Novi Sad J. Math.
Vol. 34, No. 1, 2004, 79-87

OPERATEURS DE FERMETURE SEMI-COMMUTATIFS

Achille Achache[1]

Abstract. Semi-commutative closure operators. Let us say that the closure operators f and g on a p.o.set P are semi-commutative iff $fg \leq gf$. Fuzzification of the corresponding closure spaces when P is the complete lattice of the subsets of a set S. Case where S is a semi-lattice. Case where S is the square of a set E.

Résumé. Disons que les opérateurs de fermeture f et g sur un p.o.set P sont semi-commutatifs, ssi $fg \leq gf$. Brumisation des espaces de fermeture associés lorsque P est le treillis complet des parties d'un ensemble S. Cas o S est un demi-treillis. Cas où S est le carré d'un ensemble E.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 03, 06, 08

Key words and phrases: closures, complete lattices, Galois connections, lattices, fuzziness

0. Introduction

Dans tout l'article, disons "demi-treillis" au lieu de "sup-demi-treillis".

Rappelons qu'un Heyting est un treillis complet S vérifiant (pour $X \subset S$ et $a \in S$) : $(\vee X) \wedge a = \vee\{x \wedge a, x \in X\}$. Un anti-Heyting est un treillis complet qui est Heyting pour l'ordre dual.

Par exemple, les ouverts d'un espace topologique e forment un Heyting (les fermés forment un anti-Heyting).

Si donc on associe à un ensemble amorphe e sa topologie discrète, on retrouve le fait que $S = 2^e$ est à la fois Heyting et anti-Heyting.

Restons dans un espace amorphe e. Soit f l'opérateur de fermeture qui associe à $X \subset S$ le sous-demi-treillis généré. Soit g l'opérateur de fermeture qui associe à X la partie $\cap$-stable (de S) engendrée. Appelons (pour faire bref) système toute collection de parties (de e) stable par union finie et par intersection arbitraire. (Tout système est un anti-Heyting). On sait (voir par exemple [3] p.11) (ou on retrouve) que le système généré par X est gfX. Si Z est un sous-demi-treillis de S, on voit aisément que gZ est encore un sous-demi-treillis de S. Donc, pour $Y \subset S$, gfY est un sous-demi-treillis, i.e. $fgfY = gfY$. Finalement, $fgY \subset fgfY = gfY$. Ainsi $fg \subset gf$.

Passons plutôt à l'abstrait.

[1]140 rue Dedieu, 69100 Villeurbanne, France, e-mail: achile@numericable.com

1. Préliminaires : cas d'un p.o.set

Dans tout ce paragraphe, P est un poset ("partially ordered set"). Notons i l'application identité sur P.

Soit F le poset des opérateurs de fermeture sur P (i.e. des applications croissantes $k : P \to P$ tq $i \leq k = k^2$): F a pour minimum i. Pour $k \in F$, soit I_k l'ensemble des invariants par k : $I_k = k(P)$. Notons $\mathbb{V}$ le supremum (lorsqu'il existe) dans F. Remarquons que, pour $(f,g) \in F^2$: $fg = g \Leftrightarrow f \leq g \Leftrightarrow gf = g$. (Et donc: $\underline{f \leq g \Rightarrow fg = gf}$)

Définition 1.1. *Disons que les éléments f et g de F sont, dans cet ordre, semi-commutatifs ssi l'on a l'une des conditions équivalentes suivantes:*

1/ $g(I_f) \subset I_f$

2/ $fgf = gf$

3/ $fg \leq gf$.

Preuve de l'équivalence.
$1 \Leftrightarrow 2$. $g(I_f) \subset I_f \Leftrightarrow \forall p \in I_f,\ gp \in I_f \Leftrightarrow \forall x \in P,\ gfx \in I_f \Leftrightarrow \forall x \in P,\ fgfx = gfx$.
$2 \Rightarrow 3$. Si $fgf = gf$, $(fg)i \leq (fg)f = gf$.
$3 \Rightarrow 2$. Si $fg \leq gf$, $(fg)f \leq (gf)f = i(gf) \leq f(gf)$. □

Le lecteur pourra même vérifier qu'il y a alors équivalence aussi avec $gfg = gf$.

Proposition 1.2. *Pour des éléments s, f et g de F il y a équivalence entre:*

1/ s majore f et g

2/ $s \geq gf$

3/ $s \geq fg$.

