Univ. u Novom Sadu
Zb. Rad. Prirod.–Mat. Fak.
Ser. Mat. 25, 2 (1995), 67-80

Review of Research
Faculty of Science
Mathematics Series

SUR L'APPROXIMATION PAR ANGLE DANS LA METRIQUE MIXTE

Miloš Tomić
Faculty of Natural Sciences and Mathematics
Priština, Yugoslavia

Abstract

L'approximation par angle de certaines intégrales singulières des fonctions périodiques ue période 2π est evaluée par les meilleures approximations par angle. Ces approximations se rapportent aux espaces de Lebesgue munis de la norme mixte. Le théorème prouvé est appliqué aux sommations des séries de Fourier par procédés de Riesz et par procédés logarithmiques.

AMS Classification (1991): 41A35, 41A50
Mots-clés: Lápproximation par angle, le procédé de sommation de la série de Fourier.

1. L'introduction et les résultats auxiliaires

Le livre [2] est consacré aux espaces des fonctions à la dérivée mixte dominante. Dans ce livre les espaces sont définis par les modules mixtes de continuité et sont examinés par les théorèmes de représentation. Dans les travaux [4], [5], [6], [7] et autres on a démontré que ces espaces peuvent aussi être définis et étudiés par les milleures approximations par angle.

Dans le travail [7] est démontrée l'inégalité par laquelle l'approximation par angle de certaines intégrales singulières des fonctions périodiques de période 2π est évaluée par les meilleures approximations des polynômes trigonométriques. Ces approximatins se rapportent aux fonctions appartenant à l'espace de Lebesgue à norme habituelle.

Dans ce travail, en utilisant la méthode par laquelle est obtenu le résultat dans [7], on constate que l'inégalité analogue est valable pour les fonctions appartenant aux espaces de Lebesgue de la norme mixte, où $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Dans le cas où $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, on obtient l'inégalité correspondant à l'espace $L_{\bar{p}}$ de la norme usuelle (corollaire 1). L'inégalité dans ce travail a la forme un peu plus simple (sans puissance) que l'inégalite correspondante du travail [7]. On a constaté que dans certains cas peut être omise une condition du theorème. L'inégalité démontrée est utilisée pour comparer les classes de fonctions qui sont définies par les approximations (corollaire 2), et onéapplique aux procédés de Riesz et aux procédes logarithmiques de sommation de série de Fourier. Cela signifie que l'ensemble des procédés de sommation, auxquels on peut appliquer le théorème démentré, est suffisamment riche.

Soient $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction périodique de periode 2π par rapport à toute variable et $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \le p_j \le \infty$. On dit qu'une fonction $f \in L_{\bar{p}}$ si $\|f\|_{\bar{p}} < \infty$ où

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{p}} &= \| \cdots \|\|f\|_{p_1,x_1}\|_{p_2,x_2} \cdots \|_{p_n,x_n} = \\ &= \Big(\int_0^{2\pi} \{\cdots [\int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} \mid f \mid^{p_1} dx_1)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2]^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots \}^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n\Big)^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser l'ensemble de tous les ensembles d'indices $(i_1, \ldots, i_m)$, $1 \le i_j \le n$, $1 \le j \le m \le n$. Soit T_{i_1} la fonction appartenant à L_p et supposons qu'elle soit un polynôme trigonometrique d'ordre l_i par rapport à la variable x_i et elle est la fonction habituelle par rapport aux autres variables.

