Od parcijalnih operatora zatvaranja, preko parcijalnih matroida, do geometrijskih i polumodularnih poseta

Anna Slivková
zajednički rad sa B. Šešeljom i A. Tepavčević

Novi Sad, 28. mart 2018

Uvod

Uvod

Kratak sadržaj:

Uvod

Kratak sadržaj:

- osnovni pojmovi i osobine,

Uvod

Kratak sadržaj:

- osnovni pojmovi i osobine,
- specijalni parcijalni operatori zatvaranja i parcijalni domeni zatvaranja,

Uvod

Kratak sadržaj:

- osnovni pojmovi i osobine,
- specijalni parcijalni operatori zatvaranja i parcijalni domeni zatvaranja,
- parcijalni matroidi, geometrijski i polumodularni uređeni skupovi.

Operatori zatvaranja

Operator zatvaranja na skupu A je funkcija $X \mapsto \overline{X}$ iz $\mathcal{P}(A)$ u $\mathcal{P}(A)$ koja ispunjava sledeće uslove:

C_1 : $X \subseteq \overline{X}$;

C_2 : ako je $X \subseteq Y$, onda je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$;

C_3 : $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$.

Operatori zatvaranja

Operator zatvaranja na skupu A je funkcija $X \mapsto \overline{X}$ iz $\mathcal{P}(A)$ u $\mathcal{P}(A)$ koja ispunjava sledeće uslove:

C_1 : $X \subseteq \overline{X}$;

C_2 : ako je $X \subseteq Y$, onda je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$;

C_3 : $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$.

Ako je $X \subseteq A$ onda je $\overline{X}$ njegovo **zatvorenje**, a ako je $X = \overline{X}$ onda je X **zatvoreni podskup** u odnosu na ovaj operator. Familiju zatvorenih skupova u odnosu na operator zatvaranja nazivamo **opseg** operatora zatvaranja i označavamo sa $\mathcal{F}$.

Operatori zatvaranja

Operatori zatvaranja

Teorema

Opseg $\mathcal{F}$ operatora zatvaranja uređen inkluzijom čini potpunu mrežu.

Teorema

Opseg $\mathcal{F}$ operatora zatvaranja uređen inkluzijom čini potpunu mrežu.

U mreži zatvorenih skupova $(\mathcal{F}, \subseteq)$ važi da je infimum familije skupova njihov presek a supremum familije skupova je zatvorenje njihove unije.

Teorema

Opseg $\mathcal{F}$ operatora zatvaranja uređen inkluzijom čini potpunu mrežu.

U mreži zatvorenih skupova $(\mathcal{F}, \subseteq)$ važi da je infimum familije skupova njihov presek a supremum familije skupova je zatvorenje njihove unije.

Teorema

Za svaku potpunu mrežu L postoji skup i operator na njemu tako da je L izomorfna odgovarajućoj mreži zatvorenih podskupova.

Operatori zatvaranja

Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja je zatvorena za presek se naziva **sistem zatvaranja** (ili **Murova familija**).

Operatori zatvaranja

Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja je zatvorena za presek se naziva **sistem zatvaranja** (ili **Murova familija**).

Teorema

Sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ uređen inkluzijom je potpuna mreža.

Operatori zatvaranja

Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja je zatvorena za presek se naziva **sistem zatvaranja** (ili **Murova familija**).

Teorema

Sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ *uređen inkluzijom je potpuna mreža.*

Teorema

Opseg operatora zatvaranja uređen inkluzijom čini sistem zatvaranja.

Operatori zatvaranja

Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja je zatvorena za presek se naziva **sistem zatvaranja** (ili **Murova familija**).

Teorema

Sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ uređen inkluzijom je potpuna mreža.

Teorema

Opseg operatora zatvaranja uređen inkluzijom čini sistem zatvaranja.

operatori zatvaranja $\longleftrightarrow$ **potpune mreže** $\longleftrightarrow$ **sistemi zatvaranja**

Parcijalni operatori zatvaranja

Parcijalni operatori zatvaranja

Parcijalni operator zatvaranja C na skupu S jeste parcijalno preslikavanje $C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ koje ispunjava:

Pc_1: ako je $C(X)$ definisano, onda $X \subseteq C(X)$;

Pc_2: ako su $C(X)$ i $C(Y)$ definisani, onda $X \subseteq Y$ implicira $C(X) \subseteq C(Y)$;

Pc_3: ako je $C(X)$ definisano, onda je $C(C(X))$ takođe definisano i $C(C(X)) = C(X)$;

Pc_4: $C(\{x\})$ je definisano za sve $x \in S$.

Parcijalni operatori zatvaranja

Parcijalni operator zatvaranja C na skupu S jeste parcijalno preslikavanje $C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ koje ispunjava:

Pc_1: ako je $C(X)$ definisano, onda $X \subseteq C(X)$;

Pc_2: ako su $C(X)$ i $C(Y)$ definisani, onda $X \subseteq Y$ implicira $C(X) \subseteq C(Y)$;

Pc_3: ako je $C(X)$ definisano, onda je $C(C(X))$ takođe definisano i $C(C(X)) = C(X)$;

Pc_4: $C(\{x\})$ je definisano za sve $x \in S$.

Ako je $X \subseteq S$ i $C(X) = X$, tada je X **zatvoreni skup**. Familiju zatvorenih skupova u odnosu na parcijalni operator zatvaranja C nazivamo **opseg** parcijalnog operatora zatvaranja i označavamo sa $\mathcal{F}_C$.

