Novi Sad J. Math.
Vol. 33, No. 1, 2003, 31–52

EQUATION STOCHASTIQUE DE DYNAMIQUE DE POPULATIONS DU TYPE PROIE–PREDATEUR AVEC DIFFUSION DANS UN TERRITOIRE

Hisao Fujita Yashima[1]

Résumé. On considère l'équation stochastique modélisant l'évolution des populations de deux espèces liées par la relation proie-prédateur avec leur diffusion dans le territoire. La perturbation stochastique envisagée ici modélise des variations aléatoires des conditions environnementales et est donnée moyennant un mouvement brownien dans un espace de Hilbert. On démontre l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa positivité.

STOCHASTIC EQUATION OF POPULATION DYNAMICS OF PREY-PREDATOR TYPE WITH DIFFUSION IN A TERRITORY

Abstract. We consider the stochastic equation modelling the evolution of the populations of two species in the prey-predator relation with their diffusion in the territory. The stochastic perturbation considered here models variations of environmental conditions and is given by means of a Brownian motion in a Hilbert space. We prove the existence and uniqueness of the solution as well as its positivity.

Mots-clés : équation stochastique, proie-prédateur, diffusion dans un territoire

Key words and phrases: stochastic equation, prey-predator, diffusion in a territory

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 60H15, 92D25

1. Introduction et résultat

Dans le présent mémoire nous nous proposons d'étudier le modèle stochastique de dynamique de populations du type proie-prédateur avec une diffusion dans un territoire.

Le modèle de dynamique de populations du type proie-prédateur, connu comme équation de Lotka-Volterra, a été étudié en détail à partir du célèbre livre

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Torino, via Carlo Alberto, 10, 10123 Torino, Italy

[14] de Volterra. Quant aux modèles stochastiques de dynamiques de populations (qui sont proposés par exemple dans [4], [10]), s'il s'agit d'une seule espèce ou de deux (ou plus) espèces en concurrence, ils sont relativement bien étudiés (voir [6], [8], [13], [15] etc...). D'autre part dans le cas du type proie-prédateur le modèle stochastique présente des aspects mathématiques plus compliqués à cause du comportement complexe des termes déterministes. Récemment dans [3] on a établi l'existence, l'unicité et la positivité de la solution de l'équation stochastique pour le modèle proie-prédateur.

L'équation de Lotka-Volterra (du type proie-prédateur) avec une diffusion dans un territoire sans perturbation stochastique a été résolue dans [9] (voir aussi [7]). L'étude des modèles stochastiques du type proie-prédateur avec une diffusion a également attiré l'attention de plusieurs mathématiciens (par esemple [2], [12]), qui les ont envisagés toutefois avec des méthodes et du point de vue assez différents de ceux du présent travail.

Dans le présent travail on va considérer l'équation stochastique de dynamique de populations du type proie-prédateur avec une diffusion dans un territoire $D \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et avec une perturbation stochastique représentant les variations aléatoires de conditions environnementales. Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Nous désignons par $N_1 = N_1(t,x)$ la densité de population de l'espèce proie à l'instant t et au point $x \in D$; de manière analogue $N_2 = N_2(t,x)$ désignera la densité de population de l'espèce prédatrice à l'instant t et au point $x \in D$. Souvent il est commode d'écrire le couple (N_1, N_2) comme un vecteur

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation que nous allons étudier est

$$dN = (G(N) + \kappa\Delta_x N)dt + \varrho N dW; \tag{1.1}$$

l'équation (1.1) doit être complétée par la condition aux limites

$$\nabla_x N_i \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial D, \qquad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure à la frontière ∂D de D, et par la condition initiale

$$N_i\big|_{t=0} = N_{0i}, \qquad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Dans (1.1) W est un mouvement brownien défini sur une base stochastique

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$$

à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2(D)$, dont l'on précisera les conditions dans (1.7)–(1.8), tandis que $G(N)$, ϱ, $\kappa\Delta_x$ et ∇_x sont définis par

$$G(N) = \begin{pmatrix} \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 - \mu {N_1}^2 \\ -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2 - \nu {N_2}^2 \end{pmatrix}, \qquad \varrho = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_2 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

(1.5)

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_x = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_d} \end{pmatrix} \quad (d = 2, 3, \ D \subset \mathbb{R}^d)$$

avec des constantes strictement positives α, β, γ, δ, κ_1, κ_2, ϱ_1, ϱ_2 et des constantes non-négatives μ, ν.

Comme N_i $(i = 1, 2)$ doit représenter la population d'une espèce, nous allons chercher une solution non-négative, en supposant que N_{01} et N_{02} sont positifs.

On rappelle que le terme $G(N)$ donné dans (1.4) est celui de l'équation bien connue de Lotka-Volterra du type proie-prédateur

$$\frac{d}{dt} N = G(N). \tag{1.6}$$

Le terme $\kappa_i \Delta_x N_i$ représenterait la diffusion résultant des déplacements chaotiques des individus de l'espèce i, comme on peut concevoir en rappelant par exemple la diffusion dans un gaz due à des mouvements microscopiques chaotiques des molécules.

Les effets des variations aléatoires des conditions environnementales seront représentés par $\varrho N dW$ (voir par exemple [4], [10]). Pour préciser les conditions de cette perturbation stochastique, nous supposons que le mouvement brownien W à valeurs dans $L^2(D)$ vérifie les relations

(1.7)

$$\mathbb{E}[(W(t) - W(s), e_k)(W(t) - W(s), e_{k'})] = |t - s| \lambda_k^2 \delta_{kk'}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{N}, \ \forall s, t \in \mathbb{R}_+$$

pour une base orthonormale $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(D)$ telle que $e_k \in H^2(D)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \|e_k\|_{H^2(D)}^2 < \infty. \tag{1.8}$$

La relation (1.7) nous permet d'exprimer le processus croissant associé à W et celui associé à la martingale $\int_0^t N_i dW$ $(i = 1, 2)$ dans la forme

$$\ll W \gg_t = t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k \otimes e_k, \tag{1.9}$$

$$\ll \int_0^{\cdot} N_i dW \gg_t = \int_0^t N_i \, d \ll W \gg N_i = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (N_i e_k) \otimes (N_i e_k) dt; \tag{1.10}$$

il est bon de préciser qu'ils prennent leurs valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(D), L^2(D))$. Pour les propriétés des martingales à valeurs dans un espace de Hilbert séparable et des intégrales stochastiques par rapport à elles, on peut consulter par exemple [5], [11].

Le raisonnement qu'on va exposer dans la suite utilisera également des propriétés fondamentales des espaces de Sobolev, pour lesquelles on trouve une littérature copieuse, dont par exemple [1].

Le résultat principal du présent travail est le théorème suivant:

Théoréme 1.1. *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2,3$) dont la frontière ∂D est de classe C^2. On suppose que N_0 est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}_0$–mesurable à valeurs dans $W^1_{d+h}(D)$ avec $0 < h < 1$ si $d = 3$ et avec $h > 0$ quelconque si $d = 2$ et que $N_{0i} > 0$ p.p. dans D et $\log N_{0i} \in L^1(D)$ ($i = 1,2$) $\mathbb{P}$–p.s.. Alors il existe une variable aléatoire N et une seule définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ à valeurs dans $L^\infty(0,T; W^1_{d+h}(D))$ pour $T > 0$ quelconque, qui satisfait à (1.1)–(1.3) $\mathbb{P}$–p.s. et on a $N_i(t,\cdot) > 0$ p.p. dans D pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $\mathbb{P}$–p.s..*

2. Problèmes approchés

Dans ce paragraphe on introduit une famille de problèmes approchés.