Preuve.
$1 \Rightarrow 2$. On déduit de l'hypothèse : $gf \leq gs \leq ss$.
$2 \Rightarrow 1$. On déduit de l'hypothèse : $if \leq gf \leq s$ et $gi \leq gf \leq s$. □

Proposition 1.3. *Soit f et g dans F. Il y a équivalence entre:*

1/ f et g sont semi-commutatifs

2/ $gf = f \mathbb{V} g$.

Preuve.
$1 \Rightarrow 2$. L'application gf est croissante et majore i. Comme $(gf)(gf) = g(gf) = gf, gf \in F$. D'après Prop. 1.2, tout élément de F qui majore f et g majore gf. Donc gf est le supremum de $R = \{x \in F/x = f \text{ ou } g\}$.
$2 \Rightarrow 1$. Avec l'hypothèse faite, gf majore f et g donc (Prop. 1.2) majore fg. □

Remarquons que, dans les conditions de Prop. 1.3, gf est le minimum de $R = \{h \in F/h \geq fg\}$. [En effet, d'une part $gf \in R$ et d'autre part tout h de R majore f et g, donc aussi $f \,\mathbb{V}\, g = gf$]

Introduisons l'ensemble $A = \{a \in F/\forall g \in F, ag \leq ga\}$. Soit $(x, y) \in A^2$. Comme $xy \leq yx$, on a $yx = x \,\mathbb{V}\, y$ (d'après Prop. 1.3) donc $yx \in F$. Comme $yx \leq xy$, on a : $xy = yx (\in F)$. Pour $f \in F$, $xyf \leq xfy \leq fxy$, donc $xy \in A$. Ainsi, A est à la fois un demi-groupe commutatif d'unité i et un demi-treillis de minimum i. On voit que $B = \{b \in F/\forall f \in F, fb \leq bf\}$ est aussi un demi-groupe commutatif d'unité i et un demi-treillis de minimum i. Un élément k de F est dans $A \cap B$ ssi, $\forall f \in F, kf = fk$. Proposons d'appeler centre de F le demi-treillis $A \cap B$.

Donnons un exemple d'élément de A lorsque P est un demi-treillis. Fixons $p \in L$ et posons $a(x) = x \vee p$. On a, $\forall g \in F : ag \leq ga$.

2. Cas d'un treillis complet L

Dans tout ce qui suit, P est remplacé par un treillis complet L. Le poset F est une partie $\wedge$-stable du treillis complet L^L : c'est donc un treillis complet pour l'ordre induit (pour $G \subset F$, l'infimum induit de G est $\wedge G$, le supremum induit est $\mathbb{V} G = \wedge\{k \in F/k \geq \vee G\}$). L'ensemble $\mathcal{S}$ des parties $\wedge$-stables de L est une partie $\cap$-stable de 2^L : c'est un treillis complet. L'application $a \mapsto I_a$ de F vers $\mathcal{S}$ est un anti-isomorphisme (de treillis complets).

Proposition 2.1. *Pour $(f, g) \in F^2$, on a*

$$f \vee g \leq gf \leq f \,\mathbb{V}\, g.$$

Preuve. Comme f et g minorent gf, $f \vee g \leq gf$. Comme $f \,\mathbb{V}\, g$ majore f et g on a (Prop. 1.2) $f \,\mathbb{V}\, g \geq gf$. □

A titre d'exercice le lecteur pourra interpréter (à la lumière des énoncés précédents) les diagrammes ci-dessous (et en imaginer d'autres).

Proposition 2.2. *Soit f et g des éléments de F*

1/ Pour que f et g soient semi-commutatifs, il faut et il suffit que $gf \in F$.

2/ Si f et g sont semi-commutatifs, on a, en posant $c = gf$, $I_c = I_f \cap I_g$.

Preuve.
1/ Compte tenu de Prop. 1.3 on peut se contenter d'établir que la condition est suffisante. Supposons donc $gf \in F$. Comme gf majore f et g, $gf \geq f \mathbb{V} g$. Mais (Prop. 2.1) $f \mathbb{V} g \geq gf$. Donc $gf = f \mathbb{V} g$. Donc (Prop. 1.3) f et g sont semi-commutatifs.
2/ Supposons f et g semi-commutatifs. On a (Prop. 1.3) $c = f \mathbb{V} g$. Comme I est un anti-isomorphisme de F vers $\mathcal{S}$, $I_c = I(f \mathbb{V} g) = I_f \cap I_g$. □

3. Cas du treillis complet L des parties d'un ensemble S

Dans toute la suite, L sera le treillis complet des parties d'un ensemble S.