Parcijalni operatori zatvaranja

Parcijalni operator zatvaranja C na skupu S jeste parcijalno preslikavanje $C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ koje ispunjava:

Pc_1: ako je $C(X)$ definisano, onda $X \subseteq C(X)$;

Pc_2: ako su $C(X)$ i $C(Y)$ definisani, onda $X \subseteq Y$ implicira $C(X) \subseteq C(Y)$;

Pc_3: ako je $C(X)$ definisano, onda je $C(C(X))$ takođe definisano i $C(C(X)) = C(X)$;

Pc_4: $C(\{x\})$ je definisano za sve $x \in S$.

Ako je $X \subseteq S$ i $C(X) = X$, tada je X **zatvoreni skup**. Familiju zatvorenih skupova u odnosu na parcijalni operator zatvaranja C nazivamo **opseg** parcijalnog operatora zatvaranja i označavamo sa $\mathcal{F}_C$.

Parcijalni sistem zatvaranja na skupu S je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ koje ispunjava:

Ps_1 : $\bigcup \mathcal{F} = S$;

Ps_2 : za svako $x \in S$ važi $\bigcap \{X \in \mathcal{F} \mid x \in X\} \in \mathcal{F}$.

Parcijalni operatori zatvaranja

Parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Svaki uređeni skup $(P, \leqslant)$ *izomorfan je nekom parcijalnom sistemu zatvaranja na* P*, uređenim inkluzijom.*

Parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Svaki uređeni skup $(P, \leqslant)$ *izomorfan je nekom parcijalnom sistemu zatvaranja na* P*, uređenim inkluzijom.*

Teorema

Opseg parcijalnog operatora zatvaranja na nepraznom skupu S *je parcijalni sistem zatvaranja na* S*. Obratno, za svaki parcijalni sistem zatvaranja* $\mathcal{F}$ *na* S *postoji parcijalni operator zatvaranja na istom skupu čiji je opseg upravo* $\mathcal{F}$*.*

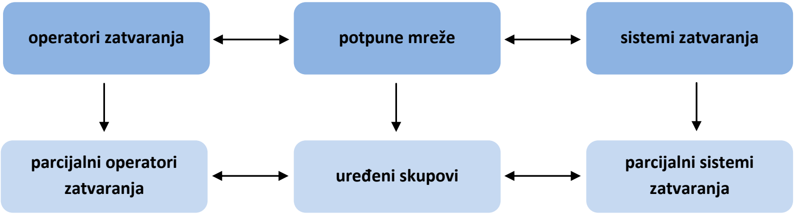
Parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Svaki uređeni skup $(P, \leqslant)$ izomorfan je nekom parcijalnom sistemu zatvaranja na P, uređenim inkluzijom.

Teorema

Opseg parcijalnog operatora zatvaranja na nepraznom skupu S je parcijalni sistem zatvaranja na S. Obratno, za svaki parcijalni sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ na S postoji parcijalni operator zatvaranja na istom skupu čiji je opseg upravo $\mathcal{F}$.



Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Za C parcijalni operator zatvaranja na skupu S definšemo $C^{\oplus} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ na sledeći način:

$$C^{\oplus}(X) = \bigcap\{C(X') \mid X' \supseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano}\}.$$

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Za C parcijalni operator zatvaranja na skupu S definšemo $C^{\oplus} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ na sledeći način:

$$C^{\oplus}(X) = \bigcap \{ C(X') \mid X' \supseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano} \}.$$

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C na skupu S, operator $C^{\oplus}$ je operator zatvaranja na S i važi $C^{\oplus}(X) = C(X)$ za sve X za koje je $C(X)$ definisano.

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Za C parcijalni operator zatvaranja na skupu S definšemo $C^{\oplus} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ na sledeći način:

$$C^{\oplus}(X) = \bigcap\{C(X') \mid X' \supseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano}\}.$$

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C na skupu S, operator $C^{\oplus}$ je operator zatvaranja na S i važi $C^{\oplus}(X) = C(X)$ za sve X za koje je $C(X)$ definisano.

Teorema

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S i K proizvoljan operator zatvaranja na S takav da $K(X) = C(X)$ kad god je $C(X)$ definisano. Tada za sve $X \subseteq S$ važi $K(X) \subseteq C^{\oplus}(X)$.

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S. Definišemo

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S. Definišemo

- $D'_C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, gde

$$D'_C(X) := \bigcup\{C(X') \mid X' \subseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano}\};$$

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S. Definišemo

- $D'_C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, gde

$$D'_C(X) := \bigcup\{C(X') \mid X' \subseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano}\};$$

-

$$D_C^{(0)}(X) := X,$$

$$D_C^{(\alpha+1)}(X) := D'_C(D_C^{(\alpha)}(X)), \text{ za svaki ordinal } \alpha,$$

$$D_C^{(\alpha)}(X) := \bigcup_{\xi<\alpha} D_C^{(\xi)}(X), \text{ ako je } \alpha \text{ granični ordinal};$$

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S. Definišemo

- $D'_C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$, gde

$$D'_C(X) := \bigcup\{C(X') \mid X' \subseteq X \text{ i } C(X') \text{ je definisano}\};$$

- $$D_C^{(0)}(X) := X,$$
$$D_C^{(\alpha+1)}(X) := D'_C(D_C^{(\alpha)}(X)), \text{ za svaki ordinal } \alpha,$$
$$D_C^{(\alpha)}(X) := \bigcup_{\xi<\alpha} D_C^{(\xi)}(X), \text{ ako je } \alpha \text{ granični ordinal;}$$

- $$C^{\ominus}(X) := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} D_C^{(\alpha)}(X).$$

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C na skupu S, operator $C^{\ominus}$ je operator zatvaranja na S i važi $C^{\ominus}(X) = C(X)$ za sve X za koje je $C(X)$ definisano.