Même si on démontera dans la suite (prop. 2.2) la positivité de la solution, il nous convient d'envisager le problème pour le moment sans imposer la non-négativité de N_i. On introduit pour $N = (N_1, N_2) \in \mathbb{R}^2$

$$G_L(N_1,N_2) = \begin{cases} G(N_1^+, N_2^+) & \text{si} \quad |N| \le L \\ G(\frac{LN_1^+}{|N|}, \frac{LN_2^+}{|N|}) & \text{si} \quad |N| \ge L \end{cases}, \tag{2.1}$$

où $N_i^+ = \max(N_i, 0)$ ($i = 1,2$) et $|N| = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$. On introduit également pour $x \in D$

$$N_0^{(L)}(x) = \begin{cases} (N_{01}(x), N_{02}(x)) & \text{si} \quad |N_0(x)| \le L \\ (\frac{LN_{01}(x)}{|N_0(x)|}, \frac{LN_{02}(x)}{|N_0(x)|}) & \text{si} \quad |N_0(x)| \ge L \end{cases}. \tag{2.2}$$

Cela étant, on introduit une famille de problèmes approchés; plus précisément pour chaque $L > 0$ on considère l'équation pour $N^{(L)}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$)

$$dN^{(L)} = (G_L(N^{(L)}) + \kappa \Delta_x N^{(L)})dt + \varrho N^{(L)} dW \tag{2.3}$$

avec la condition aux limites

$$\nabla_x N_i^{(L)} \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial D, \qquad i = 1,2 \tag{2.4}$$

et la condition initiale

$$N_i^{(L)}\big|_{t=0} = N_{0i}^{(L)}, \qquad i = 1,2. \tag{2.5}$$

On va maintenant construire la solution $N^{(L)}$ du problème approché (2.3)–(2.5) avec un L fixé et démontrer sa positivité.

On remarque que, comme la fonction $G_L(\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie dans (2.1) est lipschitzienne, elle définit une application lipschitzienne $G_L(\cdot) : L^2(D) \to L^2(D)$. Cela étant, on peut affirmer immédiatement l'existence et l'unicité de la solution $N^{(L)}$ de l'équation (2.3). Plus précisemment on a la

Proposition 2.1. *Le problème* (2.3)–(2.5) *admet une solution et une seule* $N^{(L)}$ *donnée dans la forme*

(2.6)
$$N^{(L)}(t) = S(t)N_0^{(L)} + \int_0^t S(t-t')G_L(N^{(L)}(t'))dt' + \int_0^t S(t-t')N^{(L)}(t')dW(t')$$

avec

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\int_0^T \|N^{(L)}(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty\Big\}\Big) = 1, \tag{2.7}$$

où $S(t)$ *est le semi-groupe d'opérateurs engendré par* $\kappa\Delta_x$ *avec la condition de Neumann sur* ∂D.

Démonstration. Comme l'application $G_L(\cdot)$ est lipschitzienne et que l'opérateur $\kappa\Delta_x$ avec la condition (2.4) engendre un semi-groupe d'opérateurs fortement continu, on peut construire le processus stochastique $N^{(L)}$ vérifiant (2.6) et (2.7), unique à des modifications près (voir par exemple [5], Th. 7.4). Il est évident que $N^{(L)}$ donné par (2.6) constitue la solution formelle (dite "mild") du problème (2.3)–(2.5). □

Maintenant on va démontrer la positivité de $N_1^{(L)}(t,x)$ et de $N_2^{(L)}(t,x)$. Plus précisément on a la

Proposition 2.2. *On suppose que* $N_{0i}^{(L)}(x) > 0$ *p.p. dans* D *et que* $\log N_{0i}^{(L)} \in L^1(D)$ *pour* $i = 1, 2$ $\mathbb{P}$*–p.s.. Si* $N^{(L)} = (N_1^{(L)}, N_2^{(L)})$ *est la solution du problème* (2.3)–(2.5), *alors on a*

$$N_i^{(L)}(t,x) > 0 \quad \textit{p.p. dans } D, \quad \forall t \in [0,T], \quad i = 1, 2, \quad \mathbb{P}-\textit{p.s.}. \tag{2.8}$$

Démonstration. La formule d'Ito appliquée à la fonction

$$\Psi(t) = \int_D \log N_i^{(L)}(t,x)dx$$

et les relations

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N_i^{(L)}}(\varrho_i N_i^{(L)} dW) = \varrho_i \int_D \frac{1}{N_i^{(L)}} N_i^{(L)} dW dx = \varrho_i d\langle 1, W(t)\rangle,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial {N_i^{(L)}}^2}\big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(\varrho_i N_i^{(L)} e_k)\otimes(\varrho_i N_i^{(L)} e_k)\big)=$$

$$=-\varrho_i^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_D \frac{1}{{N_i^{(L)}}^2}(N_i^{(L)}e_k)^2dx=-\varrho_i^2,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(D)$, nous donnent

$$\text{(2.9)}\qquad \int_D \log\, N_i^{(L)}(t,x)dx=\int_D \log\, N_{0i}^{(L)}(x)dx+\int_0^t\int_D \frac{G_L^{(i)}(N^{(L)})}{N_i^{(L)}}dxdt'+$$

$$+\kappa_i\int_D \frac{1}{N_i^{(L)}}\Delta_x N_1^{(L)}dxdt'+\varrho_i\langle 1,W(t)\rangle-\frac{\varrho_i^2}{2}t,$$

où $G_L^{(i)}(\cdot)$ est l'i–ème composante du vecteur $G_L(\cdot)$ défini par (2.1) et (1.4).

On voit aisément que $\frac{G_L^{(i)}(N^{(L)})}{N_i^{(L)}}$ est borné et que donc aussi

$$\int_D \frac{G_L^{(i)}(N^{(L)}(t,x))}{N_i^{(L)}(t,x)}dx$$

est borné. On a d'autre part par l'intgération par parties

$$\int_D \frac{1}{N_i^{(L)}}\Delta_x N_i^{(L)}dx=\int_D |\nabla_x \log\, N_i^{(L)}|^2dx.$$

Compte tenu de ces relations et en rappelant que $\langle 1,W(t)\rangle>-\infty$ $\mathbb{P}$–p.s., on déduit de (2.9) que

$$\int_D \log\, N_i^{(L)}(t,x)dx>-\infty\quad \mathbb{P}-\text{p.s.},$$

ce qui implique (2.8). □

3. Premières estimations des solutions des problèmes approchés

Dans ce paragraphe on va établir des estimations des solutions des problèmes approchés (2.3)–(2.5), estimations qui ne dépendent pas de L.

