad \beta x + (1-\beta)\, a \notin F(x) \qquad (x \in \partial U \cap K,\ \beta > 1).$$

Dann hat F einen Fixpunkt.

Fur $K = R^m$ wurde Theorem 1 von Ma [4] mit Abbildungsgrad bewiesen. Für den Spezialfall $U = R^m$ erhalten wir aus Theorem 1 eine modifizierte Fassung des Satzes von Kakutani (im Satz von Kakutani kann die Voraussetzung der Beschränktheit von C ersetzt werden durch die der Kompaktheit von F).

Der erste Teil des Beweises unseres Theorems 2 wird gleichzeitig eine äußerst elementare Herleitung von Theorem 1 aus dem Fixpunktsatz von Kakutani sichtbar machen.

2. Hilfsaussagen

Sei T eine Triangulation von R^m und $F : R^m \to \mathrm{ac}(R^m)$. Wir wählen für jeden Eckpunkt w von T ein $f(w) \in F(w)$. Für beliebiges $x \in R^m$ seien $w_1, \ldots, w_{t+1}$ ($t \in \{0, 1, \ldots, m\}$) die eindeutig bestimmten Eckpunkte des t–dimensionalen Simplexes, das x in seinem Inneren (relativ der Dimension t) enthält. Dann existiert genau ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{t+1})$ mit $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \ldots, t+1$) und $\sum_{i=1}^{t+1} \lambda_i = 1$ sowie $x = \sum_{i=1}^{t+1} \lambda_i w_i$. Man definiert eine Funktion

$$f : R^m \to R^m \quad \text{durch} \quad f(x) := \sum_{i=1}^{t+1} \lambda_i f(w_i), \quad \text{wobei} \quad x = \sum_{i=1}^{t+1} \lambda_i w_i \in R^m$$

ist. f nennt man eine stückweise lineare Approximation von F bezüglich der Triangulation T.

Man sieht leicht, daß f stetig und $f(R^m) \subseteq \mathrm{co}F(R^m)$ ist. Falls F kompakt ist, muß auch f kompakt sein und aus dem Fixpunktsatz von Brouwer folgt dann die Existenz eines Fixpunktes für f. Unter gewissen Voraussetzungen kann mit dem Algorithmus von Merrill [5], der in [3] ausführlich beschrieben wird und verschiedene Vorteile gegenüber anderen bekannten Algorithmen hat (s. [2], [6]), ein Fixpunkt einer stückweise linearen Approximation berechnet werden. In [3, s. 113-115] wird dazu folgende Aussage bewiesen.

Lemma 1. **(Merrill)** *Der Algorithmus von Merrill berechnet einen Fixpunkt einer stückweise linearen Approximation f einer oberhalbstetigen Abbildung $F : R^m \to \mathrm{ac}(R^m)$ in endlich vielen Schritten, wenn gilt:*

(1) *Es existieren positive Zahlen M und δ und ein $x \in R^m$ derart, daß für alle $z \in R^m$ mit $\|z - x\| > M$, $u(z) \in F(z)$ und $y \in R^m$ mit $\|y - z\| \leq \delta$ sowie $\|y - x\| > M$ das Skalarprodukt von $u(z) - z$ mit $y - x$ negativ ist, also $(u(z) - z)(y - x) < 0$ gilt.*

(2) *Die zu f gehörige Triangulation hat einen Durchmesser, der kleiner als δ ist.*

Lemma 2. *Es sei $F : R^m \to \mathrm{ac}(R^m)$ eine kompakte Abbildung. Dann gilt*

(1) *Es existiert eine Folge* (x_k) *aus* R^m, *die gegen einen Fixpunkt von* F *konvergiert. Debei ist jedes* x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *Fixpunkt einer stückweise linearen Approximation von* F *bezüglich einer Triangulation* T_k *von* R^m.