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C *na skupu* S*, operator* $C^{\ominus}$ *je operator zatvaranja na* S *i važi* $C^{\ominus}(X) = C(X)$ *za sve* X *za koje je* $C(X)$ *definisano.*

Teorema

Neka je C *parcijalni operator zatvaranja na skupu* S *i* K *proizvoljan operator zatvaranja na* S *takav da* $K(X) = C(X)$ *kad god je* $C(X)$ *definisano. Tada za sve* $X \subseteq S$ *važi* $C^{\ominus}(X) \subseteq K(X)$.

Generisanje oper. zatvaranja parc. operatorima zatvaranja

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C na skupu S, operator $C^{\ominus}$ je operator zatvaranja na S i važi $C^{\ominus}(X) = C(X)$ za sve X za koje je $C(X)$ definisano.

Teorema

Neka je C parcijalni operator zatvaranja na skupu S i K proizvoljan operator zatvaranja na S takav da $K(X) = C(X)$ kad god je $C(X)$ definisano. Tada za sve $X \subseteq S$ važi $C^{\ominus}(X) \subseteq K(X)$.

Dakle, za parcijalni operator C na S, svaki operator K koji proširuje C ispunjava

$$C^{\ominus}(X) \subseteq K(X) \subseteq C^{\oplus}(X).$$

Parcijalni operatori zatvaranja

Primeri.

Neka je C parcijalno preslikavanje na skupu $\{a, b, c\}$ definisano sa

$$C : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b,c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{a,b,c\} & \{a,b,c\} \end{pmatrix}.$$

Parcijalni operatori zatvaranja

Primeri.

Neka je C parcijalno preslikavanje na skupu $\{a, b, c\}$ definisano sa

$$C : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b, c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} \end{pmatrix}.$$

Neka je C_s parcijalno preslikavanje definisano na skupu $\{a, b, c\}$ sa

$$C_s : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b\} & \{a, c\} & \{c\} & \{a, b, c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} \end{pmatrix}.$$

Primeri.

Neka je C parcijalno preslikavanje na skupu $\{a, b, c\}$ definisano sa

$$C : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b, c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} \end{pmatrix}.$$

Neka je C_s parcijalno preslikavanje definisano na skupu $\{a, b, c\}$ sa

$$C_s : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b\} & \{a, c\} & \{c\} & \{a, b, c\} \\ \{a\} & \{b\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} & \{a, b, c\} \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_{C_s}$$

Oštri parcijalni operatori zatvaranja

Oštri parcijalni operatori zatvaranja

Definicija

Parcijalni operator zatvaranja C *na skupu* S *nazivamo* **oštar** *ili* **SPCO** *(engl. sharp partial closure operator) ako zadovoljava sledeći uslov:*

P_{C_7} : *Neka je* $B \subseteq S$. *Ako* $\bigcap\{X \in \mathcal{F}_C \mid B \subseteq X\} \in \mathcal{F}_C$, *onda je* $C(B)$ *definisano i*

$$C(B) = \bigcap\{X \in \mathcal{F}_C \mid B \subseteq X\}.$$

Oštri parcijalni operatori zatvaranja

Definicija

Parcijalni operator zatvaranja C *na skupu* S *nazivamo* **oštar** *ili* **SPCO** *(engl. sharp partial closure operator) ako zadovoljava sledeći uslov:*

P_{C_7} : *Neka je* $B \subseteq S$*. Ako* $\bigcap\{X \in \mathcal{F}_C \mid B \subseteq X\} \in \mathcal{F}_C$*, onda je* $C(B)$ *definisano i*

$$C(B) = \bigcap\{X \in \mathcal{F}_C \mid B \subseteq X\}.$$

Teorema

Opseg parcijalnog operatora zatvaranja na nepraznom skupu S *je parcijalni sistem zatvaranja na* S*. Obratno, za svaki parcijalni sistem zatvaranja* $\mathcal{F}$ *na* S *postoji* **jedinstveni** *oštar parcijalni operator zatvaranja na istom skupu čiji je opseg upravo* $\mathcal{F}$*.*

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Definicija

Parcijalni sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ *na nepraznom skupu* P *nazivamo* **glavni** *ako je zadovoljeno*

Ps_5 : $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *i za svako* $X \subseteq P$ *važi*

$$\left| X \setminus \bigcup \{ Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X \} \right| = 1.$$

Definicija

Parcijalni sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ *na nepraznom skupu* P *nazivamo* **glavni** *ako je zadovoljeno*

Ps_5 : $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *i za svako* $X \subseteq P$ *važi*

$$\left| X \setminus \bigcup \{ Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X \} \right| = 1.$$

Teorema

Neka je $(P, \leqslant)$ *uređen skup. Tada familija glavnih ideala* $\{\downarrow x \mid x \in P\}$ *jeste glavni parcijalni sistem zatvaranja na* P.

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P. Tada je preslikavanje $G : \mathcal{F} \to P$ definisano sa

$$G(X) = x, \ \text{gde } x \in X \setminus \bigcup\{Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X\}, \tag{1}$$

bijekcija.

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P. Tada je preslikavanje $G : \mathcal{F} \to P$ definisano sa

$$G(X) = x, \text{ gde } x \in X \setminus \bigcup\{Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X\}, \tag{1}$$

bijekcija.