On appelle (v. [4], [5]) la meilleure approximation par angle de m-dimensions de fonction f par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots x_{i_m}$ la valeur

$$Y_{l_{i_1} \ldots l_{i_m}}(f)_{\bar{p}} = \inf_{T_{l_{i_j}}} \|f - \sum_{j=1}^{m} T_{l_{i_j}}\|_{\bar{p}}, \; l_{i_j} = 0, 1, 2, \ldots .$$

Soient $\kappa^j_{l_j}(t)$, $j = 1, \ldots, n$ les noyaux telles que

$$\kappa^j_{l_j}(-t) = \kappa^j_{l_j}(t) \; , \; \int_{-\pi}^{\pi} \kappa^j_{l_j}(t) dt = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mid \kappa_{l_j}^j(t) \mid dt \leq M \ , \ \lim_{l_j\to\infty} \int_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} \mid \kappa_{l_j}^j(t) \mid dt = 0$$

où nous supposons que M ne dépende pas de l_j.

La serie de Fourier du noyau $\kappa_{l_j}^j$ sera écrite sous la forme

$$\kappa_{l_j}^j(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k_j=1}^{\infty} \gamma_{l_j}^j(k_j) \cos k_j t$$

Pour la fonction $f \in L_{\bar{p}}$, par ces noyaux, nous formerons les intégrales

$$I_{l_j}^j f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - t_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \kappa_{l_j}^j(t_j) dt_j$$

$$I_{l_i l_j} = I_{l_i}^i I_{l_j}^j f, \ldots, I_{l_1 \ldots l_n} f = I_{l_1}^1 I_{l_2}^2 \cdots I_{l_n}^n f.$$

De ces intégrales, pour chaque ensemble d'indices $(i_1, \ldots, i_m)$, nous formerons l'angle

$$\begin{aligned} U_{l_{i_1} \ldots l_{i_m}} f &= I_{l_{i_1}}^{i_1} f + \cdots + I_{l_{i_m}}^{i_m} f - I_{l_{i_1} l_{i_2}} f - \cdots - I_{l_{i_{m-1}} l_{i_m}} f + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{m-1} I_{l_{i_1} \ldots l_{i_m}} f. \end{aligned}$$

Nous allons prouver l'inégalité par laquelle la norme $\|f - uf\|_{\bar{p}}$ est évaluée par les meilleures approximations par angle $Y(f)_{\bar{p}}$. Nous utiliserons, dans la démonstration du théorème, les sommes partielles de la série de Fourier de fonction f. Pour simplifier, nous c'écrirons ces sommes que pour la fonction $f(x_1, x_2) \in L_{\bar{p}}$ de deux variables. Nous désignerons

$$\begin{aligned} S_{l_1} f &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 + t_1, x_2) D_{l_1}(t_1) dt_1 \\ S_{l_2} f &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2 + t_2) D_{l_2}(t_2) dt_2 \\ S_{l_1 l_2} f &= S_{l_1} S_{l_2} f, \ \ l_1, l_2 = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

où le $D_1(t)$ designe le noyau de Dirichlet, c'est - à - dire

$$D_l(t) = \frac{\sin(l + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Nous utiliserons les fonctions

$$S_{l_1 l_2}^* f = S_{l_1} f + S_{l_2} f - S_{l_1 l_2} f.$$

Comme pour le résultat correspondant dans l'espace L_p (v. [6], lemme 2), on conclut facilement que, pour $1 < p_j < \infty$, $j = 1, 2$, on a

$$\|f - S^*_{l_1 l_2} f\|_{\bar{p}} \le C Y_{l_1 l_2}(f)_{\bar{p}}, \ \|f - S_{l_j} f\|_{\bar{p}} \le C Y_{l_j}(f)_{\bar{p}}$$

où la constante C ne dépend que de $p = (p_1, p_2)$.

En outre, nous utiliserons le théorème de Littlewod-Paley ([3], 1.5.2): si la fonction $f \in L_p(0, 2\pi), 1 < p < \infty$, et si sa série de Fourier est $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(f)$, alors

$$C'_p \|(\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \le \|f\|_p \le C''_p \|(\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2)\frac{1}{2}\|_p$$

où

$$\delta_1 = A_1(f), \ \delta_2 = A_2(f), \ \delta_\nu = \sum_{k=2^{\nu-2}+1}^{2^{\nu-1}} A_k(f), \ \ \nu \ge 3,$$

et les constantes C'_p, C''_p ne dépendant que de p.

