Novi Sad J. Math.
Vol. 29, No. 3, 1999, 203–209
XII Yugoslav Geometric Seminar
Novi Sad, October 8–11, 1998

OBSERVATIONS SUR LES FACTEURS INTÉGRANTS D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE

V. Obădeanu
Department of Mathematics, West University of Timişoara, Romania
Email address: obadeanu@info.uvt.ro

Abstract

On considère des systèmes dynamiques de la forme (4) et on met en évidence quelques propriétés de leurs facteurs intégrants.

AMS Mathematics Subject Classification (1991): 70D10.
Key words and phrases: Dynamical Systems, Self-Adjoint Equations.

1 Conditions d'auto-adjonction d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

Soit le système d'équations différentielles du premier ordre, écrit dans la forme principale:

$$C_{ij}(t,x)\dot{x}^j + D_i(t,x) = 0, \quad (i = \overline{1,n}). \tag{1}$$

On a:

1. Proposition [4]. *Les conditions nécessaires et suffisantes qu'un système différentiel de la forme (1) soit auto-adjoint, sont:*

$$\begin{aligned} &C_{ij} + C_{ji} = 0, \quad \det(C_{ij}) \neq 0, \\ &\frac{\partial C_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial C_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial C_{hi}}{\partial x^j} = 0, \\ &\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial D_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_j}{\partial x^i}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Proposition. *Les conditions (2) sont satisfaites si et seulement si la ,,2-forme de Lagrange" associée à (1):*

$$\Omega = \frac{1}{2} C_{ij} dx^i \wedge dx^j + D_i dx^i \wedge dt, \tag{3}$$

est fermée.

Il result trivialement.

3. Théorème [4]. *La condition nécessaire et suffisante qu'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, écrit dans la forme principale (1), provienne du principe des variations est qu'il soit auto-adjoint.*

2 Problème inverse

Soit un système dynamique, écrit dans la forme cinématique:

$$\dot{x}^i = f^i(t,x), \quad (i = \overline{1,n}). \tag{4}$$

Le problème inverse consiste en montrer dans quelles conditions il est équivalent à un système de la forme (1) auto-adjoint. Cette propriété suppose l'existence d'un facteur intégrant de la forme:

$$C_{ij} = C_{ij}(t,x), \quad \det(C_{ij}(t,x)) \neq 0, \tag{5}$$

tel que le système de la forme (1), avec $D_i = -C_{ij}f^j$, satisfasse les conditions d'auto-adjonction (2), écrites sous la forme:

$$\begin{gathered} C_{ij} + C_{ji} = 0, \quad \frac{\partial C_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial C_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial C_{hi}}{\partial x^j} = 0, \\ f^h \frac{\partial C_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + C_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} - C_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Si le système (6) est compatible, toute solution de celui-ci est un facteur intégrant (si $\det(C_{ij}) \neq 0$) et il répond au problème dans le sens qu'il fournit un système (1), auto-adjoint et équivalent à (4).

En base du théorème de Cauchy-Kovalevskaïa, le système (6) a toujours des solutions locales; une combinaison linéaire de deux telles solutions, à coefficients convenables, satisfait aussi à la condition de (5).

3 Résolution du système (6)

Considérons l'opérateur différentiel associé au système (4):

$$\frac{D}{Dt} = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{7}$$

Avec celui-ci, les dernières équations de (6) s'écrivent, en base des premières, sous la forme:

$$\frac{DC_{ij}}{Dt} + C_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} + \frac{\partial f^h}{\partial x^i}C_{hj} = 0 \tag{8}$$

ou dans la forme matricielle:

$$\frac{DC}{Dt} + CA + A^T C = 0, \tag{8$'$}$$

où la matrice A a les composantes $A^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$.

À l'équation (8′), on associe le couple d'équations:

$$\frac{DX}{Dt} = AX, \quad \frac{DY}{Dt} = -A^T Y. \tag{9}$$

4. Théorème [3]. *La condition nécessaire et suffisante qu'une matrice C soit solution de l'équation (8′) est qu'il existe deux matrices X et Y respectivement des solutions des équations (9) desquelles la première soit propre, telles que*

$$C = YX^{-1}. \tag{10}$$

Démonstration. *La condition est suffisante.* Soient X et Y des solutions des équations (9) et, de (10) $CX = Y$. On a:

$$\frac{D(CX)}{Dt} + A^T CX = \left(\frac{DC}{Dt} + CA + A^T C\right)X + C\left(\frac{DX}{Dt} - AX\right) = 0, \tag{11}$$

d'où il résulte l'affirmation.