P – skup na kom nije definisan poredak; poredak definišemo pomoću $\mathcal{F}$:

$$x \leqslant y \text{ ako i samo ako } G^{-1}(x) \subseteq G^{-1}(y), \tag{2}$$

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P. Tada je preslikavanje $G : \mathcal{F} \to P$ definisano sa

$$G(X) = x, \text{ gde } x \in X \setminus \bigcup\{Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X\}, \tag{1}$$

bijekcija.

P – skup na kom nije definisan poredak; poredak definišemo pomoću $\mathcal{F}$:

$$x \leqslant y \text{ ako i samo ako } G^{-1}(x) \subseteq G^{-1}(y), \tag{2}$$

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P i neka je poredak $\leqslant$ definisan sa (2). Tada je funkcija G definisana sa (1) izomorfizam $(\mathcal{F}, \subseteq)$ i $(P, \leqslant)$. Štaviše, familija glavnih ideala u $(P, \leqslant)$ je $\mathcal{F}$.

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P. Tada je preslikavanje $G : \mathcal{F} \to P$ definisano sa

$$G(X) = x, \text{ gde } x \in X \setminus \bigcup\{Y \in \mathcal{F} \mid Y \subsetneq X\}, \qquad (1)$$

bijekcija.

P – skup na kom nije definisan poredak; poredak definišemo pomoću $\mathcal{F}$:

$$x \leqslant y \text{ ako i samo ako } G^{-1}(x) \subseteq G^{-1}(y), \qquad (2)$$

Teorema

Neka je $\mathcal{F}$ glavni parcijalni sistem zatvaranja na skupu P i neka je poredak $\leqslant$ definisan sa (2). Tada je funkcija G definisana sa (1) izomorfizam $(\mathcal{F}, \subseteq)$ i $(P, \leqslant)$. Štaviše, familija glavnih ideala u $(P, \leqslant)$ je $\mathcal{F}$.

Teorema

Neka je $(P, \leqslant)$ uređen skup i $\mathcal{F}$ parcijalni sistem zatvaranja koji se sastoji od glavnih ideala datog poseta. Tada se poredak na P definisan sa (2) poklapa sa $\leqslant$ u polaznom posetu.

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Definicija

Parcijalni operator C na skupu S nazivamo **glavni** *ako je ispunjeno:*

P_{C_8} : *Ako važi $X = C(X)$, onda postoji jedinstveno $x \in X$ takvo da $x \notin \bigcup\{Y \in \mathcal{F}_C \mid Y \subsetneq X\}$.*

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Definicija

Parcijalni operator C na skupu S nazivamo **glavni** *ako je ispunjeno:*

P_{C8} : *Ako važi $X = C(X)$, onda postoji jedinstveno $x \in X$ takvo da $x \notin \bigcup\{Y \in \mathcal{F}_C \mid Y \subsetneq X\}$.*

Teorema

Opseg glavnog parcijalnog operatora zatvaranja jeste glavni parcijalni sistem zatvaranja. Obratno, svaki oštar parcijalni operator zatvaranja koji se dobija od glavnog parcijalnog sistema zatvaranja jeste glavni.

Glavni parcijalni operatori zatvaranja

Teorema

Neka je $(S, \leqslant)$ *uređen skup. Parcijalno preslikavanje* $C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ *definisano sa*

$$C(X) = \downarrow\left(\bigvee X\right) \ \textit{ako} \ \bigvee X \ \textit{postoji},$$

u suprotnom $C(X)$ *nije definisano, jeste glavni SPCO. Odgovarajući parcijalni sistem zatvaranja je izomorfan sa* S.

Parcijalni domeni zatvaranja

Parcijalni domeni zatvaranja

Strogi domen parcijalnog operatora C na skupu S:

$$Dom(C) := \{X \mid X \subseteq S \text{ i } C(X) \text{ jeste definisano}\}.$$

Parcijalni domeni zatvaranja

Strogi domen parcijalnog operatora C na skupu S:

$$Dom(C) := \{X \mid X \subseteq S \text{ i } C(X) \text{ jeste definisano}\}.$$

Definicija

Za famliju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog skupa S neka je:

B_1: *za svako $x \in S$ važi $\{x\} \in \mathcal{B}$.*

Parcijalni domeni zatvaranja

Strogi domen parcijalnog operatora C na skupu S:

$$Dom(C) := \{X \mid X \subseteq S \text{ i } C(X) \text{ jeste definisano}\}.$$

Definicija

Za famliju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog skupa S neka je:

B_1: *za svako $x \in S$ važi $\{x\} \in \mathcal{B}$.*

Teorema

Za parcijalni operator zatvaranja C na skupu S kolekcija $Dom(C)$ ispunjava uslov B_1.
Obrnuto, ako je $\mathcal{B}$ proizvoljna kolekcija podskupova skupa S koja izpunjava uslov B_1, onda postoji parcijalni operator zatvaranja na skupu S takav da $Dom(C) = \mathcal{B}$.

Parcijalni domeni zatvaranja

Parcijalni domeni zatvaranja

Definicija

Za famliju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog skupa S neka je:

B_2: *za svako $X \subseteq S$ važi:*

$$\textit{ako } \bigcap\{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\} \in \mathcal{B}, \textit{ onda } X \in \mathcal{B}.$$

Parcijalni domeni zatvaranja

Definicija

Za famliju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog skupa S neka je:

B_2: *za svako $X \subseteq S$ važi:*

$$\text{ako } \bigcap\{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\} \in \mathcal{B}, \text{ onda } X \in \mathcal{B}.$$

Teorema

Za SPCO C na skupu S, kolekcija $Dom(C)$ ispunjava uslova B_1 i B_2. Obrnuto, ako je $\mathcal{B}$ proizvoljna kolekcija podskupova skupa S koja ispunjava uslove B_1 i B_2, onda postoji SPCO na skupu S takav da $Dom(C) = \mathcal{B}$.