2. Résultat fondamental

Théorème. *Supposons que pour les coefficients $\gamma^j_{l_j}(k_j)$ soient valables les inégalités*

$$1 - \gamma^j_{l_j}(k_j) = \varphi_j(l_j) \Psi^j_{l_j}(k_j), \ k_j = 1, 2, \ldots, l_j \ , \ (j = 1, \ldots, n),$$

où $\varphi_j(l_j) > 0$. Pour l_j fixé choisissons s_j tel que $2^{s_j} \le l_j < 2^{s_j+1}$ et supposons que la suite $\Psi^j_{l_j}(k_j)$ satisfasse aux conditions

(α) $$| \Psi^j_{l_j}(k'_j) | \le C_1 | \Psi^j_{l_j}(k''_j) |, \ 0 \le k'_j \le k''_j \le 2^{s_j}, \ (\Psi^j_l(0) = 1),$$

(β) $$| \Psi^j_{l_j}(2k_j) | \le C_2 | \Psi^j_{l_j}(k_j) |, \ 2k_j \le 2^{s_j},$$

(γ) $$| \Delta \Psi^j_{l_j}(k_j) | = | \Psi^j_{l_j}(k_j) - \Psi^j_{l_j}(k_j + 1) | \le C_3 \frac{|\Psi^j_{l_j}(k_j)|}{k_j+1}, \ 0 \le k_j \le 2^{s_j} - 1,$$

(δ) $$0 < C_4 \le \varphi_j(l_j) \mid \Psi^j_{l_j}(2^{s_j}) \mid$$

où les constantes $C_1, \ldots, C_4$ ne dépendent pas de k_j et l_j. Alors, pour tout ensemble d'indices $(i_1, \ldots, i_m), 1 \le i_j \le n, \ 1 \le j \le m \le n$, et pour $1 <$

$p_j < \infty, \bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, l'inégalité

$$(1) \qquad \|f - u_{l_{i_1} \ldots l_{i_m}} f\|_{\bar{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \varphi_{i_j}(l_{i_j}) \sum_{k_{i_1}=0}^{l_{i_1}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_{i_m}=0}^{l_{i_m}} \prod_{j=1}^{m} \frac{|\Psi_{l_{i_j}}^{i_j}(k_{i_j})|}{k_{i_j}+1} Y_{k_{i_1} \cdots k_{i_m}}(f)_{\bar{p}}$$

est valable, où la constante C ne dépend pas de f et l_j.

Si la condition (α) est complétée par l'exigence pour que la suit Ψ soit monotone, alors la condition (γ) peut être omise.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous allons considérer le cas de fonction de deux variables (cas pour $n = 2$). Le théorème se démontre par la méthode par laquelle le théorème du travail [7] a été démontré. C'est pourquoi nous donnerons la preuve du théorème seulement pour l'angle d'une dimension. On a

$$(2) \qquad \|f - I_{l_1}^1 f\|_{\bar{p}} \ll Y_{2^{s_1}}(f)_{\bar{p}} + \|S_{2^{s_1}} f - I_{l_1}^1 s_{2^{s_1}} f\|_{\bar{p}}.$$

Considérons la fonction $f(x_1, x_2)$ comme la fonction d'une variable. Alors sa série de Fourier est

$$f \sim \frac{a_0(x_2)}{2} + \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1}(x_2) \cos k_1 x_1 + b_{k_1}(x_2) \sin k_1 x_1$$

En vertu du théorème de la convolution on a

$$I_{l_1}^1 f \sim \frac{a_0(x_2)}{2} + \sum_{k_1=1}^{\infty} \gamma_{l_1}^1(k_1)[a_{k_1}(x_2) \cos k_1 x_1 + b_{k_1}(x_2) \sin k_1 x_1]$$

