

FORMES PRESQUE ANALYTIQUES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE COMPLEXE¹

Gheorghe Pitiş

Faculté de Mathématiques, Université de Braşov,
2200 Braşov, Roumanie

Dumitru Smaranda

Faculté de Mathématiques, Université de Bucureşti,
70109 Bucureşti, Roumanie

Abstract

L'étude des champs de tenseurs presque analytiques sur certaines variétés a été entreprise par des géomètres japonais, des résultats très intéressants et complets étant mentionnés dans la monographie [7].

Dans cette note nous introduisons une différentielle dans l'algèbre des formes presque analytiques sur une variété presque complexe quelconque et nous démontrons qu'elle vérifie un lemme de type Poincaré. Nous obtenons ensuite une caractérisation des groupes de cohomologie de la variété considérée, à valeurs dans \mathbb{C} .

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 53 C 15

Key words and phrases: pure form, almost analytic form, almost complex manifold, cohomology group.

1. Introduction

Soit M une variété C^∞ -différentiable, de dimension $2n$ et douée de la structure presque complexe F . Soit $T(M)$ l'anneau des fonctions C^∞ -différentiables sur M et désignons par $\mathcal{X}(M)$ le $T(M)$ -module de champs de vecteurs tangents et par $\Lambda^r(M)$ le $T(M)$ -module de formes différentiables de degré r sur M .

¹Cette note est dédiée à la mémoire du professeur dr. Dumitru Smaranda.

Définition 1. On dit que $\omega \in \Lambda^r(M)$ est pure si pour tout $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(M)$ on a

$$\omega(FX_1, X_2, \dots, X_r) = \omega(X_1, \dots, FX_i, \dots, X_r) \quad i \in \overline{2, r}.$$

À la forme pure ω on associe de manière unique la forme $\tilde{\omega} \in \Lambda^r(M)$, définie par

$$(1) \quad \tilde{\omega}(X_1, X_2, \dots, X_r) = -\omega(FX_1, X_2, \dots, X_r).$$

Définition 2. La r -forme pure ω s'appelle presque analytique si

$$(2) \quad (d\tilde{\omega})(X_1, X_2, \dots, X_{r+1}) + (d\omega)(FX_1, X_2, \dots, X_{r+1}) = 0.$$

On vérifie aisément que la forme $\tilde{\omega}$, associée à la forme presque analytique ω , est elle aussi presque analytique. Soient alors les couples $(\omega, \tilde{\omega})$, $(\theta, \tilde{\theta})$, où ω, θ sont des formes presque analytiques et $\tilde{\omega}, \tilde{\theta}$ sont définies par (1). On définit leur produit presque analytique par la formule, [6],

$$(3) \quad (\omega, \tilde{\omega}) \underset{a}{\wedge} (\theta, \tilde{\theta}) = (\omega \wedge \theta - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\theta}, \tilde{\omega} \wedge \theta + \omega \wedge \tilde{\theta}).$$

L'ensemble $\Lambda^r_a(M)$ des couples de r -formes presque analytiques possède une structure de module sur l'anneau

$$\mathcal{T}_a(M) = \{(f, g); f, g \in \mathcal{T}(M) : dg + df \circ F = 0\}$$

et, de plus, le module $\Lambda^r_a(M) = \bigoplus_a^r \Lambda^r_a(M)$, doué du produit (3), est une algèbre graduée, appelée algèbre des formes presque analytiques.

2. Un lemme de type Poincaré

Soit ω une r -forme presque analytique; alors les $r+1$ -formes $d\omega, d\tilde{\omega}$ sont pures. L'égalité (2) peut donc s'écrire sous la forme

$$(4) \quad d\tilde{\omega} = \tilde{d}\omega$$

où $\tilde{d}\omega$ est la forme associée à $d\omega$ par (1). Mais $(d\omega, \tilde{d}\omega) \in \Lambda^{r+1}_a(M)$ et

alors on peut définir l'opérateur

$$D : \Lambda^r_a(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}_a(M), \quad D(\omega, \tilde{\omega}) = (d\omega, \tilde{d}\omega).$$

Compte tenu de (3) on démontre par un calcul direct la

Proposition 1.

i) D est un opérateur local et R -linéaire;

ii) pour $(\omega, \bar{\omega}) \in \underset{a}{\Lambda}^r(M)$ et $(\theta, \bar{\theta}) \in \underset{a}{\Lambda}^p(M)$ on a

$$D[(\omega, \bar{\omega}) \underset{a}{\wedge} (\theta, \bar{\theta})] = D(\omega, \bar{\omega}) \underset{a}{\wedge} (\theta, \bar{\theta}) + (-1)^r (\omega, \bar{\omega}) \underset{a}{\wedge} D(\theta, \bar{\theta});$$

iii) $D^2 = 0$.