On démontre d'abord le

Lemme 3.1. *Soit $N^{(L)}$ la solution du problème* (2.3)–(2.5)*. Alors pour chaque $p\geq 2$ fixé, il existe une constante $K_1^{(p)}$ indépendante de L telle que*

$$\text{(3.1)}\quad \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\,\|N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^p}^p+\mathbb{E}\int_0^T \||N^{(L)}(t,\cdot)|^{\frac{p}{2}-1}\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^2}^2dt\leq K_1^{(p)}.$$

Démonstration. On considère la fonction

$$\Psi_{(1,p)}(t) = \int_D \psi_{(1,p)}(t,x)dx \tag{3.2}$$

avec

$$\psi_{(1,p)}(t,x) = (K_0\delta N_1^{(L)}(t,x)+\beta N_2^{(L)}(t,x))^p+K_1(N_1^{(L)}(t,x))^p+K_2(N_2^{(L)}(t,x))^p, \tag{3.3}$$

où K_0 et K_1 sont deux coefficients positifs qu'on va choisir convenablement ($K_0 > 1$), tandis que

$$K_2 = (K_0-1)\beta^p > 0.$$

L étant fixé, dans la suite de la démonstration nous écrivons simplement N_i au lieu de $N_i^{(L)}$ $(i = 1, 2)$.

Compte tenu des relations

$$\frac{\partial \Psi_{(1,p)}}{\partial N_1}(f) = p\int_D \big[K_0\delta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_1 N_1^{p-1}\big] f dx,$$

$$\frac{\partial \Psi_{(1,p)}}{\partial N_2}(f) = p\int_D \big[\beta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_2 N_2^{p-1}\big] f dx,$$

on déduit de la formule d'Ito appliquée à $\Psi_{(1,p)}(t)$

$$\Psi_{(1,p)}(t) = \Psi_{(1,p)}(0) + p\int_0^t\int_D (\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)})dxdt' + \tag{3.4}$$

$$+p\int_0^t \langle \Xi, dW\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \Lambda dt',$$

où

$$\Gamma^{(1)} = (K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1}(K_0\alpha\delta N_1 - \beta\gamma N_2) + \alpha K_1 N_1^p - \gamma K_2 N_2^p,$$

$$\Gamma^{(2)} = -(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1}((K_0-1)\beta\delta N_1N_2 + K_0\delta\mu N_1^2 + \nu\beta N_2^2)-$$
$$-K_1N_1^p(\beta N_2 + \mu N_1) - \nu K_2 N_2^{p+1} + \delta K_2 N_1 N_2^p,$$

$$\Gamma^{(3)} = \kappa_1\big[K_0\delta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_1N_1^{p-1}\big]\Delta_x N_1+$$
$$+\kappa_2\big[\beta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_2N_2^{p-1}\big]\Delta_x N_2,$$

$$\Xi = \varrho_1(K_0\delta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_1N_1^{p-1})N_1+$$
$$+\varrho_2(\beta(K_0\delta N_1 + \beta N_2)^{p-1} + K_2N_2^{p-1})N_2,$$

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{2} \varrho_i\varrho_j \frac{\partial^2\Psi_{(1,p)}}{\partial N_i\partial N_j}\big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(N_ie_k)\otimes(N_je_k)\big) =$$

$$= \varrho_1^2 p(p-1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_D \big[K_0^2\delta^2(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}+K_1N_1^{p-2}\big]|e_k|^2|N_1|^2dx+$$

$$+2\varrho_1\varrho_2 p(p-1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_D K_0\beta\delta(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}|e_k|^2N_1N_2dx+$$

$$+\varrho_2^2 p(p-1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_D \big[\beta^2(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}+K_2N_2^{p-2}\big]|e_k|^2|N_2|^2dx.$$

Comme $K_2=(K_0-1)\beta^p>0$, on a

$$\delta K_2N_2^pN_1=\delta(K_0-1)\beta^pN_2^pN_1\le (K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-1}(K_0-1)\beta\delta N_1N_2$$

et par conséquent

$$\Gamma^{(2)}\le 0. \tag{3.5}$$

D'autre part, par l'intégration par parties on a

$$\int_D\Gamma^{(3)}dx=-(p-1)\int_D\Gamma^*dx, \tag{3.6}$$

où

$$\Gamma^*=\kappa_1(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}(K_0^2\delta^2|\nabla_xN_1|^2+K_0\beta\delta\nabla_xN_1\cdot\nabla_xN_2)+$$
$$+\kappa_2(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}(K_0\beta\delta\nabla_xN_1\cdot\nabla_xN_2+\beta^2|\nabla_xN_2|^2)+$$
$$+\kappa_1K_1N_1^{p-2}|\nabla_xN_1|^2+\kappa_2K_2N_2^{p-2}|\nabla_xN_2|^2.$$

Or, on voit qu'il existe deux constantes $C_{(p,\kappa_1,\kappa_2)}$ et $C_{(\kappa_1,\kappa_2,K_0,\delta,\beta)}$ (dépendantes de p, κ_1, κ_2 et de p, κ_1, κ_2, K_0, δ, β respectivement) satisfaisant à l'inégalité

$$(\kappa_1+\kappa_2)(K_0\delta N_1+\beta N_2)^{p-2}K_0\beta\delta|\nabla_xN_1\cdot\nabla_xN_2|\le$$
$$\le\frac{\kappa_1}{2}(\beta N_2)^{p-2}K_0^2\delta^2|\nabla_xN_1|^2+\frac{\kappa_2}{2}(K_0\delta N_1)^{p-2}\beta^2|\nabla_xN_2|^2+$$
$$+C_{(p,\kappa_1,\kappa_2)}\beta^pN_2^{p-2}|\nabla_xN_2|^2+C_{(p,\kappa_1,\kappa_2,K_0,\delta,\beta)}N_1^{p-2}|\nabla_xN_1|^2.$$

Donc, en rappelant la relation $K_2=(K_0-1)\beta^p$, on peut choisir K_0 et K_1 suffisamment grands de sorte qu'il existe une constante positive C' telle que

$$\Gamma^*(t,x)\ge C'|\nabla_xN^{(L)}(t,x)|^2|N^{(L)}(t,x)|^{p-2}. \tag{3.7}$$

En outre on voit aisément que, en vertu de (3.3) et de (1.8), il existe une constante C'' telle que

$$\int_D\Gamma^{(1)}dx+\Lambda\le C''\Psi_{(1,p)}, \tag{3.8}$$

tandis que, l'intégrale stochastique par rapport à une martingale étant une martingale, on a

$$\mathbb{E}\int_0^t \langle \Xi, dW\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Des relations (3.4)–(3.9) on déduit, à l'aide du lemme de Gronwall, qu'on a

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}\,\Psi_{(1,p)}(t)+C_1\,\mathbb{E}\int_0^T\int_D(|\nabla_x N_1|^2+|\nabla_x N_2|^2)(|N_1|^2+|N_2|^2)^{\frac{p}{2}-1}dxdt\le C_2,$$

avec deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de L. En rappelant la définition (3.2)–(3.3), on en déduit l'inégalité (3.1). □

Lemme 3.2. *Soit* $N^{(L)}$ *la solution du problème* (2.3)–(2.5)*. Alors pour chaque* $p\ge 2$ *fixé, il existe une constante* $M_1^{(p)}$ *indépendante de* L *telle que*