En utilisant la condition du théorème, on aura

$$S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I_{l_1}^1 f = \varphi_1(l_1) \sum_{k_1=1}^{2^{s_1}} \Psi_{l_1}^1(k_1) A_{k_1}(x_2)(f),$$

où

$$A_{k_1}(x_2)(f) = a_{k_1}(x_2) \cos k_1 x_1 + b_{k_1}(x_2) \sin k_1 x_1 \ .$$

Si nous désignons par $P^1_{l_1} f$ la fonction

$$P^1_{l_1} f = \frac{a_0(x_2)}{2} + \sum_{k_1=1}^{2^{s_1}} \Psi^1_{l_1}(k_1) A_{k_1}(x_2)(f) \tag{3}$$

alors on a

$$S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} f = \varphi_1(l_1) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} \{S_{2^{s_1}}(P^1_{l_1} f) - S_{[2^{s_1-1}]}(P^1_{l_1} f)\} \tag{4}$$

où

$$[2^{\nu-1}] = 2^{\nu-1} \text{ pour } \nu \geq 1, \ [2^{\nu-1}] = 0 \text{ pour } \nu = 0.$$

En appliquant le théorème de Littlewood-Paley à la fonction $S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I'_{l_1} f$ on obtient

$$\|S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} f\|_{p_1, x_1} \ll \varphi_1(l_1) \| \left(\sum_{\nu_1=0}^{s_1} \delta^2_{\nu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \|_{p_1, x_1}$$

où

$$\delta_{\nu_1} = S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1} f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1} f).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \| \quad & S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} f\|_{p_1, x_1} \ll \\ \ll \quad & \varphi_1(l_1) \| \left(\sum_{\nu_1=0}^{s_1} \left\{ S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1} f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1} f) \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_{p_1, x_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Par l'application de l'inégalité

$$| \sum a_i |^{\xi} \leq \sum | a_i |^{\xi}, \ 0 \leq \xi \leq 1, \text{ pour } \xi = \frac{1}{2},$$

de (5) on déduit que

$$\begin{gathered} \|S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} f\|_{p_1, x_1} \ll \\ \ll \varphi_1(l_1) \| \textstyle\sum_{\nu_1=0}^{s_1} | S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1} f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1} f) | \|_{p_1, x_1}. \end{gathered} \tag{6}$$

De (6) résulte

$$\begin{gathered} \|S_{2^{s_1}} f - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} f\|_{\bar{p}} \ll \\ \ll \varphi_1(l_1) \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\textstyle\sum_{\nu_1=0}^{s_1} | S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1} f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1} f) |^{p_1} \right) dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}}. \end{gathered} \tag{7}$$

Maintenant nous appliquerons deux fois l'inégalité de Minkowski: premièrement par rapport à l'intégration de x_1 et par rapport à la somme, et deuxièmement par rapport à l'intégration de x_2 et par rapport à la somme, on obtient

$$\|S_{2^{s_1}}f - S_{2^{s_1}}I^1_{l_1}f\| \ll$$

$$\ll \varphi_1(l_1)\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\nu_1=0}^{s_1}\left(\int_0^{2\pi} | S_{2^{\nu_1}} - S_{[2^{\nu_1-1}]} |^{p_1}\, dx_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\right]^{p_2} dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}} \ll$$

$$\ll \varphi_1(l_1)\sum_{\nu_1=0}^{s_1}\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} | S_{2^{\nu_1}} - S_{[2^{\nu_1-1}]} |^{p_1}\, dx_1\right)^{\frac{1}{p_1}\cdot p_2} dx_2\right]^{\frac{1}{p_2}},$$

c'est - à - dire

$$\|S_{2^{s_1}}f - S_{2^{s_1}}I^1_{l_1}f\|_{\bar{p}} \ll \tag{8}$$

$$\ll \varphi_1(l_1)\sum_{\nu_1=0}^{s_1}\|S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1}f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1}f)\|_{\bar{p}}.$$