Parcijalni domeni zatvaranja

Definicija

Za famliju $\mathcal{B}$ podskupova nepraznog skupa S neka je:

B_2: *za svako $X \subseteq S$ važi:*

$$\textit{ako} \bigcap \{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\} \in \mathcal{B}, \textit{ onda } X \in \mathcal{B}.$$

Teorema

Za SPCO C na skupu S, kolekcija $Dom(C)$ ispunjava uslova B_1 i B_2. Obrnuto, ako je $\mathcal{B}$ proizvoljna kolekcija podskupova skupa S koja ispunjava uslove B_1 i B_2, onda postoji SPCO na skupu S takav da $Dom(C) = \mathcal{B}$.

Teorema

Za dati parcijalni sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ na S, SPCO ima najveći strogi domen među svim parcijalnim operatorima zatvaranja čiji je opseg $\mathcal{F}$. Dodatno, ako je D parcijalni operator zatvaranja i C SPCO sa istim strogim domenom, onda $C(A) = D(A)$, za sve $A \subseteq S$ za koje je D definisano.

Matroidi

Matroidi

Skup A sa operatorom zatvaranja $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, u oznaci $M(A)$, nazivamo **matroid** na A ako za sve $X \subseteq A$ i za sve $x, y \in A$ važi

M_1 : iz $x \notin \overline{X}$ i $x \in \overline{X \cup \{y\}}$ sledi $y \in \overline{X \cup \{x\}}$; (*aksiom zamene*)

M_2 : postoji konačan Y tako da je $Y \subseteq X$ i $\overline{Y} = \overline{X}$. (*aksiom konačne baze*)

Matroidi

Skup A sa operatorom zatvaranja $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, u oznaci $M(A)$, nazivamo **matroid** na A ako za sve $X \subseteq A$ i za sve $x, y \in A$ važi

M_1 : iz $x \notin \overline{X}$ i $x \in \overline{X \cup \{y\}}$ sledi $y \in \overline{X \cup \{x\}}$; (*aksiom zamene*)

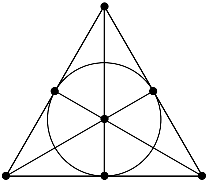
M_2 : postoji konačan Y tako da je $Y \subseteq X$ i $\overline{Y} = \overline{X}$. (*aksiom konačne baze*)

Matroid je **prost** ako važi još i:

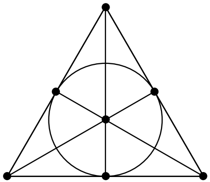
M_3 : $\overline{\emptyset} = \emptyset$ i za sve $x \in A$ je $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

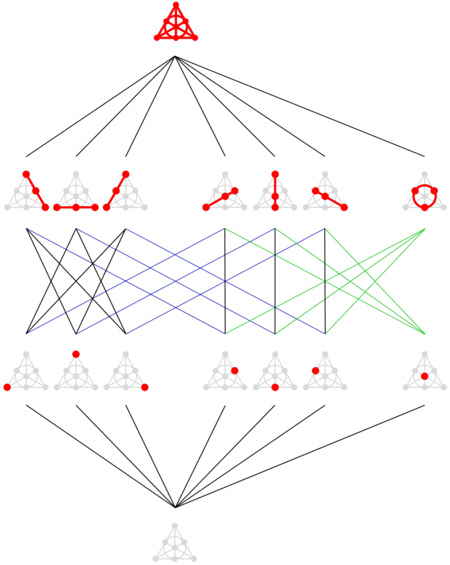
Zatvorene skupove matroida nazivamo **potprostori**. Opseg oparatora zatvaranja matroida $M(A)$ označavamo sa $L_M(A)$ i nazivamo ga **mreža potprostora** matroida $M(A)$.

Primer. Fanoov matroid:



Primer. Fanoov matroid:





Geometrijske mreže

Geometrijske mreže

Mreža $(L, \leqslant)$ je:

Mreža $(L, \leqslant)$ je:

- **atomarno generisana** ako sadrži najmanji element i svaki element je supremum atoma;

Mreža $(L, \leqslant)$ je:

- **atomarno generisana** ako sadrži najmanji element i svaki element je supremum atoma;
- **polumodularna** ako za sve $x, y \in L$ važi

$$x \wedge y \prec x \quad \text{implicira} \quad y \prec x \vee y;$$

Geometrijske mreže

Mreža $(L, \leqslant)$ je:

- **atomarno generisana** ako sadrži najmanji element i svaki element je supremum atoma;
- **polumodularna** ako za sve $x, y \in L$ važi

$$x \wedge y \prec x \quad \text{implicira} \quad y \prec x \vee y;$$

- **geometrijska** ako je atomarno generisana, polumodularna i takva da su svi lanci u L konačni.

Teorema

Skup svih zatvorenih skupova prostog matroida uređen inkluzijom je geometrijska mreža u odnosu na inkluziju. Obratno, svaka geometrijska mreža L je izomorfna skupu svih zatvorenih skupova nekog matroida konstruisanom na skupu atoma mreže L.

Geometrijske mreže i matroidi

Teorema

Skup svih zatvorenih skupova prostog matroida uređen inkluzijom je geometrijska mreža u odnosu na inkluziju. Obratno, svaka geometrijska mreža L je izomorfna skupu svih zatvorenih skupova nekog matroida konstruisanom na skupu atoma mreže L.