La condition est nécessaire. Soit C une solution donnée de (8′) et X une solution propre, d'ailleurs arbitraire, de la première équation de (9). De (11) il résulte que $Y = CX$ vérifie la deuxième équation de (9).

La condition de suffisance de la démonstration définit en fait l'application $(X, Y) \to C$. La nécessité nous dit que cette application est surjective. Nous pouvons nous poser le problème de voir quels couples (X, Y) conduisent à la même solution C donnée.

5. Proposition. *Si X est une solution propre de l'équation (9), alors une matrice de la forme $\overline{X} = XG$ est elle aussi de solution propre pour (9) si et seulement si G vérifie la relation:*

$$\frac{DG}{Dt} = 0, \quad \det(G) \neq 0.$$

L'ensemble des matrices G, avec cette propriété, forme par rapport à l'opération de multiplication, groupe, et tout couple de la forme (XG, YG)

conduit à la même solution C. Il résulte que l'ensemble des solutions C, de l'équation $(8')$, est en correspondance bijective avec l'ensemble des couples, factorisé par le groupe $\{G\}$.

Reprenons les équations (8). Pour leur résolution nous associerons les équations (9) qui, pour X_h^i (avec h fixé) se découple dans le système:

$$\frac{DX_h^i}{Dt} = A_j^i X_h^j. \tag{12}$$

Une suite de n solutions indépendantes de ce système engendre la matrice X. Dans une manière semblable on obtient aussi la matrice Y, pour laquelle:

$$\frac{DY_i^h}{Dt} + A_i^j Y_j^h = 0.$$

Par (10) on obtient des solutions pour $(8')$. L'ensemble des solutions du système $(8')$ forme un espace vectoriel.

À toute solution C on obtient aussi la solution C^T, et par consequent la solution $C_a = \frac{1}{2}(C - C^T)$, qui vérifie la première condition de (6).

De l'ensemble des solutions on choisit celles pour lesquelles est accomplie la deuxième condition de (6). Si on connait deux telles solutions C_1 et C_2 qui n'accomplisent pas la condition (5), et que nous supposons qu'elles ne font pas partie de la même classe d'équivalence par rapport avec le quotient par G, alors les combinaisons linéaires $C_1 + \lambda C_2$ vérifient cette condition, à l'exception d'un nombre fini de cas, dans lesquels λ est une racine du „polinôme caractéristique".

6. Proposition. *Si C est une solution non-degénérée de l'équation $(8')$ alors le produit CH est de même une solution non- dégénérée pour $(8')$ si et seulement si H est une solution de „l'équation de Hamilton":*

$$\frac{DH}{Dt} = [A, H]. \tag{13}$$

En effet, de l'hypothèse

$$\frac{D(CH)}{Dt} + (CH)A + A^T(CH) =$$
$$\left(\frac{DC}{Dt} + CA + A^TC\right) H + C\left(\frac{DH}{Dt} - AH + HA\right) = 0,$$

d'où il résulte (13) et où $[A, H]$ est le commutateur des matrices A et H.

7. Proposition. *L'ensemble des solutions de l'équation (13) forment un groupe par rapport avec le produit (des matrices).*

En effet, $\frac{D(H_1,H_2)}{Dt} - [A, H_1H_2] = \left(\frac{DH_1}{Dt} - [A, H_1]\right) H_2 + H_1 \left(\frac{DH_2}{Dt} - [A, H_2]\right) = 0$, d'où il résulte que le produit des matrices est pour l'ensemble des solutions de (13), une loi de composition interne, et comme symétrique de H c'est son inverse H^{-1}.

Dans l'ensemble des solutions de l'équation (8′) on définit une relation d'équivalence en disant que deux solutions C_1, C_2 sont équivalentes s'il existe une matrice H (non-dégénérée) telle que $C_2 = HC_1$. Toute classe d'équivalence est en corréspondance bijective avec le groupe des solutions de l'équation (13).

Le groupe $\{H\}$ agit sur l'ensemble des solutions de l'équation (8′) non-transitif, les classes de transitivité etant les classes d'équivalence ci-dessus définies.

L'ensemble des solutions de l'équation (13) est une algèbre, pour le commutateur $[H_1, H_2] = H_1H_2 - H_2H_1$.

8. Proposition. *Si C est une solution pour (8′), KC est elle aussi solution si et seulement si K est solution pour:*

$$\frac{DK}{Dt} + [A^T, K] = 0.$$

Remarque. Dans le cas des systèmes où la matrice A est antitransposée ($A + A^T = 0$), l'équation (8) devient:

$$\frac{DC}{Dt} = [A, C].$$

Dans ce cas l'ensemble des solutions propres de (8′) este fermé par rapport avec l'opération de multiplication, et forme un groupe.