Nous utiliserons l'égalité (qui) donnée dans le travail [7]:

$$S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1}f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1}f) = \sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1}(S_{\mu_1}f - f)\Delta\Psi^1_{l_1}(\mu_1) + \tag{9}$$

$$+(S_{2^{\nu_1}}f - f)\Psi^1_{l_1}(2^{\nu_1}) - (S_{[2^{\nu_1-1}]}f - f)\Psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}]).$$

En vertu de la condition (γ) nous obtenons

$$\sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1} | \Delta\Psi^1_{l_1}(\mu_1) | \ll \sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1}\frac{| \Psi^1_{l_1}(\mu_1) |}{\mu_1+1}$$

d'où, en tenant compte de (α), résulte

$$\sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1} | \Delta\Psi^1_{l_1}(\mu_1) | \ll | \Psi^1_{l_1}(2^{\nu_1}) | \sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1}\frac{1}{\mu_1+1} \ll | \Psi^1_{l_1}(2^{\nu_1}) | .$$

Maintenant en utilisant la condition (β) nous obtenons

$$\sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1} | \Delta\Psi^1_{l_1}(\mu_1) | \ll | \Psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}]) | . \tag{10}$$

Si la suite $\Psi^1_{l_1}(k_1)$, $k_1 = 1, \dots, l_1$ est monotone, alors nous obtenons l'inégalité (10) sans condition (γ).

De (9), en vertu de (10) on obtient

$$\|S_{2^{\nu_1}}(P^1_{l_1}f) - S_{[2^{\nu_1-1}]}(P^1_{l_1}f)\|_{\bar{p}} \ll |\ \Psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}])\ |\ Y_{[2^{\nu_1-1}]}(f)_{\bar{p}}. \tag{11}$$

Maintenant de (8) en utilisant (11) on déduit

$$\|S_{2^{s_1}}f - S_{2^{s_1}}I^1_{l_1}f\|_{\bar{p}} \ll \varphi_1(l_1) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} |\ \Psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}])\ |\ Y_{[2^{\nu_1-1}]}(f)_{\bar{p}}. \tag{12}$$

En utilisant la condition (δ) nous avons

$$Y_{2^{s_1}}(f)_{\bar{p}} \ll \varphi_1(l_1)\ |\ \Psi^1_{l_1}(2^{s_1})\ |\ Y_{2^{s_1}}(f)_{\bar{p}}. \tag{13}$$

De (2), en vertu de (12) et (13), nous obtenons

$$\|f - I^1_{l_1}f\|_{\bar{p}} \ll \varphi_1(l_1) \sum_{\nu_1=0}^{s_1+1} |\ \Psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}])\ |\ Y_{[2^{\nu_1-1}]}(f)_{\bar{p}}. \tag{14}$$

En utilisant les conditions (α) et (β) de (14) resulte (v. [7]):

$$\|f - I^1_{l_1}f\|_{\bar{p}} \ll \varphi_1(l_1) \sum_{k_1=0}^{l_1} \frac{|\ \Psi^1_{l_1}(k_1)\ |}{k_1+1} Y_{k_1}(f)_{\bar{p}}. \tag{15}$$

De la même manière on obtient l'inégalité

$$\|f - I^2_{l_2}f\|_{\bar{p}} \ll \varphi_2(l_2) \sum_{k_2=0}^{l_2} \frac{|\ \Psi^2_{l_2}(k_2)\ |}{k_2+1} Y_{k_2}(f)_{\bar{p}}. \tag{16}$$

Dans la démonstration de l'inégalité (1) pour l'angle de deux dimensions on utilise le raisonnement par lequel est démontrée la partie précédente du théorème et il faut avoir en vue les faits correspondant donnés dans [7]. C'est pourquoi nous omettons cette partie de la démonstration et nous finissons la démonstration du théorème.