3.1. Exemple : cas où S est un anti-Heyting

Appelons sous-espace de l'anti-Heyting S toute partie H (de S) stable par infimum arbitraire et par supremum fini. Un tel H est un treillis complet : pour $G \subset H$, l'infimum induit de G est $\wedge G$ et son supremum induit $\mathbb{V} G = \wedge\{h \in H / h \geq \vee G\}$. On déduit que H est un anti-Heyting pour l'ordre induit.

Soit, pour $X \subset S$, $f(X)$ le sous-demi-treillis généré par X, et $g(X)$ la partie $\wedge$-stable générée par X. Montrons que les opérateurs de fermeture f et g sont semi-commutatifs. Il suffit d'établir (Déf. 1.1) que, si $M \in I_f$, $g(M)$ est un sous-demi-treillis. Comme $\{0\} \subset M, 0 = \wedge(\{0\}) \in g(M)$. Si $a, b \in M$, c'est que $a = \wedge X$ et $b = \wedge Y$ (avec $X, Y \subset M$) : donc $a \vee b = \wedge\{x \vee y, (x, y) \in X \times Y\} \in g(M)$. Comme souhaité, $g(M)$ est un sous-demi-treillis.

Il s'ensuit (Prop. 2.2) que les gf-fermés sont exactement les sous-espaces de S.

Si, par exemple, S est l'ensemble des parties d'un ensemble e, les sous-espaces sont exactement les systèmes de l'introduction.

3.2. Compléments sur la brumisation

Fixons, pour toute la suite de l'article, un treillis complet de référence T, de minimum noté 0 et de maximum noté 1 ($0 \leq 1$). Appelons T-partie ou partie T-floue (ou T-brumisée) d'un ensemble quelconque S toute application de S vers T. Pour $t \in T$, désignons par $\uparrow t$ l'ensemble des éléments de T qui majorent t.

Définition 3.2.1. *Par rapport à un opérateur de fermeture k sur 2^S, la partie T-floue $\alpha \in T^S$ sera dite k-fermée ssi elle vérifie l'une des conditions équivalentes*

1/ $\forall t \in T$, $\alpha^{-1} \uparrow t \in I_k$.

2/ $\forall X \subset S$, $\wedge \alpha X = \wedge \alpha k X$

3/ $\forall X \subset S$, $(z \in kX \Rightarrow \alpha z \geq \wedge \alpha X)$.

Preuve de l'équivalence. L'équivalence entre 1/ et 2/ a été établie en [2]. Comme $(\forall\alpha) \wedge \alpha kX \leq \wedge\alpha X$, la condition 2/ équivaut à $\wedge\alpha X \leq \wedge\alpha kX$, c'est-à-dire à 3/. □

On a vu en [1] que l'ensemble J_k des parties T-floues de S qui sont k-fermées est une partie $\wedge$-stable du treillis complet T^S.

Donnons trois exemples de calculs de J_k.

Proposition 3.2.2. *On suppose que S est un ensemble préordonné.*

On définit $k \in F$ par $k(X) = \downarrow X = \{y \in S / \exists x \in X, y \leq x\}$.

Il y a équivalence entre

1/ $\alpha \in J_k$

2/ $z \leq x \Rightarrow \alpha x \leq \alpha z$.

Preuve.

$1 \Rightarrow 2$. Supposons $\alpha \in J_k$. Si $z \leq x$, $z \in k(\{x\})$, donc (Déf. 3.2.1) $\alpha z \geq \wedge\{\alpha t, t \in \{x\}\} = \alpha x$.

$2 \Rightarrow 1$. Soit $z \in \downarrow X : z \leq x \in X$. D'après l'hypothèse, $\alpha z \geq \alpha x$, donc $\alpha z \geq \wedge\alpha X$. Donc (Déf. 3.2.1) $\alpha \in J_k$. □

Proposition 3.2.3. *Soit S un demi-treillis (de minimum 0.)*

Soit, pour $X \subset S$, $k(X)$ le demi-treillis généré par X:

$$k(X) = \{\vee A, A \text{ fini } \subset X\}.$$

Il y a équivalence entre

1/ $\alpha \in J_k$

2/ $\alpha(0) = 1$ et, $\forall (a,b) \in S^2$, $\alpha(a \vee b) \geq \alpha a \wedge \alpha b$.