Si on cherche des solutions antisymétriques pour (8), l'ensemble de celles-ci est compté par le quotient par l'espace des matrices symétriques.

4 Système dynamique à trois paramètres d'état

Soit donné le système:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x), \quad (i = 1, 2, 3),$$

auquel on ajoute de plus l'équation de catalyse $\dot{x}^4 = \lambda$, tel qu'on obtient un système de quatre équations, pour lequel les équations définissant le facteur intégrant sont:

$$\frac{DC_{ij}}{Dt} + C_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} + \frac{\partial f^h}{\partial x^i}C_{hj} = 0,$$

$$\frac{DC_i}{Dt} + C_h \frac{\partial f^h}{\partial x^i} = 0, \quad \text{etc.} \tag{14}$$

Nous utiliserons les notations: $C_{ij} = x^h$, $C_{i4} = C^i$ avec lesquelles le premier groupe de (14), formé par trois équations et trois fonctions inconnues, s'écrit sous la forme:

$$\frac{DX^h}{Dt} = \left(\frac{\partial f^h}{\partial x^k} - \mathrm{div} f \cdot \delta_k^h \right) X^k \tag{15}$$

ou de façon matricielle:

$$\frac{DX}{Dt} = [A - \mathrm{div} f \cdot I] X. \tag{15'}$$

Pour l'intégration de cette équation, on associe les équations:

$$\frac{DY}{Dt} = AY, \quad \frac{DZ}{Dt} = -\mathrm{div} f \cdot Z, \tag{16}$$

desquelles la première représente un système avec les fonctions inconnues Y^i, la dernière une équation avec la fonction inconnue Z.

9. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante que X soit une solution pour (15′) est qu'il existe les solutions (Y, Z), respectivement pour les équations (16), telles que*

$$X^i = ZY^i.$$

Demonstration. *La condition est suffisante.* Soient données les solutions (Y, Z) respectivement pour les équations (16), alors les fonctions $X^i = ZY^i$ constituent une solution pour (15′).

Réciproquement, *la condition est nécessaire.* Soit une solution X^i donnée de l'équation (15′) et soit une solution arbitraire Y^i de la première équation (16). Des hypothèses il résulte:

$$\frac{DX}{Dt} - [A - \mathrm{div} f \cdot I] X\lambda = \frac{D(ZY)}{Dt} - [A - \mathrm{div} f \cdot I] ZY =$$
$$= Z \left[\frac{DY}{Dt} - AY \right] + \left(\frac{DZ}{Dt} + \mathrm{div} f \cdot Z \right) Y = 0,$$

ce qui nous dit que la deuxième équation de (15′) est vérifiée, q.e.d.

10. Proposition. *Soit Y une solution de la première équation (16), alors hY est solution pour la même équation si et seulement si h est une intégrale première de l'évolution* $\left(\frac{Dh}{Dt} = 0\right)$.

L'ensemble des intégrales premières non-nulles forme un groupe par rapport à la multiplication.

11. Proposition. *Soit X une solution de l'équation (15'), hX est une solution pour (15') si est seulement si h est une intégrale première de l'évolution.*

Dans l'ensemble des solutions de l'équation (16_1), on peut introduire une relation d'équivalence en disant que deux solutions sont équivalent s'il existe une intégrale première h, telle qu'une des solutions soit egale avec l'autre multipliée par h.

Toute class déquivalence est en corréspondance bijective avec le groupe des intégrales premières.

12. Proposition. *Soit Z une solution pour la deuxième équation de (16), kZ est une solution pour cette équation si est seulement si k est une intégrale première de l'évolution.*

13. Proposition. *Tous les couples de la forme $(hY, h^{-1}Z)$, avec h intégrale première, definissent la même solution X. L'ensemble des solutions X est en correspondance bijective avec les classes du quotient de l'ensemble des couples de solutions (Y, Z) par le groupe $\{G\}$ des intégrales premières non-nulles de l'évolution.*

14. Proposition. *Soit C une solution du deuxième groupe d'équations de (14). La condition nécessaire et suffisante que le vecteur hC soit solution pour la même équation est que h soit une intégrale première de l'évolution.*

Bibliographie

[1] V. Obădeanu, Introducere în biodinamica analitică, Monografii Matematice No. 42, Tip. Univ. Timişoara, 1992

[2] V. Obădeanu, I. Groşanu, Sisteme dinamice cu aplicaţii în biologie şi economie, Imp. Mirton, Timişoara, 1996

[3] V. Obădeanu, D. Opriş, Le problème inverse en biodynamique Sem. Mec. No. 33, Tip. Univ. Timişoara, 1991

[4] R.M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, I, II, Springer Verlag, Berlin, 1978, 1983