Corollaire 1. *Si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p, 1 < p < \infty$, alors du théorème résultent les inégalités dans l'espace L_p.*

Corollaire 2. *Soient* $\varphi_j(l_j) \downarrow 0, \Psi^j_{l_j}(k_j) \to \Psi^j(k_j), (l_j \to \infty), | \Psi^j_{l_j}(k_j) | \leq C | \Psi^j(k_j) |$ *pour tout* l_j, *où la constante* C *ne dépend pas de* l_j *et* k_j. *Posons*

$$V_{\bar{p}}I = \left\{ f \in L_{\bar{p}} : \|f - u_{l_{i_1}\cdots l_{i_m}} f\|_{\bar{p}} = O\left[\prod_{j=1}^{m} \varphi_{i_j}(l_{i_j})\right], l_{i_j} = 1, 2, \dots \right\},$$

$$\begin{aligned} Y(I, \bar{p}, \Psi, \epsilon) &= \{ f \in L_{\bar{p}} : Y_{k_{i_1}\cdots k_{i_m}}(f)_{\bar{p}} = O\left[\prod_{j=1}^{m} (k_{i_j} + 1)^{-\epsilon} \mid \Psi^{i_j}(k_{i_j}) \mid^{-1}\right], \\ &\quad k_{i_j} = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \epsilon > 0, \\ Y(I, \bar{p}, \varphi) &= \left\{ f \in L_{\bar{p}} : Y_{l_{i_1}\cdots l_{i_m}}(f)_{\bar{p}} = O\left[\prod_{j=1}^{m} \varphi_{i_j}(l_{i_j})\right], \ l_{i_j} = 1, 2, \dots \right\} \end{aligned}$$

et supposons que ces relations soient valables pour tous les ensembles d'indices $(i_1, \dots, i_m), 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq m \leq n$. *Alors on a*

$$Y(I, \bar{p}, \Psi, \epsilon) \subset V_{\bar{p}}I \subset Y(I, \bar{p}, \varphi) \tag{17}$$

pour $1 < p_j < \infty, \ \bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

3. Applications

La sommation des séries par procédés de Riesz (v. [1]) est définie par les noyaux $\kappa_l^{(n)}(t)$ pour lesquels

$$\kappa_l'^{\lambda}(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{l-1} (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_l}) \cos kt$$

et la suite $\{\lambda_l\}$ vérifie les conditions: $0 < \lambda_l < \lambda_{l+1}$; $\lambda_l \to \infty, l \to \infty$; $\Delta^2 \lambda_l \geq 0$ ou $\Delta^2 \lambda_l \leq 0$; $\lambda_{2l} = O(\lambda_l)$, $(\lambda \to \infty)$, si $\Delta^2 \lambda_l \geq 0$.

Dans ce cas

$$1 - \gamma_l(k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} \ ,$$

par suite

$$\varphi(l) = \frac{1}{\lambda_l}, \ \Psi_l(k) = \lambda_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, l - 1,$$

$$\Psi_l(k) = \lambda_l \quad \text{pour} \quad k \geq l.$$

Nous allons prouver que la suite $\Psi_l(k) = \lambda_k$ vérifie les conditions du théorème. Puisque $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ il est évident que la suite $\Psi_l(k)$ vérifie la condition (α). En outre $\Psi_l(k) > 0$.

La condition (β) est contenue dans la condition donnée $\lambda_{2l} = O(\lambda_l), (l \to \infty)$, si $\Delta^2 \lambda_l \geq 0$. Il reste à prouver que la suite $\Psi_l(k)$ vérifie la condition (β) si $\Delta^2 \lambda_l < 0$.

Dans le travail [1] d'Aljančić, on a donné l'inégalité

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq C \frac{\lambda_k}{k}$$

d où

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \leq 1 + C \frac{1}{k}$$

(la constante C ne dépend pas de k).

