Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 21, 2 (1991), 39-48

Review of Research
Faculty of Science
Mathematics Series

SUR LA CLASSIFICATION DES VARIETES PRESQUE HERMITIENNES ET DES VARIETES PRESQUE PRODUIT PAR RAPPORT AUX CONNEXIONS DE SCHOUTEN ET DE VRANCEANU

Gabriel Pripoae
University of Bucharest
Romania

Résumé

Les variétés riemanniennes presque complexes et presque produit ont été classifieés par A.Gray et L.M.Hervella [2] resp. A.M.Naveira [6], d'aprés les symétries de ∇Q (oú Q est la structure presque complexe resp. presque produit et ∇ la connexion Levi-Civita).
Etudiées en forme invariante sur des variétés presque produit [3, 4, 7] puis étendues et généralisées pour des structures presque complexes [8, 10] et f-structures [9], les connexions de Schouten et de Vrănceanu sont intimement liées aux structures respectives. Dans ce qui suit nous allons les utiliser pour caractériser certaines classes de variétés mises en évidence dans [1, 2, 6].

AMS Mathématique Subject Classification (1980): 53C15.
Key words and phrases: Expressions et motsclés: Classes de variétés presque hermitiennes, classes de variétés presque produit.

1. Préface

Soit (M,g) une variété riemannienne á n dimensions, $\mathcal{T}_s^r(M)$ le module des champs de tenseurs de type (r,s) sur M.Pour $\mathcal{T}_0^1(M)$ on utilise la notation $\mathcal{X}(M)$.
Tous objets géométriques sont supposés de classe C^∞.
Sur M on considére $Q \in \mathcal{T}_1^1(M), Q^2 = \epsilon I$, $\epsilon = \pm 1$ (une structure presque produir resp. presque complexe) t.q.

$$g(QX,QY) = g(X,Y).$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur $M; B, D \in \mathcal{T}_2^1(M)$ fixés. La connexion de Schouten (resp. Varănceanu) généralisée est définie [8] par

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\nabla_X Y + \frac{\epsilon}{2} Q\nabla_X QY + B(X,Y) \tag{1.1}$$

$$B(X,Y) + \epsilon Q B(X,QY) = 0 \tag{1.2}$$

resp.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}(\nabla_X Y + \epsilon\nabla_{QX}QY + \epsilon Q\nabla_{QX}Y + \epsilon Q\nabla_X QY + [X,Y]- \\ -\epsilon[QX,QY] + \epsilon Q[X,QY] - \epsilon Q[QX,Y]) \tag{1.3}$$

$$D(X,Y) + \epsilon D(QX,QY) + \epsilon Q D(X,QY) + \epsilon Q D(QX,Y) = 0 \tag{1.4}$$

Remarque 1.1. Soient $\bar{p}_B, \tilde{p}_D : b(M) \to b(M)$

$$\bar{p}_B(\nabla) = \bar{\nabla} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_D(\nabla) = \tilde{\nabla}$$

ou $b(M)$ est l'ensemble des connexions linéaires sur M.Un calcul simple nous montre que $\bar{p}_B, \tilde{p}_D$ sont projecteurs si et seulement si ont lieu (1.2) resp. (1.4) [8].

Remarque 1.2. [8] $\bar{\nabla}_X Q = 0$ (resp. $\tilde{\nabla}_X Q = 0$) si et seulement si

$$B(X,Y) = \epsilon Q B(X,QY) (\text{resp. } D(X,Y) = \epsilon Q D(X,QY)).$$

Remarque 1.3. Si $B = D = 0$, les deux connexions s'écrivent aussi

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{\epsilon}{2} Q(\nabla_X Q)Y$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{\epsilon}{4}((\nabla_{QY}Q)X + Q(\nabla_Y Q)X + 2Q(\nabla_X Q)Y)$$

comme on les retrouve dans [10] et [5, p. 143].
Dans ce qui suit $B = D = 0$ et ∇ est la connexion métrique sur M.