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\|N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^p}^p+\mathbb{E}\int_0^T\||N^{(L)}(t,\cdot)|^{\frac{p}{2}-1}\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^2}^2dt\le M_1^{(p)}. \tag{3.10}$$

Démonstration. On considère la fonction $\Psi_{(1,p)}(t)$ donnée dans (3.2)–(3.3) et l'égalité (3.4) obtenue par la formule d'Ito. D'après l'inégalité de Doob on a

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\langle\Xi,dW\rangle\le 2\Big(\mathbb{E}\Big|\int_0^T\langle\Xi,dW\rangle\Big|^2\Big)^{1/2}=2\big(\mathbb{E}\int_0^T\langle d\ll W\gg\Xi,\Xi\rangle\big)^{1/2}$$

$$=2\big(\mathbb{E}\int_0^T\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2\langle(e_k\otimes e_k)\Xi,\Xi\rangle dt\big)^{1/2}=2\big(\mathbb{E}\int_0^T\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2\langle\Xi,e_k\rangle^2dt\big)^{1/2}.$$

Or, de l'expression de Ξ, on obtient

$$|\langle\Xi,e_k\rangle|\le C\|e_k\|_{H^2}\|N\|_{L^{2p}}^p.$$

avec une constante C. Donc en vertu de (1.8) on a

$$\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2\langle\Xi,e_k\rangle^2\le C'\|N(t,\cdot)\|_{L^{2p}}^{2p}$$

avec une constante C'. Par conséquent d'après le lemme 3.1 on a

$$\mathbb{E}\int_0^T\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2\langle\Xi,e_k\rangle^2dt\le C'TK_1^{(2p)},$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\langle\Xi,dW\rangle\le C''\sqrt{K_1^{(2p)}}$$

avec une constante C''.

Il est clair qu'on peut traîter les autres termes de (3.4) de la même manière que dans le lemme 3.1. Donc on obtient (3.10) avec une constatne $M_1^{(p)}$ qui ne dépend pas de L. □

4. Estimations des dérivées des solutions des problèmes approchés – cas de dimension 3

Dans ce paragraphe, on va établir des estimations de dérivées plus élevées de $N^{(L)}$ par rapport aux variables spatiales $x \in D$, estimations indépendantes de L, dans le cas de dimension 3, $D \subset \mathbb{R}^3$.

On prouve d'abord le

Lemme 4.1. *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec $\partial D \in C^2$. Soit $h \in]0,1[$. Si $N^{(L)}$ est la solution du problème* (2.3)–(2.5)*, alors il existe une constante K_2 indépendante de L telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\, \|\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^{3+h}}^{2(3+h)} + \tag{4.1}$$

$$+\,\mathbb{E}\int_0^T \|\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^{3+h}}^{3+h} \int_D |\nabla_x N^{(L)}|^{1+h} \sum_{i=1}^{2}\sum_{l,m=1}^{3} |\partial_{x_l}\partial_{x_m} N_i^{(L)}|^2 dxdt \le K_2.$$

Démonstration. On considère la fonction

$$\Psi_{(2)}(t) = \int_D \sum_{i=1}^{2} |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{1}{2}(3+h)} dx \tag{4.2}$$

avec

$$\psi_{(2,i)}(t,x) = (|\nabla_x N_i^{(L)}(t,x)|^2 + 1). \tag{4.3}$$

Dans la suite de la démonstration on écrit simplement N_i au lieu de $N_i^{(L)}$.

Comme on a

$$\frac{\partial[(\Psi_{(2)})^2]}{\partial N_i}(f) = 2(3+h)\Psi_{(2)} \int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i \cdot \nabla_x f dx,$$

la formule d'Ito appliquée à $(\Psi_{(2)}(t))^2$ nous donne

$$(\Psi_{(2)}(t))^2 = (\Psi_{(2)}(0))^2 + 2(3+h)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \tag{4.4}$$

avec

$$I_1 = \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \int_D (\alpha|\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} |\nabla_x N_1|^2 - \gamma|\psi_{(2,2)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} |\nabla_x N_2|^2) dxdt',$$

$$I_2 = \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \int_D [|\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (-\beta(\nabla_x N_1 \cdot \nabla_x(N_1N_2)) - \mu(\nabla_x N_i \cdot \nabla_x(N_1^2))) +$$

$$+|\psi_{(2,2)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\delta(\nabla_x N_2 \cdot \nabla_x(N_1N_2)) - \nu(\nabla_x N_2 \cdot \nabla_x(N_2^2)))] dxdt',$$

$$I_3 = \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \int_D \sum_{i=1}^{2} \kappa_i |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x \Delta_x N_i) dx dt',$$

$$I_4 = \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \sum_{i=1}^{2} \varrho_i \langle |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i, \nabla_x (N_i dW) \rangle,$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^{2} \varrho_i \varrho_j \frac{1}{2(3+h)} \frac{\partial^2 [(\Psi_{(2)})^2]}{\partial N_i \partial N_j} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (N_i e_k) \otimes (N_j e_k) \Big) dt',$$

$$\frac{1}{2(3+h)} \frac{\partial^2 [(\Psi_{(2)})^2]}{\partial N_i \partial N_j} (f \otimes g) =$$

$$= \delta_{ij} \Psi_{(2)} \int_D \big[|\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x f \cdot \nabla_x g) +$$

$$+ (1+h) |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x f)(\nabla_x N_i \cdot \nabla_x g) \big] dx +$$

$$+ (3+h) \Big(\int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x f) dx \Big) \Big(\int_D |\psi_{(2,j)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x N_j \cdot \nabla_x g) dx \Big).$$

On constate immédiatement qu'il existe une constante C telle que

$$I_1 \le C \int_0^t (\Psi_{(2)}(t'))^2 dt' \tag{4.5}$$

et que

$$\mathbb{E}\, I_4 = 0. \tag{4.6}$$

Pour ce qui concerne I_5, on remarque que

$$\|\nabla_x (N_i e_k)\|_{L^{3+h}} \le C \|e_k\|_{H^2} (\|\nabla_x N\|_{L^{3+h}} + \|N\|_{L^{\frac{6(3+h)}{3-h}}}) \tag{4.7}$$

avec une constante C. Donc, grâce à (1.8) et au lemme 3.1, on a

$$\mathbb{E}\, I_5 \le C' \int_0^t (\Psi_{(2)}(t'))^2 dt' + C' t \tag{4.8}$$

avec une constante C'.