En posant $k, k+1, \ldots, 2k-1$ dans l'inégalité précédente alors, par le produit, on obtient

$$\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_k} \leq (1 + \frac{C}{2k-1}) \cdots (1 + \frac{C}{k})$$

et puis

$$\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_k} \leq (1 + \frac{C}{k})^k.$$

De cette inégalité résulte que $\lambda_{2k} \leq C_2 \lambda_k$ et ce qui signifie que la suite Ψ satisfait à la condition (β).

On peut omettre la condition (γ) parce que la suite Ψ est monotone.

La condition (δ) est équivalente à la condition

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_{2^s}} \leq C_4, \quad 2^s \leq l < 2^{s+1}.$$

Puisque la suite λ_l est monotone, alors $\lambda_l \leq \lambda_{2^{s+1}}$. Il en résulte, en vertu de la condition (β), que

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_{2^s}} \leq \frac{\lambda_{2^{s+1}}}{\lambda_{2^s}} \leq C.$$

Donc, nous avons prouvé que la suite $\Psi_l(k)$ satisfait aux conditions du théorème.

Par conséquent on a l'inclusion (17) pour $V_{\bar{p}}I$, $Y(I,\bar{p},\lambda,\epsilon)$, $Y(I,\bar{p},\lambda)$.

En particulier, si $\lambda_k^{(j)} = k^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = 1,\ldots,n$, on a

$$S_{\bar{p}}^{\tau+\epsilon}H \subset V_{\bar{p}}R^{(r)} \subset S_{\bar{p}}^{\tau}H, \;\; 1 < p_j < \infty, \epsilon > 0, \tag{18}$$

oú

$$\begin{aligned} V_{\bar{p}}R^{(r)} \;\; &= \;\; \{f \in L_{\bar{p}} : \|f - u_{l_{i_1}\cdots l_{i_m}}f\|_{\bar{p}} = O[\prod_{j=1}^{m}(l_{i_j}+1)^{-r_{i_j}}], \\ & \qquad l_j = 0,1,2,\ldots,(1 \le i_j \le n, 1 \le j \le m \le n)\}, \end{aligned}$$

et $S_{\bar{p}}^{\tau}H$ sont les classes de Nikolski qui sont définies par les meilleures approximations par angle (v. [4], [5]) :

$$\begin{aligned} S_{\bar{p}}^{\tau}H \;\; &= \;\; \{f \in L_{\bar{p}} : Y_{l_{i_1}\cdots l_{i_m}}(f)_{\bar{p}} \le C\prod_{j=1}^{m} l_{i_j}^{-r_{i_j}}, \\ & \qquad l_j = 1,2,\ldots,(1 \le i_j \le n, 1 \le j \le m \le n\}. \end{aligned}$$

Dans le cas où f est une fonction d'une variable, alors les classes $V_{\bar{p}}I = V_pI$ sont les classes de saturation du procédé de Riesz (v. [1], [8]), et par les (17) et (18) nous comparons ces classes aux classes de Nikolski.

Pour le procédé logarithmique $L^{(1)}$ nous appliquerons le corollaire 2 dans le cas de fonction d'une variable (alors $Y_k(f) = E_k(f)$). Pour ce procédé nous avons (v. [8])

$$\begin{aligned} \gamma_l(k) \;\; &= \;\; \frac{\Pi_{k,l}}{\log l}\;, \\ \Pi_{k,l} \;\; &= \;\; \sum_{\nu=k+1}^{l}\frac{1}{\nu}\;, k < l, \\ \varphi(l) \;\; &= \;\; \frac{1}{\log l}\;, \\ \Psi_l(k) \;\; &= \;\; \log l - \sum_{\nu=k+1}^{l}\frac{1}{\nu}\;. \end{aligned}$$