2. Classes de variétés riemanniennes presque produit

Si $\epsilon = 1$, on peut définir deux distributions orthogonales $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ á l'aide desprojecturs

$$V = \frac{I+Q}{2},\ V' = \frac{I-Q}{2}.$$

Les connexions $\bar{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$ ont été étudiés par S.Ianus et I.Popovici [3, 4] sous la forme suivante

(1.1)' $\bar{\nabla}_X Y = V\nabla_X VY + V'\nabla_X V'Y$

(1.3)') $\tilde{\nabla}_X Y = V\nabla_{VX} VY + V'\nabla_{V'X} V'Y + +V[V'X, VY] + V'[VX, V'Y].$

On remarque que pour $X, Y \in \mathcal{D}$

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y = V\nabla_X Y$$

- pour $X, Y \in \mathcal{D}'$

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y = V'\nabla_X Y$$

- pour $X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{D}'$

$$\bar{\nabla}_X Y = V'\nabla_X Y,\ \tilde{\nabla}_X Y = V'[X, Y]$$

- pour $X \in \mathcal{D}', Y \in \mathcal{D}$

$$\bar{\nabla}_X Y = V\nabla_X Y,\ \tilde{\nabla}_X Y = V[X, Y].$$

On montre aisément que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont paralléles par rapport á $\bar{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$ [3] et que

$$\bar{\nabla}_X g = 0$$

(2.1) $$(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_{VY} V'X, VZ) + g(\nabla_{V'Y} VX, V'Z) + \\ + g(VY, \nabla_{VZ} V'X) + g(V'Y, \nabla_{V'Z} VX).$$

Par deuxiéme forme fondamentale de $\mathcal{D}$ on entend un tenseur T satisfaisant

$$g(T_A B, X) = \frac{1}{2} g(\nabla_A B + \nabla_B A, X)$$

$$g(T_A X, B) = -g(T_A B, X)$$

$$g(T_A B, C) = g(T_A X, Y) = 0$$

$$T_X = 0$$

pour tout $A, B, C \in \mathcal{D}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{D}'$.

La distribution $\mathcal{D}$ a [1] la propriété
- (F) si, pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$

$$(\nabla_X Q)Y = (\nabla_Y Q)X$$

- (D_1) si, pour tout $X \in \mathcal{D}$

$$(\nabla_X Q)X = 0$$

- (D_2) si, pour tout $X \in \mathcal{D}'$

$$\alpha(X) = 0$$

oú on a noté $p = dim\mathcal{D}$; $\{e_a\}_{a=\overline{1,p}}$ un repére orthonormé de $\mathcal{D}$ et

$$\alpha(X) = \sum_{a=1}^{p} g((\nabla_{e_a} Q)e_a, X)$$

- (D_3) si, pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$ et $Z \in \mathcal{D}'$

$$g((\nabla_X Q)Y, Z) + g((\nabla_Y Q)X, Z) = \frac{2}{p} g(X, Y)\alpha(Z)$$

- (F_i) si elle a la prepriété (F) et (D_i).

Dans [6] sont classifiées les variétes presque preduit. Chacune des 64 classes étre décrite á l'aide des propriétés (F_i) et (D_i). C'est ce que fait O.Gil- Medrane dans [1], dent l'étude sera complétée dans ce qui suit par de nouvelles interprétations en fonction des connexions $\bar{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$.

Proposition 2.1. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) $\mathcal{D}$ *a la propriété* (F)
(ii) $\mathcal{D}$ *est intégrable*
(iii) $(\bar{\nabla}_X Q)Y = (\bar{\nabla}_Y Q)X$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{D}$
(iv) $\bar{T}(X, Y) = 0$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{D}$, *oú* $\bar{T}$ *est la torsion de* $\bar{\nabla}$.