Pour estimer I_2 et I_3 on pose

$$\mathcal{Q}_{(1,i)} = |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \sum_{l,m=1}^{3} |\partial_{x_l} \partial_{x_m} N_i|^2 \qquad (i = 1, 2). \tag{4.9}$$

Pour I_2, par l'intégration par parties, on a

$$-\beta \int_D |\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_1 \cdot \nabla_x (N_1 N_2) dx =$$

$$= \beta \int_D |\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} N_1 N_2 \Delta_x N_1 dx +$$

$$+ \beta(1+h) \int_D |\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} N_1 N_2 \sum_{l,m=1}^{3} (\partial_{x_l} N_1)(\partial_{x_m} N_1)(\partial_{x_l}\partial_{x_m} N_1) dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_D \mathcal{Q}_{(1,1)} dx + C_\varepsilon (\Psi_{(2)}(t))^{\frac{1+h}{3+h}} \|N\|^4_{L^{6+2h}},$$

où ε est un nombre positif assez petit convenablement choisi et C_ε est une constante dépendante de ε. En majorant les autres termes de I_2 de la même manière, on obtient

(4.10)

$$I_2 \leq \varepsilon \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \int_D \sum_{i=1}^{2} \mathcal{Q}_{(1,i)} dx dt' + C_\varepsilon \int_0^t (\Psi_{(2)}(t))^2 dt' + \int_0^t \|N\|^{12+4h}_{L^{6+2h}} dt'.$$

En ce qui concerne I_3, on introduit une famille de fonctions $\{\vartheta_{(k)}\}_{k=0}^{N}$ réalisant la partition de l'unité de D, de sorte que

$$\vartheta_{(k)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad 0 \leq \vartheta_{(k)}(x) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \vartheta_{(k)}(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in D, \qquad \operatorname{supp} \vartheta_{(0)} \subset D.$$

En outre, ∂D étant de classe C^2 par hypothèse, on peut choisir les $\vartheta_{(k)}$ de telle sorte que, pour $k = 1, \cdots, N$, il existe un difféomorphisme $\varphi = \varphi_{(k)}$ de classe C^2 et un nombre positif $\eta_0 > 0$ tels que, en posant $\varphi(x) = y = (y_1, y_2, y_3)$, on ait

$$y_3(x_0 - \eta \vec{n}_{x_0}) = \eta, \quad \forall x_0 \in \partial D \cap \operatorname{supp} \vartheta_{(k)}, \quad \forall \eta \in [0, \eta_0], \tag{4.11}$$

où $\vec{n}_{x_0}$ est la normale extérieure au point $x_0 \in \partial D \cap \operatorname{supp} \vartheta_{(k)}$.

Cela étant, on considère

$$\int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x \Delta_x N_i) dx = \sum_{k=0}^{N} \int_D \Theta_{(k)} dx \tag{4.12}$$

avec

$$\Theta_{(k)} = \vartheta_{(k)} |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \sum_{l,r=1}^{3} (\partial_{x_l} N_i)(\partial_{x_r}\partial_{x_l}\partial_{x_r} N_i).$$

Pour examiner $\int_D \Theta_{(k)} dx$ pour $k = 1, \cdots, N$, on remarque d'abord que la condition (4.11) entraîne

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial y_3}{\partial x_l} \frac{\partial y_3}{\partial x_l} = 1, \quad \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial y_3}{\partial x_l} \frac{\partial y_1}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial y_3}{\partial x_l} \frac{\partial y_2}{\partial x_l} = 0$$

dans un voisinage de $\partial D \cap \operatorname{supp} \vartheta_{(k)}$, ce qui, compte tenu de la relation

$$\nabla_x N_i \cdot \vec{n}|_{\partial D \cap \operatorname{supp} \vartheta_{(k)}} = \partial_{y_3} N_i|_{y_3=0} = 0,$$

implique que

$$\sum_{m,n,q=1}^{3} \Big(\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial y_m}{\partial x_l} \frac{\partial y_n}{\partial x_l}\Big)\Big(\sum_{r=1}^{3} \frac{\partial y_3}{\partial x_r} \frac{\partial y_q}{\partial x_r}\Big)(\partial_{y_m} N_i)(\partial_{y_n} \partial_{y_q} N_i) = 0 \quad \text{sur} \quad \{y_3 = 0\}.$$

Comme on peut constater, cette relation nous permet d'obtenir, avec la notation

$$A = (a_{lm}) = \Big(\frac{\partial y_m}{\partial x_l} \Big)$$

et avec la convention de la somme pour les indices répétées deux fois, l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_D \Theta_{(k)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^3_+} \vartheta_{(k)}(y) |\psi_{(2,i)}(t,y)|^{\frac{1}{2}(1+h)} (a_{lm} \partial_{y_m} N_i)(a_{rp} \partial_{y_p} a_{ln} \partial_{y_n} a_{rq} \partial_{y_q} N_i) \Big|\frac{\partial x}{\partial y}\Big| dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3_+} \vartheta_{(k)}(y) |\psi_{(2,i)}(t,y)|^{\frac{1}{2}(1+h)} (a_{rp} \partial_{y_p} a_{lm} \partial_{y_m} N_i)(a_{ln} \partial_{y_n} a_{rq} \partial_{y_q} N_i) \Big|\frac{\partial x}{\partial y}\Big| dy \\
&\quad -(1+h) \int_{\mathbb{R}^3_+} \vartheta_{(k)}(y) |\psi_{(2,i)}(t,y)|^{\frac{1}{2}(h-1)} (a_{rp} \partial_{y_p} a_{uv} \partial_{y_v} N_i)(a_{uw} \partial_{y_w} N_i) \times \\
&\qquad\qquad \times (a_{lm} \partial_{y_m} N_i)(a_{ln} \partial_{y_n} a_{rq} \partial_{y_q} N_i) \Big|\frac{\partial x}{\partial y}\Big| dy + \int_{\mathbb{R}^3_+} \mathcal{R}_1 dy \\
&= - \int_D \vartheta_{(k)}(x) |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{1}{2}(1+h)} \sum_{l,r=1}^{3} (\partial_{x_l} \partial_{x_r} N_i)^2 - \\
&\quad -(1+h) \int_D \vartheta_{(k)}(x) |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{1}{2}(h-1)} \times \\
&\qquad\qquad \times \sum_{l,r,u=1}^{3} (\partial_{x_r} \partial_{x_u} N_i)(\partial_{x_u} N_i)(\partial_{x_l} N_i)(\partial_{x_l} \partial_{x_r} N_i) dx \\
&\quad + \int_D \mathcal{R}_1 \Big| \frac{\partial y}{\partial x} \Big| dx + \int_D \mathcal{R}_2 dx,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_1(x)$ et $\mathcal{R}_2(x)$ sont des fonctions contenant au maximum un seul facteur de dérivée partielle seconde de N_i.

D'autre part on peut facilement effectuer l'intégration par parties dans $\int_D \Theta_{(0)} dx$, de sorte qu'il se transforme en une forme analogue à celle qu'on vient d'obtenir.

Donc, en rappelant (4.12), on obtient

$$\int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)}(\nabla_x N_i \cdot \nabla_x \Delta N_i)dx =$$

$$= -\int_D \mathcal{Q}_{(1,i)}dx - (1+h)\int_D \mathcal{P}dx + \int_D \mathcal{R}dx, \tag{4.13}$$

où $\mathcal{Q}_{(1,i)}$ est donné dans (4.9) et

$$\mathcal{P} = |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} \sum_{l,r,u=1}^{3} (\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_l}N_i)(\partial_{x_l}\partial_{x_r}N_i),$$

tandis que $\mathcal{R}$ est une fonction contenant au maximum un seul facteur de dérivée seconde de N_i. En outre, on décompose $\mathcal{P}$ en

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_{(2,i)} + \mathcal{P}_1,$$

où

$$\mathcal{Q}_{(2,i)} = |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} \sum_{l,m=1}^{3} |\partial_{x_l}N_i|^2 |\partial_{x_l}\partial_{x_m}N_i|^2 dx,$$

$$\mathcal{P}_1 = |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} \sum_{l,r,u=1;l\neq u}^{3} (\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_l}N_i)(\partial_{x_l}\partial_{x_r}N_i).$$