Teorema

Za svaki konačan matroid postoji prost matroid takav da su odgovarajuće mreže potprostora izomorfne.

Teorema

Mreža L konačne dužine je geometrijska ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi

$$x \prec y \text{ ako i samo ako postoji atom } a, \text{ takav da } a \nleq x \text{ i } y = x \vee a.$$

Geometrijske mreže

Teorema

Mreža L konačne dužine je geometrijska ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi

$x \prec y$ *ako i samo ako postoji atom* $a,$ *takav da* $a \nleq x$ *i* $y = x \vee a$.

Teorema

Mreža konačne dužine L je geometrijska ako i samo ako je atomarno generisana i za proizvoljne atome a i b i element x važi:

$$\text{iz } a < x \vee b \text{ i } a \nleq x \text{ sledi } b < x \vee a.$$

(Gornji uslov se naziva i zakon zamene za geometrijske mreže.)

Od sada pa nadalje svi skupovi će biti konačni.

Od sada pa nadalje svi skupovi će biti konačni.

- Ako $(P, \leqslant)$ nema najmanji element, onda proširujemo pojam **atoma** poseta P na sve minimalne elemente u P.

Od sada pa nadalje svi skupovi će biti konačni.

- Ako $(P, \leqslant)$ nema najmanji element, onda proširujemo pojam **atoma** poseta P na sve minimalne elemente u P.
- $A_P =$ skup svih atoma

Geometrijski uređeni skupovi

Od sada pa nadalje svi skupovi će biti konačni.

- Ako $(P, \leqslant)$ nema najmanji element, onda proširujemo pojam **atoma** poseta P na sve minimalne elemente u P.
- $A_P =$ skup svih atoma
- Uređeni skup je **atomarno generisan** ako je svaki element različit od najmanjeg supremum nekog podskupa skupa atoma posmatranog uređenog skupa.

Geometrijski uređeni skupovi

Od sada pa nadalje svi skupovi će biti konačni.

- Ako $(P, \leqslant)$ nema najmanji element, onda proširujemo pojam **atoma** poseta P na sve minimalne elemente u P.
- $A_P =$ skup svih atoma
- Uređeni skup je **atomarno generisan** ako je svaki element različit od najmanjeg supremum nekog podskupa skupa atoma posmatranog uređenog skupa.

Definicija

Uređeni skup $(P, \leqslant)$ nazivamo **geometrijski** *ako i samo ako je P atomarno generisan i ako za sve atome a i b i svako $x \in P$ važi:*

$$\text{ako je } x \vee b \text{ definisano, } a < x \vee b \text{ i } a \nleqslant x, \\ \text{onda } x \vee a \text{ postoji i } b < x \vee a.$$

Teorema

Uređeni skup $(P, \leqslant)$ *je geometrijski ako i samo ako je atomarno generisan i*

$$\text{za sve } x, y \in P \text{ takve da } x \nleqslant y, \text{ ako postoji } a \in A_P \\ \text{takvo da je } y \vee a \text{ definisano i } x \leqslant y \vee a, \\ \text{onda } x \vee y \text{ postoji i } y \prec x \vee y.$$

Parcijalni matroidi

Definicija

Parcijalni matroid *(ili skraćeno p-***matroid***) definišemo kao uređeni par* (E, C)*, gde je* E *neprazan skup a* C *oštar parcijalni operator zatvaranja na* E *koji ispunjava sledeće uslove:*

(M) *ako su* $C(X)$ *i* $C(X \cup \{x\})$ *definisani, onda* $y \notin C(X)$ *i* $y \in C(X \cup \{x\})$ *povlače da je* $C(X \cup \{y\})$ *definisano i* $x \in C(X \cup \{y\})$*;*

(P) $C(\{x\}) = \{x\}$*, za sve* $x \in E$.

Parcijalni matroidi

Definicija

Parcijalni matroid *(ili skraćeno p-***matroid***) definišemo kao uređeni par* (E, C)*, gde je* E *neprazan skup a* C *oštar parcijalni operator zatvaranja na* E *koji ispunjava sledeće uslove:*

(M) *ako su* $C(X)$ *i* $C(X \cup \{x\})$ *definisani, onda* $y \notin C(X)$ *i* $y \in C(X \cup \{x\})$ *povlače da je* $C(X \cup \{y\})$ *definisano i* $x \in C(X \cup \{y\})$*;*

(P) $C(\{x\}) = \{x\}$*, za sve* $x \in E$*.*

Teorema

Opseg p-matroida u odnosu na inkluziju je geometrijski uređen skup.

Parcijalni matroidi

Definicija

Parcijalni matroid *(ili skraćeno p-***matroid***) definišemo kao uređeni par* (E, C)*, gde je* E *neprazan skup a* C *oštar parcijalni operator zatvaranja na* E *koji ispunjava sledeće uslove:*

(M) *ako su* $C(X)$ *i* $C(X \cup \{x\})$ *definisani, onda* $y \notin C(X)$ *i* $y \in C(X \cup \{x\})$ *povlače da je* $C(X \cup \{y\})$ *definisano i* $x \in C(X \cup \{y\})$*;*

(P) $C(\{x\}) = \{x\}$*, za sve* $x \in E$*.*

Teorema

Opseg p-matroida u odnosu na inkluziju je geometrijski uređen skup.