Démonstration. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ est démonturé dans [1].
Pour $(i) \Leftrightarrow (iv)$ il suffit de remarquer que

$$\tilde{T}(X,Y) = \frac{1}{2}Q((\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X)$$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ suite de

$$V[V'X, V'Y] = V'[VX, VY] = 0$$

(En remplacant $\bar{\nabla}$ par $\tilde{\nabla}$, la Proposition 2.1. reste encore Vraie.)

Proposition 2.2. *Les affirmations suivantes sont équivalents:*
(i) $\mathcal{D}$ a la propriété (D_1)
(ii) $\mathcal{D}$ est une distribution totalement géodésique (i.e. la seconde forme fondamentale de $\mathcal{D}$ est nulle)
(iii) $\mathcal{D}$ est une distribution métrique presque feuilletée (i.e. M est un espace de Vidal, donc [10]

$$(2.2) \qquad (\tilde{\nabla}_{VX}g)(V'Y, V'Z) = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$)
(iv) $\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X$, pour tout $X \in \mathcal{D}$
(v) $\tilde{\nabla}_X X = \nabla_X X$, pour tout $X \in \mathcal{D}$
(vi) $\overset{s}{\bar{\nabla}}_X Y = \nabla_X Y$, pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$
oú $\overset{s}{\bar{\nabla}}_X$ est la connexion symétrique associée á $\bar{\nabla}$.
(vii) $\tilde{\nabla}^s_X Y = \nabla_X Y$, pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$.
Démonstration. Pour $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ voir [1]
$(i) \Leftrightarrow (iv)$ suite de Remarque 1.3.
$(i) \Rightarrow (v)$ est évidente. Pour la réciproque, on a, via Remarque 1.3, que

$$(\nabla_{XQ} Q)X + 3Q(\nabla_X Q)X = 0.$$

On remplace X par QX et on soustrait les deux relations. Il s'ensuit

$$(\nabla_X Q)X = 0.$$

Remarque 2.1. En utilisant (2.1), la condition d'espace Vidal s'écrit

$$(2.3) \qquad g(\nabla_{V'Y} VX, V'Z) + g(\nabla_{V'Z} VX, V'Y) = 0.$$

Cette relation nous suggére de donner la

Definition 2.1. *Soit ∇ une connecion linéaire. Une distribution $\mathcal{D}$ satisfaisant (2.3) s'appelle presque Killing par rapport á ∇.*

Si ∇ est la connexion Levi-Civita, alors $\mathcal{D}$ s'appelle Killing.
Suite á la relation (2.1) en a la

Proposition 2.3. *$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont Killing si et seulement si*

$$\tilde{\nabla}_X g = 0$$

Soit maintenant $\{e_a\}^p_{a=\overline{1,p}}$ un repére orthogonal sur $\mathcal{D}$, oú $p = dim\mathcal{D}$.

Proposition 2.4. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) $\mathcal{D}$ a la propriété (D_2)
(ii) $\sum_{a=1}^p \nabla_{e_a} e_a = \sum_{a=1}^p \bar{\nabla}_{e_a} e_a$.

Démonstration. De [1] on sait que (i) est équivalente á

$$\sum_{a=1}^{p} (\nabla_{e_a} Q_a) e_a = 0$$

ce qui nous méne á (ii).

Proposition 2.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) $\mathcal{D}$ a la propriété (D_3)
(ii)$(\nabla_X Q)Y + (\nabla_Y Q)X = 2g(X,Y)(\nabla_{e_a} Q)e_a$
pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$ et pour tout $a \in \{1, ..., p\}$
(iii)$\overset{s}{\bar{\nabla}}_X Y - 2g(X,Y)\bar{\nabla}^s_{e_a} e_a = \nabla_X Y - 2g(X,Y)\nabla_{e_a} e_a$
pour tout $X, Y \in \mathcal{D}$ et pour tout $a \in \{1, ..., p\}$.

Démonstration. (i) est équivalente (voir [1]) avec

$$(\nabla_X Q)Y + (\nabla_Y Q)X = \frac{2}{p} g(X,Y) \sum_{a=1}^{p} (\nabla_{e_a} Q) e_a$$

d'oú (ii) et réciproquement.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ á cause de Remarque 1.3.