Soient $(U; x^1, \dots, x^{2n})$ une carte locale au point $x \in M$, ω une r -forme ayant la représentation locale

$$(5) \quad \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \omega_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

et F_i^j les composantes de F relatives à la base canonique.

Proposition 2. Pour que la r -forme ω , donnée par (5), soit pure il suffit que

$$F_{i_1}^k \omega_{ki_2 \dots i_r} = F_{i_j}^k \omega_{i_1 \dots k \dots i_r}$$

pour tout $j \in \overline{2, r}$ et pour toute famille d'indices $i_1, \dots, i_r \in \overline{1, 2n}$.

Soient M et N deux variétés douées des structures presque complexes F_M , resp. F_N . On a la

Proposition 3. Si $\omega \in \Lambda^r(N)$ est pure et si $f : M \rightarrow N$ est une application presque complexe alors $f^*\omega \in \Lambda^r(M)$ est pure.

À présent nous pouvons démontrer le résultat annoncé, à savoir le

Théorème 1. Soit U un ouvert de M et $(\omega, \bar{\omega}) \in \underset{a}{\Lambda}^r(U)$. Si $D(\omega, \bar{\omega}) = 0$

alors il existe un ouvert $V \subset U$ et un couple $(\theta, \bar{\theta}) \in \underset{a}{\Lambda}^{r-1}(V)$, tels que

$$D(\theta, \bar{\theta}) = (\omega, \bar{\omega}).$$

Preuve. Supposons que la forme ω est donnée par l'égalité (5). On a $d\omega = 0$ donc, d'après le lemme classique de Poincaré, il existe la $r - 1$ -forme θ telle que $d\theta = \omega$, θ étant donnée par la formule, ([2], chap. II, §9),

$$(6) \quad \theta = \left(\sum_{i_1 < \dots < i_r} \int_0^1 \omega_{i_1 \dots i_r}(tx) t^{r-1} dt \right) \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \\ \wedge \dots \wedge dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

De (6) on obtient les composantes locales de θ et alors de la proposition 2. il résulte que θ est pure. De même, il existe une $r - 1$ -forme pure θ' telle que $d\theta' = \tilde{\omega}$, celle-ci étant définie de la même manière que θ .

De (1) il résulte

$$(7) \quad \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_r} = -F_{i_1}^k \omega_{ki_2 \dots i_r}$$

et alors les composantes locales de la forme θ' sont

$$\theta'_{u_1 \dots u_{r-1}} = -x^{i_1} \int_0^1 F_{i_1}^u \omega_{uu_1 \dots u_{r-1}}(tx) t^{r-1} dt - \\ - \sum_{j=2}^r (-1)^{j-1} x^{i_j} \int_0^1 F_{u_1}^u \omega_{uu_2 \dots u_{j-1} i_j u_j \dots u_{r-1}}(tx) t^{r-1} dt.$$

Par application de la proposition 2 à la forme ω , on obtient

$$\theta'_{u_1 \dots u_{r-1}} = -F_{u_1}^u \left[x^{i_1} \int_0^1 \omega_{i_1 u u_2 \dots u_{r-1}}(tx) t^{r-1} dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^r (-1)^{j-1} x^{i_j} \int_0^1 \omega_{u u_2 \dots u_{j-1} i_j u_j \dots u_{r-1}}(tx) t^{r-1} dt \right].$$

Un calcul direct montre que les composantes locales des formes θ et θ' vérifient des relations analogues à la formule (7), donc on a $\theta' = \tilde{\theta}$. D'autre part on a

$$(d\theta)(FX_1, X_2, \dots, X_r) + (d\tilde{\theta})(X_1, X_2, \dots, X_r) = \\ = \omega(FX_1, X_2, \dots, X_r) + \omega(X_1, X_2, \dots, X_r) = 0$$

ce qui prouve que θ est une forme presque analytique.