(2) *Jedes* x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *aus* (1) *läßt sich in endlich vielen Schritten durch den Algorithmus von Merrill berechnen.*

Beweis. (1) Sei (T_n) eine Folge von Triangulationen des R^m mit $d(T_n) \to 0$ ($d(T_n)$ bezeichne den Durchmesser von T_n). Sei $f_n : R^m \to R^m$ eine stückweise lineare Approximation von F bezüglich T_n und x_n ein Fixpunkt von f_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Für jedes n existieren Eckpunkte $w_1(n), w_2(n), \ldots, w_{m+1}(n)$ von T_n und eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_i(n) \in [0,1]$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ mit $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(n) = 1$ und $x_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(n) w_i(n)$. Nach Definition der stückweise linearen Approximation f_n von F gilt

$$(*) \qquad x_n = f_n(x_n) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(n) f_n(w_i(n)) \qquad \text{für jedes } n.$$

Weil [0,1] und $F(R^m)$ beschränkt sind, existieren konvergente Teilfolgen (x_k) von (x_n) und $(f_k(w_i(k)))$ von $(f_n(w_i(n)))$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in R^m$ und $\lim_{k\to\infty} f_k(w_i(k)) = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$. Aus $d(T_k) \to 0$ folgt $\lim_{k\to\infty} w_i(k) = a$ für alle $i = 1, \ldots, m+1$. Da Gr F abgeschlossen ist, folgt aus $f_k(w_i(k)) \in F(w_i(k))$ und $f_k(w_i(k)) \to u_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n+1$ die Beziehung $u_i \in F(a)$. Aus (*) erhalten wir durch Grenzübergang $a = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i u_i$, woraus wegen der Konvexität von $F(a)$ schließlich $a \in F(a)$ folgt.

(2) Sei T_k eine Triangulation von R^m entsprechend des Beweises von (1) und x_k Fixpunkt einer stückweise linearen Approximation f_k von F. Wir wählen ein $\delta > 0$ mit $\delta > d(T_k)$ und ein $x \in F(R^m)$. Da $f(R^m)$ beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ derart, daß $\|u - x\| < M - \delta$ für alle $u \in F(R^m)$ gilt. Sei z und y aus R^m mit $\|z - x\| > M$, $\|y - x\| > M$, $\|y - z\| \leq \delta$ und $u(z) \in F(z)$. Dann erhalten wir unter Verwendung der Schwarz'schen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}(u(z) - z)(y - x) &= (u(z) - x)(y - x) + (y - z)(y - x) - \|y - x\|^2 \\ &\leq \|y - x\|(M - \|y - x\|) < 0.\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussatzungen von Lemma 1 erfüllt, woraus die Behauptung folgt.

3. Hauptergebnis

Theorem 2. *Sei $U \subseteq R^m$ eine abgeschlossene Umgebung eines Punktes $a \in R^m$ und K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge mit $a \in K$. Weiter sei $F : U \cap K \to \mathrm{ac}(K)$ eine kompakte Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

$$\text{(LS)} \qquad \beta x + (1-\beta)a \notin F(x) \qquad (x \in \partial U \cap K, \beta > 1).$$

Dann gilt

(1) *F hat einen Fixpunkt*

(2) *Es existiert eine Folge (x_k) aus R^m, die gegen einen Fixpunkt b von F konvergiert, und alle $x_k (k = 1, 2, \ldots)$ können mit dem Algorithmus von Merrill in endlich vielen Schritten berechnet werden.*

Beweis. (1) Sei $F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{für } x \in (\mathrm{int} U) \cap K \\ \mathrm{co}(F(x) \cup \{a\}) & \text{für } x \in \partial U \cap K \\ \{a\} & \text{für } x \in K \backslash (U \cap K). \end{cases}$
Wie in [6, S. 58] zeigt man leicht, daß $F_1 : K \to \mathrm{ac}(K)$ oberhalbstetig ist. Da F kompakt und $F_1(K) \subseteq \mathrm{co}(F(U \cap K) \cup \{a\})$ ist, muß F_1 sogar eine kompakte Abbildung sein. Aus dem Satz von Kakutani folgt die Existenz eines Fixpunktes $b \in K$ von F_1. Wir zeigen nun, daß b auch Fixpunkt von F ist.

Dazu sei $b \in \partial U \cap K$ angenommen, denn der Fall $b \in (\mathrm{int} U) \cap K$ liefert bereits die Behauptung und der Fall $b \notin U \cap K$ ist wegen $a \in U \cap K$ unmöglich. Wegen $a \in \mathrm{int} U$ gilt $b \neq a$. Aus $b \in \mathrm{co}(F(b) \cup \{a\})$ folgt die Existenz von Zahlen $t_i \in [0, 1]$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ und von Elementen $x_i \in F(b)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ mit $b = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i + t_n a = (1 - t_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} x_i + t_n a$. Da $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} = 1$ und $x_i \in F(b)$ gilt, folgt aus der

Konvexität von $F(b)$, daß $u := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} x_i \in F(b)$ ist. Angenommen, es gilt $b \notin F(b)$. Dann folgt aus $b = (1-t_n)u + t_n a$ die Beziehung $t_n \neq 0$ und wegen $b \neq a$ auch $t_n \neq 1$. Daraus ergibt sich $\beta b + (1-\beta)a = u \in F(b)$ mit $\beta = \frac{1}{1-t_n} > 1$ und $b \in \partial U \cap K$ im Widerspruch zur Voraussetzung über F.