De la méme maniére on démontre la

Proposition 2.6. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) $\mathcal{D}$ *a la propriété* (F_1)
(ii) [1] $(\nabla_X Q)Y = 0$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{D}$
(iii) [1] $\mathcal{D}$ *est un feuilletage totalement géodésique (i.e. la deuxiéme forme fondamentale de la sous-variété intégrale est nulle)*
(iv) $\nabla_X Y \in \mathcal{D}$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{D}$
(v) $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{D}$.

Des Proposition 2.1, 2.4 et 2.5 on obtaint deux résultats similaires qui caractérisent les propriétés (F_2) et (F_3).

3. Classes de variétés presque hermitiennes

Si $\epsilon = -1$ et $n = 2k$, on définit la 2-forme

$$F(X, Y) = g(QX, Y)$$

Dans [2] on classifie les variétés presque hermitiennes et on met en évidence 16 classes, définies par certaines propriétés de ∇F. Pour cinq de ces classes nous allons trouver d'autres caractérisations, á l'aide des connexions $\bar{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}$.

Proposition 3.1. *Les affirmations suivantes sout équivalentes:*
(i) M *est une varaiété Kãhler (i.e.* $\nabla_X Q = 0$*)*
(ii) $\bar{\nabla} = \nabla$
(iii) $\tilde{\nabla} = \nabla$.

Démonstration. La seule implication non banal est (iii) $\Rightarrow$ (i). De (1.3) on a

$$(\nabla_{QY} Q)X + Q(\nabla_Y Q)X + 2g(\nabla_X Q)Y = 0.$$

mains

$$Q(\nabla_X Q)Y = -(\nabla_X Q)QY$$

d'oú (i).

Proposition 3.2. *Les affirmations suivantes sont équivalents:*
(i) M *est approximativement (nearly) Kãhler (i.e.)* $(\nabla_X Q)X = 0$*)*
(ii) $\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X$
(iii) $\tilde{\nabla}_X X = \nabla_X X$.

Démonstration. Pareille á celle de la Proposition 3.1.

Proposition 3.3. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) M est une variété presque Kahler (i.e. $dF = 0$)
(ii) $\sum_{cicl} g(\nabla_X Y, Z) - \sum_{cicl.} g(\nabla_X Y, Z) = 0$ eú $\sum_{cicl.}$ signifie permutations circulaires de X, Y et Z.

Démonstration. On montre que $dF =$) signifie

$$g((\nabla_X Q)Y, Z) + g((\nabla_Y Q)Z, X) + g((\nabla_Z Q)X, Y) = 0$$

ce qui est une autre facon d'écrire (ii) (suite de Remarque 1.3).
Soit $\{e_a\}_{a=1}^{p}$ un repére orthonormé sur M.Par simple calcul on démontre les propositions suivantes (via la premiére relation de Remarque 1.3).

Proposition 3.4. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) M est une variété hermitienne semi-Kahlérienne (ou encore hermitienne spéciale)(i.e. $\delta F = 0, N = 0$)
(ii) [2] Ont lieu

$$\sum_{a=1}^{n} g((\nabla_{e_a} Q)e_a, Z) = 0$$

$$(\nabla_X F)(Y, Z) - (\nabla_{QX} F)(QY, Z) = 0 \tag{3.1}$$

(iii) Ont lieu

$$\sum_{a=1}^{n} \bar{\nabla}_{e_a} e_a = \sum_{a=1}^{n} \nabla_{e_a} e_a$$

$$O\bar{\nabla}_X Y = O\nabla_X Y$$

oú

$$O\nabla_X Y = \nabla_X Y - \nabla_{QX} QY.$$

On a noté

$$\delta F(X) = g(\sum_{a=1}^{n} (\nabla_{e_a} Q)e_a, X)$$

et par N le tenseur de Nijenhuis

$$N(X, Y) = [QX, QY] - Q[QX, Y] - Q[X, QY] - [X, Y].$$

Proposition 3.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) M est une variété W_4 (une classe qui contient les variétés Kähler local conforms) i.e. pour lesquelles on a [2]

$$(\nabla_X Q)Y = -\frac{1}{n-1}\{g(X,Y)\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}Q)e_a - g(\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}Q)e_a, Y)X +$$

$$+g(X,QY)Q\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}Q)e_a - g(\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}Q)e_a, QY)QX\}$$