Teorema

Za svaki geometrijski uređen skup $(P, \leqslant)$ *postoji p-matroid čiji je opseg izomorfan sa* $(P, \leqslant)$*.*

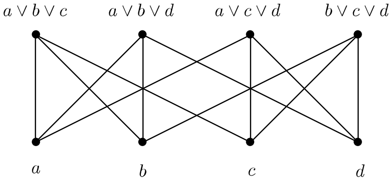
Primeri.

Geometrijski poseti i p-matroidi

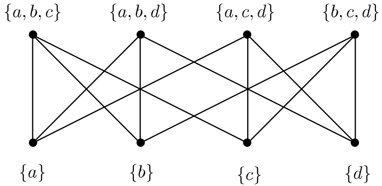
Primeri.

- Geometrijski poset $(G_{4,3}, \leqslant)$ i njemu odgovarajući p-matroid (E, C), gde je $E = \{a, b, c, d\}$ i

$$C : \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{d\} & \{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,c,d\} & \{b,c,d\} \\ \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{d\} & \{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,c,d\} & \{b,c,d\} \end{pmatrix}$$



$\longleftrightarrow$



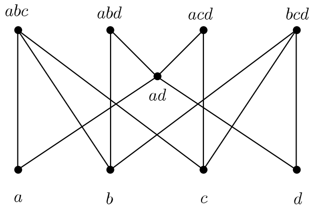
Primeri.

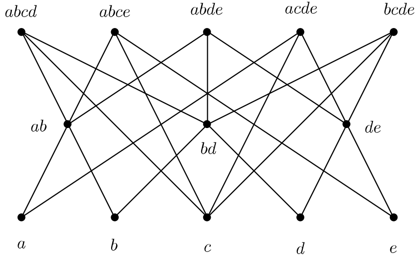
Primeri.

- $(G_{n,k}, \leqslant)$ definišemo na sledeći način: počinjemo sa n minimalnih elemenata (atoma) i dodajemo supremume svih podskupova skupa posmatranih elemenata kardinalnosti k. Za $k = 1, 2$ dobijamo mrežu sa uklonjenim najmanjim i najvećim elementima, za $k = n$ dobijamo mrežu M_n bez najmanjeg elementa, dok za $k \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$ dobijamo manje trivijalne primere.

Primeri.

- $(G_{n,k}, \leqslant)$ definišemo na sledeći način: počinjemo sa n minimalnih elemenata (atoma) i dodajemo supremume svih podskupova skupa posmatranih elemenata kardinalnosti k. Za $k = 1, 2$ dobijamo mrežu sa uklonjenim najmanjim i najvećim elementima, za $k = n$ dobijamo mrežu M_n bez najmanjeg elementa, dok za $k \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$ dobijamo manje trivijalne primere.
- Još dva primera





Polumodularni uređeni skupovi

Definicija

- *Uređen skup* $(P, \leqslant)$ *koji ima najmanji element je* **polumodularan** *ako za sve* $x, y \in P$ *važi sledeće:*

$$\text{ako } x \wedge y \prec x, \text{ onda}$$
$$y \prec x \vee y \text{ ili}$$
$$(P \text{ nije } \vee\text{-polumreža i ne postoji}$$
$$\text{atom } a \text{ takav da } x \leqslant y \vee a).$$

Polumodularni uređeni skupovi

Definicija

- *Uređen skup* $(P, \leqslant)$ *koji ima najmanji element je* **polumodularan** *ako za sve* $x, y \in P$ *važi sledeće:*

$$\begin{gathered} \textit{ako } x \wedge y \prec x, \textit{ onda} \\ y \prec x \vee y \textit{ ili} \\ (P \textit{ nije } \vee\textit{-polumreža i ne postoji} \\ \textit{atom } a \textit{ takav da } x \leqslant y \vee a). \end{gathered}$$

- *Uređen skup* $(P, \leqslant)$ *koji nema najmanji element je* **polumodularan**, *ako je uređen skup* $(P_0, \leqslant)$ *polumodularan, gde je* $(P_0, \leqslant)$ *uređeni skup dobijen dodavanjem najmanjeg elementa uređenom skupu* $(P, \leqslant)$.

Polumodularni uređeni skupovi

Definicija

- *Uređen skup* $(P, \leqslant)$ *koji ima najmanji element je* **polumodularan** *ako za sve* $x, y \in P$ *važi sledeće:*

$$\begin{gathered} \text{ako } x \wedge y \prec x, \text{ onda} \\ y \prec x \vee y \text{ ili} \\ (P \text{ nije } \vee\text{-polumreža i ne postoji} \\ \text{atom } a \text{ takav da } x \leqslant y \vee a). \end{gathered}$$

- *Uređen skup* $(P, \leqslant)$ *koji nema najmanji element je* **polumodularan**, *ako je uređen skup* $(P_0, \leqslant)$ *polumodularan, gde je* $(P_0, \leqslant)$ *uređeni skup dobijen dodavanjem najmanjeg elementa uređenom skupu* $(P, \leqslant)$.

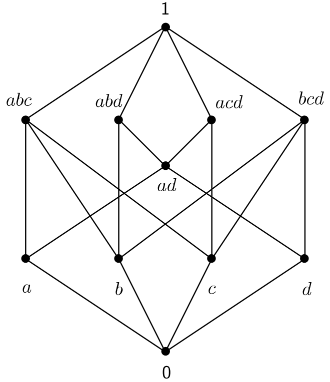
Propozicija

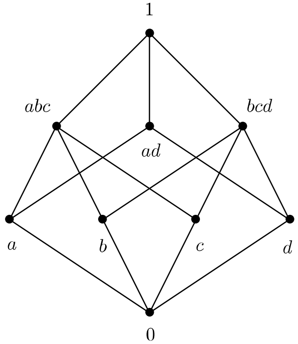
Neka je $(L, \leqslant)$ *mreža. Tada je* L *polumodularna kao mreža ako i samo ako je polumodularna kao uređeni skup.*

(O. Ore, 1943). Uređeni skup P je **polumodularan** (nagore) ako ispunjava: ako različiti elementi a i b pokrivaju c, onda postoji $d \in P$ koje pokriva oba elementa a i b.