(2) Nach einem bekannten Ergebnis von Dugundji ist K ein Retrakt von R^m. Daher existiert eine stetige Abbildung $r : R^m \to K$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in K$.

Wir setzen $F_2(x) = F_1(r(x))$, $(x \in R^m)$. Dann ist $F_2 : R^m \to \mathrm{ac}(R^m)$ eine kompakte Abbildung, auf die wir Lemma 2 anwenden können. Daraus folgt die Behauptung von Theorem 2, denn jeder Fixpunkt b von F_2 ist auch Fixpunkt von F_1 (da aus $F_2(R^m) \subseteq K$ stets $b \in K$ und damit $F_1(b) = F_2(b)$ folgt) und damit nach (1) auch Fixpunkt für F.

Bemerkungen.

1.) Speziell kann in Theorem 2 für K ein Kegel (also eine abgeschlossene, nichtleere, konvexe Teilmenge mit $K \notin \{0\}$, für die mit $x \in K\backslash\{0\}$ stets $tx \in K$ für alle $t \geq 0$, nicht aber $-x \in K$ gilt) verwendet werden, wodurch wir Anschluß an die Theorie der positiven Operatoren erhalten.

2.) Wie man leicht zeigen kann, ist bekanntlich die Randbedingung (LS) aus Theorem 2 speziell erfüllt, wenn U konvex ist und $F(\partial U \cap K) \subseteq U$ gilt.

Wir geben abschließend ein Beispiel einer kompakten Abbildung an, die die Voraussetzungen von Theorem 2, nicht aber die des Satzes von Kakutani erfüllt.

Beispiel. Sei $U = \{x \in R^m : \|x\| \leq 1\}$ und $F : U \to \mathrm{ac}(R^m)$ definiert durch $F(x) = \{y \in R^m : \|y - (3u_0 - 6x)\| \leq 1\}$ mit $u_0 \in \partial U$ fest. Es gilt $F(U) = \bigcup_{x \in U} F(x) = \{y \in R^m : \|y - 3u_0\| \leq 7\}$. Man sieht leicht, daß F kompakt ist. Wir zeigen, daß F die Bedingung (LS) aus Theorem 2 erfüllt (mit $a = 0$). Angenommen, es gilt $\beta x \in F(x)$ für ein $x \in \partial U$ und ein $\beta > 1$. Wegen $\|x\| = \|u_0\| = 1$ folgt der Widerspruch $1 \geq \|\beta x - (3u_0 - 6x)\| \geq |\, \|\beta x + 6x\| - \|3u_0\|\, | = |\, |\beta + 6| - 3| > 4$. Somit sind alle Voraussetzungen von Theorem 2 erfüllt (mit $K = R^m$) Jedoch gilt nicht $F(U) \subseteq U$, sogar $F(\partial U) \subseteq U$ ist nicht erfüllt, denn es gilt z. B. $F(u_0) \cap U = \emptyset$.

References

[1] Hahn, S.: Fixpunktsätze für mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen. Math. Nachr. 73 (1976), 269-293.

[2] Laan, G. van der: Simplicial fixed point algorithms Ph. D. Dissertation, University of Amsterdam 1980.

[3] Lüthi, H. J.: Komplementaritäts - und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie. Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1976.

[4] Ma, T. W.: Topological degrees of set – valued compact fields in locally convex spaces. Diss. Math. 92 (1972).

[5] Merrill, O. H.: Applications and extensions of an algorithm that computs fixed points of certain non-empty upper semi-continuous point to set mappings. Ph. D. dissertation University of Michigan (1972).

[6] Todd, M. J.: The computation of fixed points and applications. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1976.

REZIME

APROKSIMACIJA NEPOKRETNE TAČKE VIŠEZNAČNIH OD GORE POLUNEPREKIDNIH KOMPAKTNIH PRESLIKAVANJA

U ovom radu je pokazano da jedan poznati postupak za izračunavanje nepokretne tačke za teoremu o nepokretnoj tački Kakutanija može da se primeni takodje i na opšte teoreme o nepokretnoj tački.

Received by the editors August 31, 1989.