On remarque que

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_1| \;&\leq\; \frac{1}{2}|\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} \sum_{l,r,u=1;l\neq u}^{3} ((\partial_{x_l}N_i)^2(\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)^2 + (\partial_{x_u}N_i)^2(\partial_{x_r}\partial_{x_l}N_i)^2) \\ &\leq\; \mathcal{Q}_{(1,i)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_1| \;&\leq\; \frac{1}{2}|\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} \sum_{l,r,u=1;l\neq u}^{3} ((\partial_{x_u}N_i)^2(\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)^2 + (\partial_{x_l}N_i)^2(\partial_{x_r}\partial_{x_l}N_i)^2) \\ &=\; 2\mathcal{Q}_{(2,i)}.\end{aligned}$$

Donc on a

$$(1+h)|\mathcal{P}_1| \leq (1+h)\mathcal{Q}_{(2,i)} + \frac{1+h}{2}\mathcal{Q}_{(1,i)},$$

ou encore

$$\int_D \mathcal{Q}_{(1,i)}dx + (1+h)\int_D \mathcal{P}dx \geq \frac{1-h}{2}\int_D \mathcal{Q}_{(1,i)}dx.$$

On voit aisément que

$$|\mathcal{R}| \leq \varepsilon\mathcal{Q}_{(1,i)} + C_\varepsilon\Psi_{(2)}(t)$$

avec un nombre positif assez petit ε convenablement choisi et une constante C_ε dépendante de ε. Donc, en rappelant (4.13), on a

$$I_3 \leq -(\frac{1-h}{2} - \varepsilon)\int_0^t \Psi_{(2)}(t')\int_D \sum_{i=1}^{2} \mathcal{Q}_{(1,i)}dxdt' + C_\varepsilon \int_0^t (\Psi_{(2)}(t'))^2 dt' \tag{4.14}$$

avec un nombre positif assez petit ε convenablement choisi et une constante C_ε dépendante de ε.

A l'aide du lemme de Gronwall et du lemme 3.1, on déduit des relations (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.8), (4.10), (4.14) l'inégalité (4.1) avec une constante K_2, qui ne dépend pas de L. □

Maintenant on va démontrer le

Lemme 4.2. *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec $\partial D \in C^2$. Soit $h \in]0,1[$. Si $N^{(L)}$ est la solution du problème* (2.3)–(2.5)*, alors il existe une constante M_2 indépendante de L telle que*

$$\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T} \|\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^{3+h}}^{3+h} + \tag{4.15}$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T \int_D |\nabla_x N^{(L)}|^{1+h} \sum_{i=1}^{2}\sum_{l,m=1}^{3} |\partial_{x_l}\partial_{x_m} N_i^{(L)}|^2 dxdt \leq M_2.$$

Démonstration. Nous utilisons les mêmes fonctions $\Psi_{(2)}(t)$ et $\psi_{(2,i)}(t,x)$ définies dans (4.2) et (4.3) et, dans la suite de la démonstration, nous écrivons simplement N_i au lieu de $N_i^{(L)}$.

Comme on a

$$\frac{\partial \Psi_{(2)}}{\partial N_i}(f) = (3+h)\int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i \cdot \nabla_x f dx,$$

la formule d'Ita appliquée à $\Psi_{(2)}(t)$ nous donne

$$\Psi_{(2)}(t) = \Psi_{(2)}(0) + (3+h)(J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \tag{4.16}$$

avec

$$J_1 = \int_0^t \int_D (\alpha|\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)}|\nabla_x N_1|^2 - \gamma|\psi_{(2,2)}|^{\frac{1}{2}(1+h)}|\nabla_x N_2|^2)dxdt',$$

$$J_2 = \int_0^t \int_D [|\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)}(-\beta(\nabla_x N_1 \cdot \nabla_x(N_1 N_2)) - \mu(\nabla_x N_i \cdot \nabla_x(N_1^2))) +$$

$$+|\psi_{(2,2)}|^{\frac{1}{2}(1+h)}(\delta(\nabla_x N_2 \cdot \nabla_x(N_1 N_2)) - \nu(\nabla_x N_2 \cdot \nabla_x(N_2^2)))]dxdt',$$

$$J_3 = \int_0^t \int_D \sum_{i=1}^2 \kappa_i |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x \Delta_x N_i) dx dt',$$

$$J_4 = \int_0^t \sum_{i=1}^2 \varrho_i \langle |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i, \nabla_x (N_i dW) \rangle,$$

$$J_5 = \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^2 \varrho_i^2 \int_D \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 [\, |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} (\nabla_x (N_i e_k) \cdot \nabla_x (N_i e_k)) +$$

$$+ (1+h) |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(h-1)} (\nabla_x N_i \cdot \nabla_x (N_i e_k))(\nabla_x N_i \cdot \nabla_x (N_i e_k))] dx.$$

Les considérations pour I_1, I_2, I_3, I_5 exposées dans la démonstration du lemme 4.1 s'appliquent à J_1, J_2, J_3, J_5 de la même manière sauf des modifications simples et évidentes, de sorte qu'on a

$$J_1 + J_2 + J_5 \leq C_\varepsilon \int_0^t \Psi_{(2)}(t') dt' + \varepsilon \int_0^t \int_D \sum_{i=1}^2 \mathcal{Q}_{(1,i)} dx dt' + Ct, \tag{4.17}$$

$$J_3 \leq -(\frac{1-h}{2} - \varepsilon) \int_0^t \int_D \sum_{i=1}^2 \mathcal{Q}_{(1,i)} dx dt' + C_\varepsilon \int_0^t \Psi_{(2)}(t') dt', \tag{4.18}$$

où $\mathcal{Q}_{(1,i)}$ est l'expression donnée dans (4.9).

Quant à J_4, en désignant par $\widetilde{\psi}_i(N)$ la fonctionnelle linéaire définie sur $H^2(D)$ par

$$\widetilde{\psi}_i(N)[f] = \int_D |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i \cdot \nabla_x (N_i f) dx,$$

en vertu de l'inégalité de Doob, on a

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} J_4 \leq 2 \Big(\mathbb{E} \Big| \int_0^T \sum_{i=1}^2 \varrho_i \langle |\psi_{(2,i)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i, \nabla_x (N_i dW) \rangle \Big|^2 \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2 \Big(\mathbb{E} \int_0^T \sum_{i=1}^2 \varrho_i^2 \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \widetilde{\psi}_i(N) [\widetilde{\psi}_i(N)[(e_k \otimes e_k)]] dt \Big)^{1/2} =$$

$$= 2 \big(\mathbb{E} \int_0^T \sum_{i=1}^2 \varrho_i^2 \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \langle |\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i, \nabla_x (N_i e_k) \rangle^2 dt \big)^{1/2}.$$

Or, grâce à (1.8), à (4.7) et au lemme 3.1 on a

$$\mathbb{E} \int_0^T \sum_{i=1}^2 \varrho_i^2 \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \langle |\psi_{(2,1)}|^{\frac{1}{2}(1+h)} \nabla_x N_i, \nabla_x (N_i e_k) \rangle^2 dt \leq C\, \mathbb{E} \int_0^T |\Psi_{(2)}(t)|^2 dt + C$$

avec une costante C. Donc, en vertu du lemme 4.1, on obtient

$$\mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} J_4 \le C' \sqrt{TK_2} + C' \tag{4.19}$$

avec une constante C'.

