NOVI SAD J. MATH.
VOL. 29, NO. 3, 1999, 199-202
XII Yugoslav Geometric Seminar
Novi Sad, October 8-11, 1998

CONNECTIONS FINSLER-PROJECTIVES

Gh. Murarescu **P. Stavre**
University of Craiova, Department of Mathematics
13, Al.I.Cuza st., Craiova, 1100, Romania

Abstract

In this paper we present some results of the Finsler-projective connections: holonomie, autoparallèls, metrics, etc.

AMS Mathematics Subject Classification (1991): 53C05, 53C10.
Key words and phrases: Connexion nonlinéaire, connexion Finsler projective normale, groupes d'holonomie, autoparallèeles, métriques.

Soit $\zeta = (E, \pi, M)$ le fibré vectoriel à fibre type $F = R$ equipé à une connexion nonlinéaire D sur E.[1]. Si nuos notons par $\{X_\alpha\} = \{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ la base adaptée à N et par $\{U_\alpha\} = \{\partial/\partial x^i, \partial/\partial y\}$ la base naturelle, les coefficients locals de D sont respectivement$\{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\}$ et $\{\gamma^\gamma_{\alpha\beta}\}$ où $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, .., n, 0$ mais $i, j, k = 1, 2, .., n$ $(x^0 = y)$.

Définition 1 *[6]La connexion D s'appelle quasi-projective normale si les coefficients Γ satisfont les relations:* $\Gamma^0_{0\alpha} = w\Gamma^i_{i\alpha}$, $w = -\frac{1}{n+1}$.

Ces connexions sont symètriques et les coefficients locals de la courbure R ont les expressions:

$$R^i_{jkh} = \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^h} - \frac{\delta\Gamma^i_{jh}}{\delta x^k} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^i_{rh} - \Gamma^r_{jh}\Gamma^i_{rk},\ R^i_{jk0} = \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y}$$
$$R^0_{0k0} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial\Gamma^i_{ik}}{\partial y} = \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2},\ R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \text{ pour les restes.}$$

Les coefficients de type Weyl sont définis par:

$$J^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + (\delta^i_j\frac{\partial N_k}{\partial y} + \delta^i_k\frac{\partial N_j}{\partial y}),\ J^i_{ikh} = \frac{\delta J^i_{jh}}{\delta x^k} - \frac{\delta J^i_{jk}}{\delta x^h} + J^r_{ih}J^i_{rk} - J^r_{jk}J^i_{rh}$$

Pour le champ tensoriel de Ricci $R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$, dans la base adaptée, nous avons $R_{jk} = R_{kj}$ et $R_{\alpha\beta} = 0$ pour les restes. Nous notons aussi $J_{jk} = J^i_{jki}$. Entre deux connexions D et $\overline{D}$ nous considerons la transformations $\tau : D \to \overline{D}$ définie par $\overline{D}_X Y = D_X Y + \sigma(X)hY + \sigma(Y)hX$.

A ces notations, dans la base adaptée, une transformation τ s'écrit localement: $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \sigma_j\delta^i_k + \sigma_k\delta^i_j$, $\overline{\Gamma}^i_{0k} = \Gamma^i_{0k}$, $\overline{\Gamma}^i_{00} = \Gamma^i_{00}$, $\overline{\Gamma}^0_{jk} = \Gamma^0_{jk}$, $\overline{\Gamma}^0_{0k} = \Gamma^0_{0k}$, $\overline{\Gamma}^0_{00} = \Gamma^0_{00}$. Ces sont les transformations qui conservent la classe des $d-$connexions linéaire symètriques quasi-projective normale; de plus, nous avons $\overline{J}^i_{jk} = J^i_{jk}$, $\overline{J}^i_{jkh} = J^i_{jkh}$.

Dans ces conditions, nous donnons:

Définition 2 *S'appelle la connexion Finsler-projective normale une classe des connexions quasi-projective normale* $\{..., D, \overline{D}, ...\} = \overset{*}{D}$ *liées par les transformations* τ*; les coefficients* $\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}$ *de* $\overset{*}{D}$ *sont définis par :* $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{k0} = y^{-1}\delta^i_k$, $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{00} = 0$, $\overset{*}{\Gamma}{}^0_{jk} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}\ N_i + \frac{y}{n-1}J_{jk} - \frac{\delta N_j}{\delta x^k}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^0_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^0_{k0} = 0$, $\overset{*}{\Gamma}{}^0_{00} = 0$; *les coefficients* $\overset{*}{\gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}$ *de* $\overset{*}{D}$ *sont définis par:* $\overset{*}{\gamma}{}^i_{jk} = J^i_{jk}$, $\overset{*}{\gamma}{}^i_{00} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{00}$, $\overset{*}{\gamma}{}^0_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = \overset{*}{\gamma}{}^i_{k0}$, $\overset{*}{\gamma}{}^0_{k0} = \overset{*}{\gamma}{}^0_{0k} = 0$, $\overset{*}{\gamma}{}^0_{jk} = \frac{y}{n-1}J_{jk}$, $\overset{*}{\gamma}{}^0_{00} = 0$.