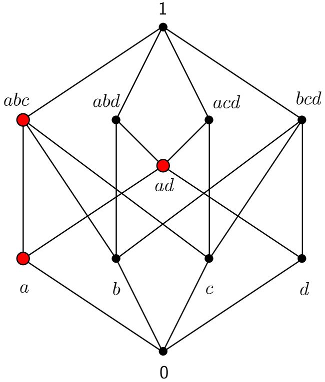
Polumodularni uređeni skupovi

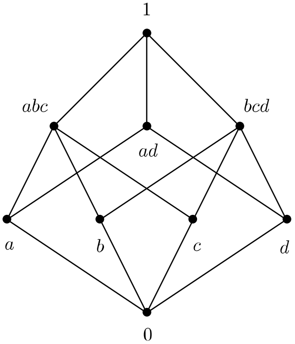
(O. Ore, 1943). Uređeni skup P je **polumodularan** (nagore) ako ispunjava: ako različiti elementi a i b pokrivaju c, onda postoji $d \in P$ koje pokriva oba elementa a i b.



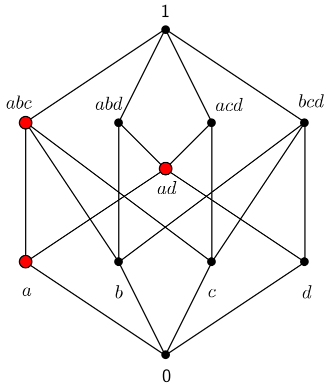


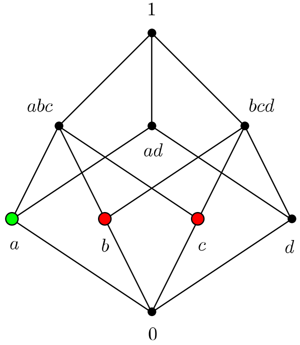
(O. Ore, 1943). Uređeni skup P je **polumodularan** (nagore) ako ispunjava: ako različiti elementi a i b pokrivaju c, onda postoji $d \in P$ koje pokriva oba elementa a i b.





(O. Ore, 1943). Uređeni skup P je **polumodularan** (nagore) ako ispunjava: ako različiti elementi a i b pokrivaju c, onda postoji $d \in P$ koje pokriva oba elementa a i b.





Polumodularni uređeni skupovi

Teorema

Svaki atomarno generisan i polumodularan uređeni skup je geometrijski.

Teorema

Svaki atomarno generisan i polumodularan uređeni skup je geometrijski.

Teorema

Svaki geometrijski uređen skup je polumodularan.

Teorema

Svaki atomarno generisan i polumodularan uređeni skup je geometrijski.

Teorema

Svaki geometrijski uređen skup je polumodularan.

Posledica

Uređen skup je geometrijski ako i samo ako je atomarno generisan i polumodularan.

Geometrijski poseti i p-matroidi

matroid
skup + operator zatvaranja
+ $M1$,$M2$,$M3$

$\updownarrow$

geometrijska mreža
atomarno generisana
+ polumodularna mreža

Geometrijski poseti i p-matroidi

matroid
skup + operator zatvaranja
+ $M1$,$M2$,$M3$

***p*-matroid**
skup + oštar parc. oper. zatvaranja
+ M, P

geometrijska mreža
atomarno generisana
+ polumodularna mreža

Geometrijski poseti i *p*-matroidi

matroid
skup + operator zatvaranja
+ $M1, M2, M3$

***p*-matroid**
skup + oštar parc. oper. zatvaranja
+ M, P

geometrijska mreža
atomarno generisana
+ polumodularna mreža

geometrijski poset
atomarno generisan
+ polumodularan poset

Geometrijski poseti i p-matroidi

matroid
skup + operator zatvaranja
+ $M1, M2, M3$

p-matroid
skup + oštar parc. oper. zatvaranja
+ M, P

geometrijska mreža
atomarno generisana
+ polumodularna mreža

geometrijski poset
atomarno generisan
+ polumodularan poset

Literatura

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Volume 25, American Mathematical Society, New York, 1967.

[3] B. A. Davey, H. A. Pristley, *Introductoin to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[4] M. Erné, Algebraic ordered sets and their generalizations, in: I. Rosenberg, G. Sabidussi (Eds.), *Algebras and Orders*, Proc. Montreal 1992, Kluwer, Amsterdam, 1994.

[5] M. Erné, Compact generation in partially ordered sets, *J. Austral. Math. Soc.* **42**, 1987, 69–83.

[6] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Springer, Basel, 2011.

[7] J. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[8] B. Šešelja, *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2006.

[9] B. Šešelja, A. Slivková, A. Tepavčević, Sharp partial closure operator, *Miskolc Math. Notes*, prihvaćeno, 2017.

[10] B. Šešelja, A. Slivková, A. Tepavčević, On geometric posets and partial matroids, poslato u časopis.

[11] B. Šešelja, A. Tepavčević, Posets via Partial Closure Operators, *Contributions to General Algebra* **12**, Verlag Johhanes Heyn, Klagenfurt, 2000, 371–376.