La suite $\Psi_l(k)$ croît et elle satisfait aux conditions du théorème. Les sommes $L_l^{(1)}(f)$ sont données par les égalités (v. [8])

$$L_l^{(1)}(f) = \frac{1}{\log l} \sum_{k=1}^{l} \frac{S_k f}{k}.$$

Si nous désignons

$$\begin{aligned} V_p L^{(1)} &= \left\{ f \in L_p : \|f - L_l^{(1)} f\|_p = O\left(\frac{1}{\log l}\right)\right\}, \\ A(\epsilon) &= \left\{ f \in L_p : E_k(f) = O\left(\frac{1}{k^3 \log l}\right)\right\}, \epsilon > 0, \\ B &= \left\{ f \in L_p : E_k(f) = O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right\}, \end{aligned}$$

alors, en vertu de (17), on a l'inclusion

(19) $$A(\epsilon) \subset V_p L^{(1)} \subset B, \quad 1 < p < \infty, \quad (\epsilon > 0).$$

La classe $V_p L^{(1)}$ est la classe de saturation du procédé $L^{(1)}$.

Si nous désignons par $V_p L^{(q)}$ la classe de saturation du procédé logarithmique général $L^{(q)}$, où $q > 0$, alors, comme nous le savons déjà (v. [9]), on a $V_p L^{(l)} = V_p L^{(q)}$. Cela signifie que les inclusions (19) sont valables pour $V_p L^{(q)}$, $q > 0$.

On peut appliquer le théorème au procédé de sommation défini par les sommes

$$L(\rho, f) = \frac{-1}{\log(1-\rho)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{k+1} S_k, \ 0 < \rho < 1.$$

Pour ce procédé nous avons

$$\gamma_\rho(k) = \frac{-1}{\log(1-\rho)} \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\rho^{\nu+1}}{\nu+1}, \ k = 1, 2, \dots .$$

Si nous posons $\rho = \rho_l = 1 - \frac{1}{l}$, $l \to \infty$, $(\rho \to 1)$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \frac{1}{\log l}, \\ \Psi_l(k) &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(1-\frac{1}{l})^\nu}{\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(k) &= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu} , \\ \Psi_l(k) &\leq \Psi(k) . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f - L(1-\frac{1}{l}, f)\|_p \leq \frac{C}{\log l} \sum_{k=0}^{l} \frac{\Psi(k)}{k+1} E_k(f)_p \leq$$

$$\leq C_1 \frac{1}{\log l} \sum_{k=0}^{l} \frac{\log(k+2)}{k+1} E_k(f)_p, \quad 1 < p < \infty, \quad l = 2, 3, \ldots .$$

Bibliographie

[1] Aljančić, S., Classe de saturation du procédé des moyennes tipiques de Riesz, Acad. Serbe des sci., Publ. de l'Inst. Math., t XIII (1959), 113-122.

[2] Amanov, T. I., Les espaces de fonctions différentiables à la dérivée mixte dominante, (russe), ANKaz SSR, Alma-Ata, 1976.

[3] Nikolski, S. M., L'approximation des fonctions de plusieurs variables et les théorèmes d'inclusion, (russe), Moscou, 1969.

[4] Potapov, M. K., L'approximation par angle et les classes d'inclusion, (russe), Math. Balcanica 2 (1972), 183-198.

[5] Potapov, M. K., Les théorèmes d'inclusion dans la métrique mixte, (russe), Trudy MIANSSSR, t 156 (1980), 143-156.

[6] Potapov, M. K., Sur l'approximation par angle, (russe), Procedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Budapest 1972, 371-399.

[7] Tomić, M., L'approximation de fonction périodiques de période 2π des intégrales singulières, (russe), Publ. de l'Inst. Math., 26(40) (1979), 297-305.

[8] Tomić, M., Sur les classes de saturation du procédé logarithmique de sommation des séries de Fourier, (russe), ANUBIH, Radovi LXI, knj. 17 (1978), 127-136.

[9] Tomić, M., Le procédé logarithmique général de sommation et les classes de saturation dans les espaces C et L_p, (russe), ANUBIH, Radovi LXI, knj. 17 (1978), 107-126.

Received by the editors January 12, 1992