La connexion $\overset{*}{D}$ est linéaire symètrique mais n'est pas une $d-$connexion [6].

En partant de la théorie générale du transport parrallèle et de groupes d'holonomie pour les connexions linéaires générales, nous définissons ces notions pour la connexion $\overset{*}{D}$. Par exemple nous avons reçu [2]:

Proposition 1 *L'algebre Lie du groupe réduit d'holonomie est généréepar les éléments de la forme* $\{(\overset{*}{R}{}^i{}_{jkh}), (\overset{*}{R}{}^i{}_{jk0}), (\overset{*}{R}{}^0{}_{jkh})\}_{z_0}$, $z_0 \in E$.

Nous remarquons que la courbure$\overset{*}{R}$ de la connexion $\overset{*}{D}$ s'exprime seulement par les coefficients projectifs J:

$\overset{*}{R}{}^i{}_{jkh} = J^i_{jkh} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_k J_{jh} - \delta^i_h J_{jk})$, $\overset{*}{R}{}^i{}_{jk0} = \frac{\partial J^i_{jk}}{\partial y}$, $\overset{*}{R}{}^0{}_{jkh} = \overset{*}{R}{}^i{}_{jkh}\ N_i + \frac{y}{n-1}(\frac{\delta J_{jk}}{\delta x^h} - \frac{\delta J_{jh}}{\delta x^k} + J^r_{jk}J^i_{rh} - J^r_{jh}J_{rk})$, $\overset{*}{R}{}^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ pour les restes.

Soit $\tilde{c}$ une courbe sur E, donnée par $(x(t), y(t))$, $t \in \dot{I}$.

Nous démontrons [3]:

Proposition 2 *Les equations des autoparalèlles pour la connexion* $\overset{*}{D}$ *sont de la forme:*

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + J^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \frac{2}{n+2}y^{-1}\frac{dx^i}{dt}\frac{dy}{dt} = \Psi(x(t), y(t))\frac{dx^i}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{n-1}J_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - \frac{2n}{n+2}(\frac{dy}{dt})^2 = \Psi(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}.$$

Nous avons démontré une proposition analogue à un résultat de K.Yano et Sasaki pour les connexions $\overset{*}{D}$:

Proposition 3 *Si le groupe d'holonomie d'une connexion Finsler-projective normale* $\overset{*}{D}$ *sur* E *laisse invariante une hyperquadrique nondégénérée dans l'éspace tangent* T_zE*, alors il existe une connexion quasi-projective normale* D' *dans la classe que définit la connexion* $\overset{*}{D}$ *de sorte que* $D'J' = 0$ *où* J' *est le coefficient projectif de composantes* (J_{jk}).

Par sa définition,le tenseur symètrique J' est nondégénérée.

De ce fait et d'après la proposition 3, nous avons reçu:

Proposition 4 *La connexion quasi-projective normale* D' *est une connexion métrique-projective à métrique* J'*. Comme on peut rémarquer,* J' *est une métrique indéfinie sur* E.

Le caractère projectif de J' a étyé mentionner ci-dessus. Nous avons aussi sur E une métrique decomposable $G(g_{jk})$, $g_{jk}(x,y) = \frac{y}{n-1}J_{jk}(x)$ (dans des conditions spécieles)

D'après le procédé de metrisation de Kawaguchi-Miron, dans notre cas, à une connexion quasi-projective normale $\overset{*}{D}$ s'associe une connexion quasi-projective normale mértique D^m, relatif à la métrique G.

A l'aide d'une théorème de R.Miron [1], pour le cas général des $d-$connexions métriques, en utilisant les opérateurs d'Obata nous determinons la classe des connexions quasi-projectives normales métriques $\{..., D^m, \overline{D}^m, ...\}$. Donc nous pouvons donner:

Définition 3 *La classe* $\overset{*}{D}{}^m = \{..., D^m, \overline{D}^m, ...\}$ *des connexions quasi-projectives normales métriques s'appelle la connexion Finsler-projective métrique.*

References

[1] R. Miron, M. Anastasiei. Fibrate vectoriale, spaţii Lagrange, aplicaţii în teoria relativităţii. Ed.Acad., R.S.R Bucureşti 1987.

[2] G.Murărescu, P.Stavre. Sur le groupe d'holonomie de connexions Finsler-projectives, The 25^{th} Nat. Conf. of Geom. and Topol., Iaşi, sept 1995 (sous-presse).

[3] G.Murărescu, P.Stavre. Sur les connexions Finsler-projectives (II) Proc. of the 4^{th} Intern. Congr. Geometry, Thessaloniki, May 26–June 1, 1996, p. 302–306.

[4] G.Murărescu, P.Stavre. Sur les connexions Finsler-projectives (III) Balk. Jour. of Geom. and its Appl., v.2 (1997) Balk. Soc. of Geom. Bucharest.

[5] T.Okada. Pair connections on line bundle and projective connections. Symp on Finsler-Geometry at Kinosaki, Nov. 1984.

[6] P.Stavre, G.Murărescu. Sur les connexions Finsler-projectives normales, Bull.Math. Soc. Sci. Math. Roum. T37(85) 1-2, 1993, Bucureşti, p 133–147.