Des relations (4.16)–(4.19) on déduit (4.15). □

5. Estimations des dérivées des solutions des problèmes approchés – cas de dimension 2

Maintenant nous voulons établir les analogues des lemmes 4.1 et 4.2 pour le cas de dimension 2. Grâce à la diminution du nombre des variables spatiales, on peut obtenir des affirmations plus fortes. On va démontrer d'abord le

Lemme 5.1. *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ avec $\partial D \in C^2$. Soit $p \ge 2$. Si $N^{(L)}$ est la solution du problème* (2.3)–(2.5)*, alors il existe une constante K_2 indépendante de L telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\,\|\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^p}^{2p} + \tag{5.1}$$

$$+\,\mathbb{E}\int_0^T \|\nabla_x N^{(L)}\|_{L^p}^{p} \int_D |\nabla_x N^{(L)}|^{p-2} \sum_{i=1}^{2}\sum_{l,m=1}^{2} |\partial_{x_l}\partial_{x_m} N_i^{(L)}|^2 dxdt \le K_2.$$

Démonstration. On considère la fonction

$$\Psi_{(2)}(t) = \int_D \sum_{i=1}^{2} |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{p}{2}} dx \tag{5.2}$$

avec

$$\psi_{(2,i)}(t,x) = (|\nabla_x N_i^{(L)}(t,x)|^2 + 1). \tag{5.3}$$

Dans la suite de la démonstration on écrit simplement N_i au lieu de $N_i^{(L)}$.

Tout comme dans (4.4), d'après la formule d'Ito on a

$$(\Psi_{(2)}(t))^2 = (\Psi_{(2)}(0))^2 + 2p(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5), \tag{5.4}$$

où I_i $(i = 1, \cdots, 5)$ sont les mêmes que dans (4.4) avec la substitution de $\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix}$ à la place de $\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix}$ et de p à la place de $3 + h$.

Il n'est pas difficile de constater que I_1, I_4 et I_5 peuvent être estimés de la même manière que dans la démonstration du lemme 4.1 (voir (4.5), (4.6), (4.8)).

Pour estimer I_2 et I_3 on pose

$$\mathcal{Q}_{(1,i)} = |\psi_{(2,i)}|^{\frac{p}{2}-1} \sum_{l,m=1}^{2} |\partial_{x_l}\partial_{x_m} N_i|^2 \qquad (i=1,2). \tag{5.5}$$

Pour I_2 on procède tout comme dans la démonstration du lemme 4.1, de sorte que les estimations des termes qui composent I_2 nous conduisent à

$$I_2 \leq \varepsilon \int_0^t \Psi_{(2)}(t') \int_D \sum_{i=1}^{2} \mathcal{Q}_{(1,i)} dx dt' + C_\varepsilon \int_0^t (\Psi_{(2)}(t))^2 dt' + \int_0^t \|N\|_{L^{2p}}^{4p} dt', \tag{5.6}$$

où ε est un nombre positif assez petit convenablement choisi et C_ε est une constante dépendante de ε.

En ce qui concerne I_3, on introduit comme dans la démonstration du lemme 4.1 une partition de l'unité de D par une famille de fonctions $\{\vartheta_{(k)}\}_{k=0}^N$. Ainsi on a

$$I_3 = \int_0^t \Psi_{(2)} \sum_{i=1}^{2} \kappa_i \sum_{k=0}^{N} \int_D \Theta_{(i,k)} dx \tag{5.7}$$

avec

$$\Theta_{(i,k)} = \vartheta_{(k)} |\psi_{(2,i)}|^{\frac{p}{2}-1} \sum_{l,r=1}^{2} (\partial_{x_l} N_i)(\partial_{x_r}\partial_{x_l}\partial_{x_r} N_i).$$

Le raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 4.1 nous conduit à

$$\int_D \Theta_{(i,k)} dx = -\int_D \vartheta_{(k)}(x) |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{p}{2}-1} \sum_{l,r=1}^{2} (\partial_{x_l}\partial_{x_r} N_i)^2 -$$

$$-(p-2) \int_D \vartheta_{(k)}(x) |\psi_{(2,i)}(t,x)|^{\frac{p}{2}-2} \sum_{l,r,u=1}^{2} (\partial_{x_r}\partial_{x_u} N_i)(\partial_{x_u} N_i)(\partial_{x_l} N_i)(\partial_{x_l}\partial_{x_r} N_i) dx +$$

$$+ \int_D \mathcal{R}_{(1,i)} dx$$

avec une fonction $\mathcal{R}_{(1,i)}(x)$ contenant au maximum un seul facteur de dérivée partielle seconde de N_i, ce qui, d'après (5.7), nous donne

$$I_3 = -\int_0^t \Psi_{(2)} \sum_{i=1}^{2} \kappa_i \int_D (\mathcal{Q}_{(1,i)} + (p-2)|\psi_{(2,i)}|^{\frac{p}{2}-2}(p_{(1,i)} + p_{(2,i)}) + \mathcal{R}_{(i)}) dx dt',$$

où $\mathcal{R}_{(i)}$ est une fonction contenant au maximum un seul facteur de dérivée partielle seconde de N_i, $\mathcal{Q}_{(1,i)}$ est donné dans (5.5) et

$$p_{(1,i)} = \sum_{l,r=1}^{2} (\partial_{x_l} N_i)^2 (\partial_{x_l}\partial_{x_r} N_i)^2,$$

$$p_{(2,i)} = \sum_{l,r,u=1;l\neq u}^{2} (\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_l}N_i)(\partial_{x_l}\partial_{x_r}N_i)dx.$$

Or, comme

$$|(\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_u}N_i)(\partial_{x_l}N_i)(\partial_{x_l}\partial_{x_r}N_i)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}[(\partial_{x_u}N_i)^2(\partial_{x_r}\partial_{x_u}N_i)^2 + (\partial_{x_l}N_i)^2(\partial_{x_l}\partial_{x_r}N_i)^2]$$

et que l'ensemble $\{(l,u) \in \{1,2\} \times \{1,2\} \,|\, l \neq u\}$ se réduit à $\{(1,2),(2,1)\}$, il vient

$$|p_{(2,i)}| \leq p_{(1,i)}$$

et donc

$$p_{(1,i)} + p_{(2,i)} \geq 0.$$

Comme d'autre part on a

$$\kappa_i|\mathcal{R}_{(i)}| \leq \varepsilon\mathcal{Q}_{(1,i)} + C_\varepsilon\Psi_{(2)}(t)$$

avec un nombre positif assez petit convenablement choisi ε et une constante C_ε dépendante de ε.

il s'ensuit

$$I_3 \leq -(1-\varepsilon)\int_0^t \Psi_{(2)}(t')\int_D \sum_{i=1}^{2} \mathcal{Q}_{(1,i)}dxdt' + C_\varepsilon\int_0^t (\Psi_{(2)}(t'))^2dt'. \tag{5.8}$$