Preuve.

$1 \Rightarrow 2$. Supposons $\alpha \in J_k$. Soit $X \subset S$. Si $X = \emptyset$, $f(X) = \{0\}$, donc (déf. 3.2.1) $\alpha 0 \geq \wedge\alpha X = 1$. Si $X = \{x \in S / x = a \text{ ou } b\}$, on a : $a \vee b \in k(X)$, donc (Déf. 3.2.1) $\alpha(a \vee b) \geq \wedge\alpha X = \alpha a \wedge \alpha b$.

$2 \Rightarrow 1$. Soit $z \in k(X)$. On peut trouver A fini $\subset X$ tq $z = \vee A$. Si $A = \emptyset$, $z = 0$ et $\alpha z = \alpha 0 = 1 \geq \wedge\alpha X$. Sinon, $\alpha z \geq \wedge\alpha A \geq \wedge\alpha X$. Donc (Déf. 3.2.1) $\alpha \in J_k$. □

La Déf. 3.2.1 nous fournit aussi le résultat évident suivant.

Proposition 3.2.4. *Soit S un treillis complet.*

Soit, pour $X \subset S$, $k(X)$ la partie $\vee$-stable engendrée:

$$k(X) = \{\vee Y, Y \subset X\}.$$

Pour que $\alpha (\in T^S)$ soit k-fermée, il faut et il suffit que: $Y \subset X \subset S \Rightarrow \alpha(\vee Y) \geq \wedge\alpha X$.

Revenons au cas de la brumisation générale de l'espace de fermeture (S,k) $(k \in F)$. Appelons Δ le treillis complet des parties $\wedge$-stables du treillis complet T^S : J est une application de F vers Δ. Appelons ω l'anti-isomorphisme canonique de Δ vers le treillis complet Ω des opérateurs de fermeture sur T^S $(\omega_M(\alpha) = \wedge\{m \in M | m \geq \alpha\})$. Désignons, par $j(k)$ (pour $k \in F$) l'élément de Ω associé à J_k ; $(j(k))\,(\alpha) = \wedge\{\beta \in J_k | \beta \geq \alpha\} = (\omega(J_k))\,(\alpha) : j = \omega \circ J$

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta \arrow[dl, "\omega"'] & \\
\Omega & & F \arrow[ll, "j"] \arrow[ul, "J"']
\end{tikzcd}$$

Définition 3.2.5. *Soit A et B des treillis complets. Une application φ de A vers B est dite* <u>*galoisienne*</u> *ssi $\forall X \subset A$, $\varphi(\vee A) = \wedge\,(\varphi(A))$.*

(On sait que φ est galoisienne si et seulement s'il existe une correspondance de Galois $A \overset{\varphi}{\rightleftarrows} B$) (voir par exemple [6]).

Proposition 3.2.6. *L'application $J(k \mapsto J_k)$ de F vers Δ est galoisienne.*

Preuve. Soit $G \subset F$. Comme $I(\mathbb{V}G) = \cap\{I_g, g \in G\}$, on a (voir 1) de Déf. 3.2.1): $J(\mathbb{V}G) = \left\{\alpha \in T^S / \forall t \in T, \alpha^{-1} \uparrow t \in \cap\{I_g, g\}\right\} = \{\alpha / \forall t, \forall g, \alpha^{-1} \uparrow t \in I_g\} = \{\alpha / \forall g, \alpha \in J_g\} = \cap\{J_g, g \in G\}$. □

Peut-on expliciter θ tq $f \underset{\theta}{\overset{J}{\rightleftarrows}} \Delta$ soit Galois ?

Si on note (par abus) $\mathbb{V}$ le supremum dans Ω, on déduit $j(\mathbb{V}G) = \omega\,(J(\mathbb{V}G)) = \omega\,(\cap\{J_g, g \in G\}) = \mathbb{V}\{\omega(J_g), g \in G\} = \mathbb{V}\{j(g), g \in G\}$. [Donc j est ce que l'on appelle une fonction <u>résiduée</u>] (voir par exemple [6]).