(ii) $\mathcal{U}\bar{\nabla}_X Y = \mathcal{U}\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$ oú

$$\mathcal{U}\nabla_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{n-1}\{g(X,Y)\sum_{a=1}^{n}\nabla_{e_a}e_a + g(\sum_{a=1}^{n}\nabla_{e_a}e_a, QY)QX +$$

$$+g(X,QY)\sum_{a=1}^{n}Q\nabla_{e_a}e_a + g(\sum_{a=1}^{n}\nabla_{e_a}e_a, Y)X\}$$

Remarque 3.1. La relation (3.1) signifie $\tilde{T} = 0$, conséquence du fait que $\tilde{\nabla}$ est l'une des connexions linéaries compatibles avec la structure presque complexe Q, qui a la torsion $\bar{T} = \frac{1}{4}N$.
Remarque 3.2. Si on note

$$\beta(X) = \frac{1}{n-1}\delta F(X)$$

alors, dans les conditions de la Proposition 3.5, on a

$$\bar{T}(X,Y) = \beta(QX)Y - \beta(QX)X + \beta(Y)QX - \beta(X)QY - 2F(X,Y)\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}Q)e_a.$$

Ceci signifie que $\bar{\nabla}$ est semi-symétrique dans l'acception de [11].

Bibliographie

1 Gil-Medrane O.: Geometric properties of some classes of Riemannian almost product manifolds, Rend.Circ.Mat.Palermo, Serie II, T.XXXII (1983), 315-329.

2 Gray, A., Hervella, L.M.: The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and their Linear Invariants, Ann.Math.Pura ed Appl. 73(1980), 35-58.

3 Ianus, S.: Some almost product structures on manifolds with linear connection, Kodai Math.Sem.Rep. 23(1971), 305-310.

4 Ianus, S., Popovici, I.: On the Vranceanu's nonholonomic connections, An. St.Univ.Iasi, 26(1980), 389-393.

5 Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry, Intersc. New York, vol. 2, 1969.

6 Naveira, A.M.: A classification of Riemannian almost product manifolds Rend.di Mat. 3 (1983), vol. 3, serie VII, 577- 592.

7 Pripoae, G.: Sur les connexions de Schouten et de Vranceanu (á paraitre dans Rev.Roum.Math. Pures et Appl.).

8 Pripoae, G.: Une généralisation des connexions de Schouten et de Vranceanu (á paraitre dans Proc. of the XV^{th} Nat.Colloq.Geom.Top., Timisoara, 1984).

9 Pripoae, G.: Connexions de Schouten et de Vranceanu sur des f-variétés (á paraitre).

10 Vidal, E., Vidal-Costa, E.: Special connections and almost foliated metrics, J.Diff.Geom. 8(1973), 297-304.

11 Yano, K., Imai, T.: On semi-symmetric metric F- connection, Tensor N.S., Vol. 29(1975), 133-138.

REZIME

O KLASIFIKACIJI SKORO PROIZVOD I SKORO KOMPLEKSNIH MNOGOSTRUKOSTI POMOĆU SCHOONTENOVIH I URANCEANNOVIH KOREKCIJA

Ovaj rad dopunjava klasifikaciju Rimanovih skoro proizvod i skoro kompleksnih mnogostrukosti sa novim karaakterizacijama za neke klase tih mnogostrukosti pomoću Schontenovih i Uranceannovih korekcija.

Received by the editors April 24, 1985.