A l'aide du lemme de Gronwall, des relations (5.4), (5.6), (5.8) et des estimations de I_1, I_4, I_5 on déduit le lemme 5.1. □

Etabli le lemme 5.1, on peut en déduire l'analogue du lemme 4.2 pour le cas de dimension 2 de la même manière que pour le lemme 4.2. On a le

Lemme 5.2. *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ avec $\partial D \in C^2$. Soit $p \geq 2$. Si $N^{(L)}$ est la solution du problème* (2.3)–(2.5)*, alors il existe une constante M_2 indépendante de L telle que*

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|\nabla_x N^{(L)}(t,\cdot)\|_{L^p}^p + \tag{5.9}$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T\int_D |\nabla_x N^{(L)}|^{p-2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{l,m=1}^{2}|\partial_{x_l}\partial_{x_m}N_i^{(L)}|^2dxdt \leq M_2.$$

Démonstration. Pour le déduire du lemme 5.1, il suffit de procéder d'une manière analogue au lemme 4.2; les modifications nécessaires sont simples et évidentes. □

6. Démonstration du théorème principal

Maintenant on est en mesure de démontrer le théorème 1.1.

Démonstration du théoréme 1.1. On remarque que d'après les inégalités de Sobolev, pour un ouvert borné D de $\mathbb{R}^d$ et $h > 0$, on a

$$\|N^{(L)}\|_{L^\infty(D)} \leq C(\|N^{(L)}\|_{L^{d+h}(D)} + \|\nabla_x N^{(L)}\|_{L^{d+h}(D)}) \tag{6.1}$$

avec une constante C et, si le deuxième membre de (6.1) est fini, $N^{(L)}$ sera continue dans $\overline{D}$. Donc pour $T > 0$ fixé, en vertu des lemmes 3.2, 4.2 et 5.2, on a $N^{(L)} \in C(\overline{D})$ pour tout $t \in [0, T]$ $\mathbb{P}$–p.s. et

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|N^{(L)}(t, \cdot)\|_{L^\infty(D)} \leq \tag{6.2}$$

$$\leq K'(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|N^{(L)}(t, \cdot)\|_{L^{d+h}(D)} + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla_x N^{(L)}(t, \cdot)\|_{L^{d+h}(D)}) \leq K$$

avec une constante K indépendante de L.

Etant établie la relation (6.2), on va conclure la démonstration en utilisant l'idée développée dans [3]. En effet on déduit de l'inégalité de Markov et de (6.2) que

$$\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}(\{ \sup_{0 \leq t \leq T, x \in D} |N^{(L)}(t, x)| \geq L\}) = 0. \tag{6.3}$$

En posant

$$\Omega_L = \{\omega \in \Omega \,|\, \sup_{0 \leq t \leq T, x \in D} |N^{(L)}(t, x)| < L\} \tag{6.4}$$

et en rappelant la construction des problèmes approchés, on a

$$N^{(L)}\big|_{\Omega_{\min(L,L')}} = N^{(L')}\big|_{\Omega_{\min(L,L')}} \quad \mathbb{P}-\text{p.s.} \qquad \text{pour} \quad L, L' > 0. \tag{6.5}$$

De (6.3) et (6.5) on déduit que, pour $L \to \infty$, $N^{(L)}$ converge p.s. à une limite, que nous désignons par N.

Par la construction de $N^{(L)}$ et de N il n'est pas difficile de constater que N est une solution du problème (1.1)–(1.3) p.s.. En outre, en vertu de la proposition 2.2 et de la construction de la solution N, on a $N_i > 0$ p.p. dans D pour tout $t \geq 0$ p.s..

Pour démontrer l'unicité de la solution, on considère une solution $\widetilde{N}$ qui peut éventuellement être différente de la solution N construite ci-dessus et qui est elle aussi un processus stochastique à valeurs dans $L^\infty(0, T; W^1_{d+h}(D))$ avec $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\widetilde{N}\|_{L^\infty} < \infty$ p.s. ($h \in]0, 1[$ si $d = 3$ et $h = p - d > 0$ quelconque si $d = 2$).

Soit ε un nombre positif arbitraire. Alors, compte tenu de (6.1) on voit que pour un $T > 0$ fixé il existe un $L > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_L) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mathbb{P}(\Omega_L) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

où Ω_L est l'ensemble défini par (6.4) et

$$\widetilde{\Omega}_L = \{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|\widetilde{N}\|_{L^\infty} < L\}.$$

Il est évident que

$$\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_L \cap \Omega_L) \geq 1 - \varepsilon.$$

En vertu de l'unicité de la solution établie dans la proposition 2.1, la solution restreinte à l'ensemble $\widetilde{\Omega}_L \cap \Omega_L$ est unique et donc

$$\widetilde{N}|_{\widetilde{\Omega}_L \cap \Omega_L} = N|_{\widetilde{\Omega}_L \cap \Omega_L}. \tag{6.7}$$

Si on fait tendre ε vers 0, des relations (6.6) et (6.7) on obtient

$$\widetilde{N} = N \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

Bibliographie

[1] Brézis, H., Analyse fonctionnelle – théorie et applications Masson. Paris, 1983.

[2] Capocelli, R. M., Ricciardi, L. M., A diffusion model for population growth in a random environment. Theor. Pop. Biol., 5 (1974), 28–41.

[3] Chessa, S., Fujita Yashima, H., Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore, A paraître sur Boll. U. M. I.

[4] Christiansen, F. B., Fenchel, T. M., Theories of population in biological communities, Springer, 1977.

[5] Da Prato, G., Zabczyk, J., Stochastic equations in infinite dimensions, Cambridge Univ. Press, 1992.

[6] Feldman, M. W., Rouhgarden, J., A population's stationary distribution and chance of extintion in a stochastic environment with remarks on the theory of species packing. Theor. Pop. Biol., 7 (1975), 197–207.

[7] Gabuti, B., Negro, A., Some results on asymptotic behaviour of the Volterra–Lotka diffusion equations. Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 36 (1977/78), 403–414.

[8] Ladde, G. S., Robinson, J. V., Stability and limiting distributions of one and two species stochastic population models. Math. Modeling, 5 (1984), 331–338.

[9] Negro, A., Gabuti, B., A fractional steps method for the Volterra–Lotka diffusion equations. Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 35 (1976/77), 373–389.

[10] Nisbet, R. M., Gurney, W. S. C., Modelling fluctuating populations, John Wiley, 1982.

[11] Pardoux, E., Intégrales stochastiques hilbertiennes, Publ. 7617, Centre de Math. de la Décision, Univ. Paris - Dauphine, 1976.

[12] Pavlotskij, I. P., Suslin, V. M., Stochastic model of evolution on areas in population ecology, (en russe) Matematicheskoe Modelirovanie, 6–3 (1994), 9–24.

[13] Shen, Y. Y., Zhang, B. G., Sur la solution périodique du modèle stochastique pour une espèce. (en chinois) Sheng Wu Shu Xue Xue Bao (J. Biomath.), 2 (1987), 30–36.

[14] Volterra, V., Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthier–Villar, Paris, 1931.

[15] Zhang, B. G., Gopalsamy, K., On the periodic solution of n–dimensional stochastic population models. Stoch. Anal. Appl., 18 (2000), 323–331.

Received by the editors January 20, 2002