3 . Cohomologie à valeurs dans \mathbb{C}

Les données

$$U \longrightarrow \Lambda_a^r(U); \quad U \text{ ouvert dans } M$$

$$(j : U' \hookrightarrow U) \longrightarrow \Lambda_a^r(j)(\omega, \tilde{\omega}) = (\omega|_{U'}, \tilde{\omega}|_{U'}); \quad U' \subset U$$

définissent un faisceau de \mathcal{T}_a -modules, noté Λ_a^r , et celui-ci est fin parce que le faisceau Λ^r des champs de r -formes est fin.

Si $D(f, g) = 0$, $(f, g) \in \Lambda_a^0(U)$, alors $df = dg = 0$, d'où il résulte l'inclusion $\text{Ker}(D : \Lambda_a^0(U) \longrightarrow \Lambda_a^1(U)) \subseteq \mathcal{T}_a(U)$. Mais les fonctions f et g sont alors locales constantes et donc

$$(8) \quad \text{Ker}(D : \Lambda_a^0(U) \longrightarrow \Lambda_a^1(U)) \approx \tilde{R}^2(U)$$

où \tilde{R}^2 est le faisceau associé au pré-faisceau constant R^2 . Nous obtenons ainsi la suite des faisceaux

$$(9) \quad 0 \longrightarrow \tilde{R}^2 \xrightarrow{i} \Lambda_a^0 \xrightarrow{D} \dots \longrightarrow \Lambda_a^r \xrightarrow{D} \Lambda_a^{r+1} \longrightarrow \dots$$

où D est le morphisme des faisceaux induit par l'opérateur défini dans la section 2 et i est le morphisme d'inclusion. Du théorème 1 on déduit alors le

Lemme 1. *La suite (9) est une résolution fine du faisceau \tilde{R}^2 .*

De la définition 1 il résulte le

Lemme 2. *Pour $r \geq n + 1$ il n'existe pas de r -formes pures non nulles.*

On sait que les groupes de cohomologie à valeurs dans un pré-faisceau et ceux à valeurs dans le faisceau associé sont isomorphes et alors, des lemmes 1, 2 il résulte le

Théorème 2. *Les groupes de cohomologie à valeurs complexes, de la variété presque complexe M de dimension $2n$, sont donnés par*

$$\check{H}^0(M, C) \approx \text{Ker}(D : \Lambda_a^0(M) \longrightarrow \Lambda_a^1(M))$$

$$\check{H}^r(M, C) \approx \text{Ker}(D : \Lambda_a^r(M) \longrightarrow \Lambda_a^{r+1}(M)) / D(\Lambda_a^{r-1}(M))$$

pour $0 < r < n$ et

$$\check{H}^n(M, C) \approx \Lambda_a^n(M) / D(\Lambda_a^{n-1}(M))$$

$$\check{H}^r(M, C) = 0 \text{ pour } n+1 \leq r \leq 2n.$$

En tenant compte de (8), du théorème 2 on déduit la

Proposition 4. *Si la variété presque complexe M est connexe alors*

$$\check{H}^0(M, C) \approx C.$$

References

- [1] Dolbeault, P.: Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, Ann. Math., 92(1956), 83-130.
- [2] Pham Mau Quan: Introduction à la géométrie des variétés différentiables, Dunod, Paris, 1969.
- [3] Tachibana, S.: On almost analytic vectors in almost Kahlerian manifolds, Tôhoku Math. J., 11(1959), 247-265.
- [4] Tachibana, S.: On almost analytic vectors in certain almost Hermitian manifolds, Tôhoku Math. J., 11(1959), 351-363.
- [5] Tachibana, S., Kotô, S.: On almost analytic functions, tensors and invariant subspaces, Tôhoku Math. J., 14(1962), 177-186.
- [6] Smaranda, D.: L'algèbre des formes presque analytiques et critères de presque analyticité. Dans le volume Chapitres spéciaux de géométrie différentielle, Université de Bucureşti, (1981), 67-87 (en roumain).

- [7] Yano, K.: *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New-York, 1965.

REZIME

SKORO ANALITIČKE FORME JEDNE SKORO KOMPLEKSNE PROMENLJIVE

Proučavanje skoro analitičkih tenzorskih polja nad nekim mnogostrukostima započeli su japanski geometri veoma zanimljivi i potpuni rezultati se pominju u monografiji [7].

U ovom radu uvodimo diferencijal u algebru skoro analitičkih formi nad, ma kojom skoro kompleksnom mnogostrukošću i pokazaćemo da važi jedna lema tipa Poincaré. Dobićemo, zatim, karakterizaciju grupa kohomologije sa vrednostima u C , posmatrane mnogostrukosti.

Received by the editors October 13, 1987.