3.3. Retour aux opérateurs de fermeture semi-commutatifs

Proposition 3.3.1. *Soit S un ensemble. Soit f et g des opérateurs de fermeture semi-commutatifs sur 2^S. Posons $c = gf$.*

1/ $J_c = J_f \cap J_g$

2/ $j(f \mathbb{V} g) = j(f) \mathbb{V} j(g)$.

Preuve.
1/ Comme $c = f \mathbb{V} g$ (Prop. 1.3), on a (Prop. 3.2.6), $J(c) = J(f \mathbb{V} g) = J(f) \cap J(g)$.
2/ On a observé que, pour $G \subset F$, $j(\mathbb{V}G) = \mathbb{V}\{j(k), k \in G\}$.

On applique ceci à $G = \{k \in F / k = f \text{ ou } g\}$. □

Terminons ce paragraphe par un exemple. Soit S un treillis complet. Soit f et g les opérateurs de fermeture sur 2^S définis par $f(X) = \{\vee Y, Y \subset X\}$ et $g(X) =\downarrow X$. On voit aisément que $\forall X \in I_f$, $g(X) \in I_f$ donc (déf. 1.1.) que f et g sont semi-commutatifs. Soit $c = gf$: on voit que $c(X) =\downarrow \vee X$.

Proposition 3.3.2. *Soit S un treillis complet.*

Soit c l'opérateur de fermeture sur 2^S défini par $X \mapsto\downarrow \vee X$.

Le treillis complet J_c des parties T-floues (de S) qui sont c-fermées se compose exactement des fonctions galoisiennes de S vers T.

Preuve.
1/ Soit $\alpha \in J_c = J_f \cap J_g$. D'après Prop. 3.2.4, on a, $Y \subset X \subset S \Rightarrow \alpha(\vee Y) \geq \wedge\alpha X$. D'après Prop. 3.2.2, α est décroissante. Si $x \in X$, $x \leq \vee X$, donc $\alpha x \geq \alpha \vee X$. Donc $\alpha \vee X \leq \wedge\alpha X$. On déduit $\alpha \vee X = \wedge\alpha X$.
2/ Supposons α galoisienne. Si $z \in c(X), z \leq \vee X$, donc $\alpha z \geq \alpha \vee X = \wedge\alpha X$. Donc $\alpha \in J_c$. □

[Preuve directe. On a $I_c = \{\downarrow x, x \in S\}$. Donc α est dans J_k si et seulement si, $\forall t \in T, \alpha^{-1} \uparrow t \in I_c$, i.e. ssi $\forall t \in T, \exists s \in S$ tq $\alpha^{-1} \uparrow t =\downarrow s$. Ceci équivaut à l'existence d'une correspondance de Galois $S \overset{\alpha}{\rightleftarrows} T$.]

Les deux paragraphes qui suivent constituent des exemples indépendants de la situation de Prop. 3.3.1.

4. Idéaux d'un demi-treillis S

Dans tout ce paragraphe, S est un demi-treillis. Pour $X \subset S$, notons $f(X)$ le sous-demi-treillis engendré par X et posons $g(X) =\downarrow X$. Appelons idéal de S tout sous-demi-treillis D vérifiant $D =\downarrow D$. Montrons que f et g sont semi-commutatifs : il suffit d'établir (Déf. 1.1) que $X \in I_f \Rightarrow g(X) \in I_f$. Soit donc $X \in I_f$ (X est un sous-demi-treillis de S). Comme $0 \in X$,$0 \in\downarrow X$. Si $a, b \in\downarrow X$, $a \leq x \in X$ et $b \leq y \in X$, d'où $a \vee b \leq x \vee y \in X$, donc $a \vee b \in\downarrow X$. Donc $\downarrow X \in I_f$. Les gf-invariants sont donc (Prop. 2.2) les parties de S à la fois f-fermées et g-fermées, i.e. les idéaux. Illustrons à présent Prop. 3.3.1, en utilisant Prop. 3.2.2 et Prop 3.2.3.

Les "idéaux flous" sont les $\alpha \in T^S$ décroissantes tq $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(a \vee b) \geq \alpha a \wedge \alpha b$, autrement dit les $\alpha \in T^S$ vérifiant $\alpha(\vee A) = \wedge\alpha A$ pour toute partie finie A de S.

Proposition 4.1. *Soit S un demi-treillis. Soit c l'opérateur de fermeture qui associe à $X \subset S$ l'idéal engendré.*

Les T-parties qui sont c-fermées sont les $\alpha \in T^S$ vérifiant, pour A fini $\subset S$, $\alpha(\vee A) = \wedge\alpha A$.

Peut-être peut-on expliquer la parenté entre Prop. 3.3.2 et Prop. 4.1?

5. Quasi-équivalences sur un ensemble E

Appelons quasi-équivalence sur un ensemble E toute relation binaire à la fois symétrique et transitive (voir [5], p. 26). Soit $S = E^2$ et $L = 2^S$. L'ensemble des relations symétriques est une partie $\cap$-stable de L : soit f l'opérateur de fermeture associé. Soit g l'opérateur de fermeture associé à la partie $\cap$-stable de L constituée des relations transitives. Il est clair que, pour $R \subset E^2$, $g(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R^n$.

Montrons que f et g sont semi-commutatifs (en utilisant toujours Déf. 1.1). Si R est une relation symétrique, soit $(x, y) \in g(R)$. C'est dire qu'on peut trouver $n \geq 1$ tq $(x, y) \in R^n$. Donc, on peut trouver $x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y$ avec $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in R$. On en déduit immédiatement $(y, x) \in R^n$. Donc $g(R)$ est symétrique. Donc f et g sont semi-commutatifs. Les gf-fermés sont (prop. 2.2) les quasi-équivalences.

Proposition 5.1. *Il y a équivalence entre*
1/$\alpha \in J_f$
2/$\forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha(x, y) = \alpha(y, x)$.

Preuve.
1 $\Rightarrow$ 2. Soit $R = \{(x, y)\}.f(R) = \{(x, y), (y, x)\}$. Comme $(y, x) \in f(R)$, $\alpha(y, x) \geq \wedge\alpha R = \alpha(x, y)$. On verrait de même $\alpha(x, y) \geq \alpha(y, x)$.
2 $\Rightarrow$ 1. Montrons (pour $R \subset E^2$) $\wedge \alpha R = \wedge \alpha f R$. Cela résulte de ce que, en posant $\breve{R} = \{(x, y)/(y, x) \in R\}$, $f(R) = R \cup \breve{R}$. □

Proposition 5.2. *Il y a équivalence entre*
1/$\alpha \in J_g$
2/$\alpha(x, z) \geq (\alpha(x, y)) \wedge (\alpha(y, z))$.

Preuve.
1 $\Rightarrow$ 2. Soit $R = \{t/t = (x, y) \,\text{ou}\, (y, z)\}$. Comme $(x, z) \in g(R)$, $\alpha(x, z) \geq \wedge\alpha R = \alpha(x, y) \wedge \alpha(y, z)$.
2 $\Rightarrow$ 1. Il faut montrer que $(x, y) \in g(R) \Rightarrow \alpha(x, y) \geq \wedge\alpha R$. Soit donc $(x, y) \in g(R)$. On a (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$) $(x, y) \in R^n$. Soit $x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y$ tq $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in R$. On a: $\alpha(x, y) \geq \alpha(a_0, a_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(a_{n-1}, a_n) \geq \wedge\alpha R$. □

Proposition 5.3. *Si* $c(R)$ *désigne la quasi-équivalence engendrée par* $R \subset E^2$*, les* T*-relations* c*-fermées sont les* $\alpha : E^2 \to T$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \alpha(x, y) = \alpha(y, x) \\ \alpha(x, y) \geq \alpha(x, y) \wedge \alpha(y, z). \end{cases}$$

Il y a dans Prop. 5.3 d'agréables effluves d'ultramétricité.

References

[1] Achache, A., How to fuzzify a closure space. J. Math. Anal. Appl. 130 (1988), 538–544.

[2] Achache, A., Sangalli, A., L'endofoncteur *extension* associé à un espace de fermeture. Review of Math. Research of Novi Sad 18(2) (1988), 111–116.

[3] Bourbaki, N., Topologie générale, ch. 1 et 2. Paris: Hermann, 1940.

[4] Negoita, C.V., Ralescu, D.A., Applications of Fuzzy Sets to System Analysis. Basel-Stuttgart: Birkhaser, 1975.

[5] Šešelja, B., Tepavčević, A., Weak congruences in universal algebra. Novi Sad: Symbol, 2001.

[6] Shmuely, Z. The structure of Galois connexions, Pacific J. Math. 54 (1974), 209–225.

Received by the editors October 1, 2003